Friday, November 14, 2014 12:15 AM

Integration

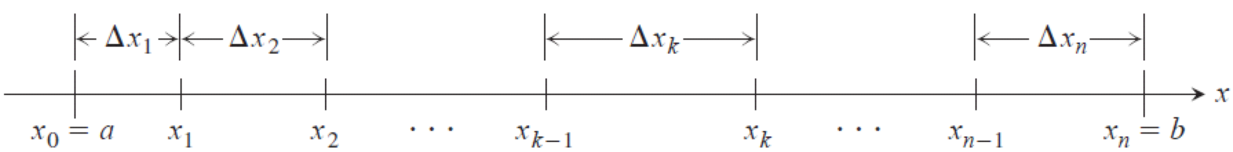
تعریف: فرض کنید تابع f بر بازه $[a,b]$ کران‌دار باشد.

partition

یک افراز از بازه $[a,b]$ عبارت است از مجموعه مرتب زیر:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}.$$

تعریف می‌کنیم $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ پس بازه $[a,b]$ به زیر بازه‌های $[x_{k-1}, x_k]$ تقسیم می‌شوند.

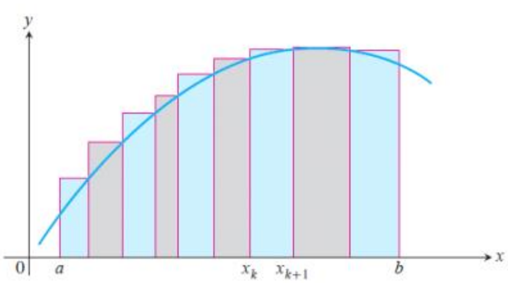


برای هر k قرار می‌دهیم

$$m_k = \inf\{f(x) : \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

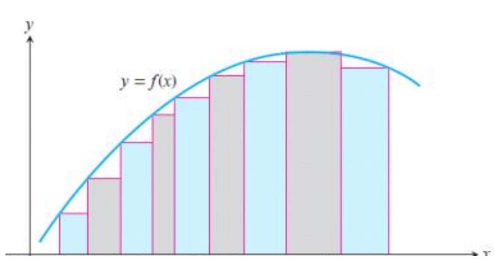
$$M_k = \sup\{f(x) : \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

متناظر با افراز P مجموع بالایی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

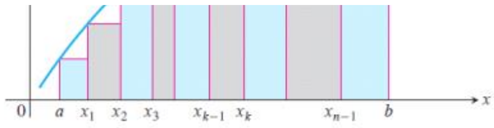


$$U(f;P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

به ترتیب مشابه مجموع پایینی نیز به صورت زیر تعریف می‌شود



$$L(f;P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$



$$\sum_{k=1} m_k(x_k - x_{k-1}). \quad \sum_{k=1}$$

واضح است که برای هر افراز P ، $L(f;P) \le U(f;P)$

P^* را یک تظریف برای P گوییم هرگاه $P \subset P^*$. اگر P^* تظریف P باشد

$U(P,f) \ge U(P^*,f)$ و $L(P,f) \le L(P^*,f)$

حال انتگرال های بالای و پایینی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$\mathcal{P}$ مجموعه تمام افرازهای بازه $[a,b]$:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = L(f) = \sup\{L(f;P):\ P \in \mathcal{P}\}.$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = U(f) = \inf\{U(f;P):\ P \in \mathcal{P}\}.$$

اگر $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ آنگاه گوییم تابع f بر بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر ریمان می باشد و مقدار مشترک را با $\int_a^b f(x)\,dx$ نشان می دهیم.

تذکر: اگر برای هر $x \in [a,b]$ ، $m \le f(x) \le M$ آنگاه

$$m(b-a) \le L(f;P) \le U(f;P) \le M(b-a).$$

مثال) تابع دیریکله بر هیچ بازه‌ای انتگرال پذیر نیست.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

فرض کنید $[a,b]$ یک بازه باشد و $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ یک افراز از بازه $[a,b]$ باشد. در اینصورت برای هر k ،

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0$$

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1$$

n

$$\Rightarrow L(P,f) = 0 \quad , \quad U(P,f) = \sum_{k=1} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1} \Delta x_k = b-a$$

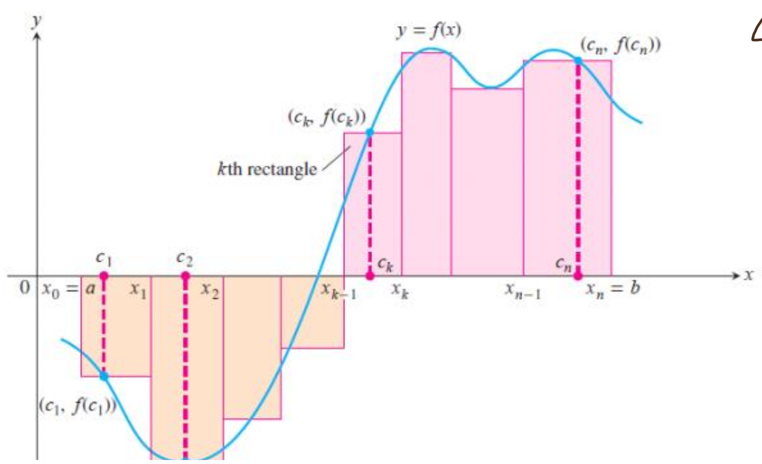
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = b-a \quad , \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$$ چون افراز P دلخواه بود

پس تابع انتگرال نپذیر است.

Riemann Sum: مجموع ریمان

فرض کنید $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ همانند حالت پیش یک افراز از بازه $[a,b]$ باشد. در هر زیر بازه $[x_{k-1}, x_k]$ نقطه دلخواه c_k را انتخاب می‌کنیم و مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k .$$



The sum S_P is called a **Riemann sum for *f* on the interval [*a*, *b*]**.

اگر با ظریف افراز P ، S_P به عددی مانند I میل کند گوییم تابع f انتگرال پذیر است و I را با نماد $\int_a^b f(x)\,dx$ نشان می‌دهیم. اگر $\|P\|$ را طول بزرگترین زیر بازه افراز P بگیریم داریم:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = I = \int_a^b f(x)\,dx .$$

When each partition has n equal subintervals, each of width $\Delta x = (b-a)/n$, we will also write

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x = I = \int_a^b f(x)\,dx .$$

به انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ انتگرال معین تابع f گوییم.

قضیه: تابع f بر بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ افرازی مانند P موجود باشد به طوری که $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$

با استفاده از قضیه فوق نشان دهید اگر f و g بر $[a,b]$ انتگرال پذیر باشند و $k \in \mathbb{R}$ آنگاه kf و $f+g$ نیز انتگرال پذیر است.

1. *Order of Integration:* $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ — A Definition

2. *Zero Width Interval:* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ — Also a Definition

3. *Constant Multiple:* $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ — Any Number k

   $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ — $k = -1$

4. *Sum and Difference:* $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

5. *Additivity:* $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

6. *Max-Min Inequality:* If f has maximum value max f and minimum value min f on $[a, b]$, then

$$\min f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b-a).$$

7. *Domination:* $f(x) \ge g(x)$ on $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

   $f(x) \ge 0$ on $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ (Special Case)

تذکر: چه توابعی بر بازه $[a,b]$ انتگرال پذیرند؟

نمونه‌ای از توابع انتگرال‌پذیر بر بازه $[a,b]$ عبارتند از: توابع پیوسته، توابع ناپیوسته‌ای که تعداد نقاط ناپیوستگی آنها متناهی است و توابع صعودی اکید و یا نزولی اکید.

قضیه: فرض کنید f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد و $m \leq f \leq M$. اگر تابع ϕ بر بازه $[m,M]$ پیوسته باشد و $h(x)=\phi(f(x))$ بر $[a,b]$ آنگاه تابع h بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

قضیه: اگر f و g انتگرال‌پذیر باشند بر $[a,b]$ آنگاه

۱- fg بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است

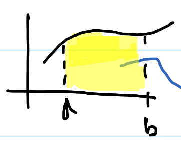
۲- $|f|$ بر $[a,b]$ " " " و $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

(تمرین)

معین

Area Under a Curve as a Definite Integral

اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ مثبت باشد آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx$ برابر مساحت زیر نمودار تابع f از a تا b است



مساحت $= \int_a^b f(x)\,dx$

Compute $\int_0^b x\,dx$

بازه $[0,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم

$$\Delta x = (b-0)/n = \frac{b}{n}$$

$$P = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \cdots, \frac{nb}{n}\right\} \text{ and } c_k = \frac{kb}{n}. \text{ So}$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{kb}{n}\cdot\frac{b}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{kb^2}{n^2} = \frac{b^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

f صعودی است

$$= \frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

f صعودی است

$$= \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

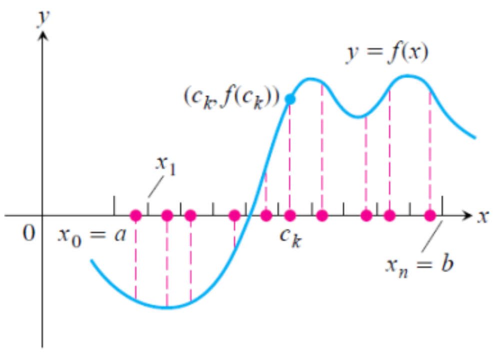
As $n \to \infty$ and $\|P\| \to 0$, this last expression on the right has the limit $b^2/2$. Therefore,

$$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}.$$

DEFINITION The Average or Mean Value of a Function

If f is integrable on $[a, b]$, then its **average value on** $[a, b]$, also called its **mean value**, is

$$\text{av}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

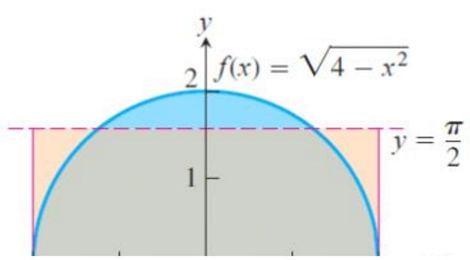


$$\frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) = \frac{\Delta x}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x$$

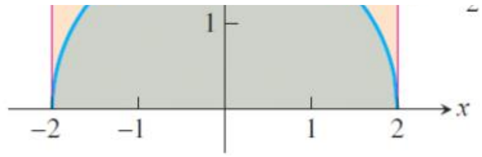
اگر نقاط افراز را زیاد کنیم یا $\|P\| \to 0$ داریم:

$$\lim_{\|P\| \to 0} \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Find the average value of $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ on $[-2, 2]$.



$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\pi$$



$$Av(f) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

تمرین انتگرال معین مربوط به هر کدام از حد های زیر را بنویسید

3. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (c_k^2 - 3c_k)\,\Delta x_k$, where P is a partition of $[-7, 5]$ $\rightarrow \int_{-7}^{5} (x^2 - 3x)\,dx$

4. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{c_k}\right) \Delta x_k$, where P is a partition of $[1, 4]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum \sqrt{\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

The Fundamental Theorem of Calculus Part 1

If f is continuous on $[a, b]$ then $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b) and its derivative is $f(x)$;

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

یعنی می توانیم ضد مشتق یک تابع پیوسته را به طریق فوق بدست آوریم

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \cos t\,dt = \cos x$$

x

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \cos t\, dt = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{if} \quad y = \int_x^5 3t \sin t\, dt = -\int_5^x 3t\sin t \Rightarrow y' = -3x\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{if} \quad y = \int_1^{x^2} \cos t\, dt \overset{u=x^2}{\Longrightarrow} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(\int_1^u \cos t\, dt\right)\frac{du}{dx}$$

$$= \cos u \cdot 2x = 2x\cos x^2$$

تمرین) نشان دهید اگر f تابعی پیوسته و g و h توابع مشتق پذیر باشند در اینصورت

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = g'(x) f(g(x)) - h'(x) f(h(x))$$

اگر $f(x) = \int_1^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$، آنگاه مشتق تابع $y = f(\frac{1}{x})$ در $x = \frac{1}{3}$ تمرین

با استفاده از قاعده هوپیتال $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin t^3\, dt}{x^4}$ را بدست آورید

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{4x^3} = \frac{1}{4}$$

با فرض $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$، $(F^{-1})'(x)$ را بیابید.

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow F(x) = \sin^{-1} x + C \quad , \quad F(1) = 0 \Rightarrow$$

$$\sin^{-1}(1) + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow F(x) = \sin^{-1} x - \frac{\pi}{2} = -\cos^{-1} x$$

$$y = -\cos^{-1} x \Rightarrow -y = \cos^{-1} x \Rightarrow \cos(-y) = x$$

$$\Rightarrow F^{-1}(x) = \cos(x) \Rightarrow (F^{-1})'(x) = -\sin x$$

مطلوب است $(f^{-1})'(0)$ وقتی که $f(x) = \int_0^x (1 + \sin(\sin t))dt$.

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

THEOREM 4 (Continued) The Fundamental Theorem of Calculus Part 2
If f is continuous at every point of $[a, b]$ and F is any antiderivative of f on $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

مثال $\int_1^2 2x\,dx$ جهت. حل) داریم ضدمشتق تابع $f(x)=2x$ برابر توابع $F(x)=x^2+c$ اند.

$$\int_1^2 2x\,dx = x^2\Big|_1^2 = 4-1=3$$

بنابراین از این به بعد دنبال روش های می‌گردیم که بتوانیم با استفاده از آنها ضدمشتق را بدست آوریم. ضدمشتق های تابع f را با $\int f(x)\,dx$ نشان داده و آن را انتگرال نامعین می‌نامیم

قواعد انتگرال گیری

۱- اگر α عددی ثابت باشد

$$\int \alpha\,dx = \alpha x + c$$

$$\int dx = x + c \quad / \quad \int_1^2 tg^{-1}(\cos(\sin z))\,dx = tg^{-1}(\cos(\sin z))\Big|$$

۲- اگر $n \neq -1$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + c$$

قاعده جانشانی (تغییر متغیر)

THEOREM 5 The Substitution Rule
If $u = g(x)$ is a differentiable function whose range is an interval I and f is continuous on I, then

THEOREM 5 The Substitution Rule

If $u = g(x)$ is a differentiable function whose range is an interval I and f is continuous on I, then

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

The Power Rule in Integral Form

$$\int \left(u^n \frac{du}{dx}\right) dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$$

$$\int 2x(x^2+1)^5\,dx = \frac{(x^2+1)^6}{6} + C$$

$$\int \sqrt{1+y^2}\cdot 2y\,dy = \frac{2}{3}(1+y^2)\sqrt{1+y^2} + C$$

$$\int \sqrt{4t-1}\,dt = 4^{-1}\int 4\sqrt{4t-1}\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}(4t-1)\sqrt{4t-1}\right) + C$$

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} = \int 2z(z^2+1)^{-\frac{1}{3}}\,dz = \frac{(z^2+1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C$$

قاعده ۳

$$\int u' \cos u\,dx = \sin u + C$$

$$\int u' \sin u\,dx = -\cos u + C$$

$$\int \cos(7\theta+5)\,d\theta = \frac{1}{7}\sin(7\theta+5) + C$$

$$\int x^2 \sin(x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sin(x^3)\,dx = \frac{-1}{3}\cos(x^3)$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$\int \sin 5x \cos 7x\,dx = \frac{1}{2}\left[\int \left(\sin(12x) - \sin(2x)\right)dx\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{12}\cos 12x + \frac{1}{2}\cos 2x\right] + c$$

$$\frac{d}{du}\tan u = \sec^2 u \Rightarrow \int u' \sec^2 u\,dx = \tan u + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 2x}\,dx = \int \sec^2(2x)\,dx = \frac{1}{2}\tan 2x + c$$

$$\int u' \tan^2 u\,dx = ?$$

تمرین

$$\int tg^2 3x\,dx = ?$$

$$\int x^2 \tan^2(x^3+1)\,dx$$

تمرین

13. $\int \sqrt{3-2s}\, ds$

14. $\int (2x+1)^3\, dx$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\, ds$

16. $\int \frac{3\, dx}{(2-x)^2}$

17. $\int \theta \sqrt[4]{1-\theta^2}\, d\theta$

18. $\int 8\theta \sqrt[3]{\theta^2-1}\, d\theta$

19. $\int 3y\sqrt{7-3y^2}\, dy$

20. $\int \frac{4y\, dy}{\sqrt{2y^2+1}}$

21. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}\, dx$

22. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\, dx$

23. $\int \cos(3z+4)\, dz$

24. $\int \sin(8z-5)\, dz$

25. $\int \sec^2(3x+2)\, dx$

26. $\int \tan^2 x \sec^2 x\, dx$

27. $\int \sin^5 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}\, dx$

28. $\int \tan^7 \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2}\, dx$

29. $\int r^2 \left(\frac{r^3}{18}-1\right)^5 dr$

30. $\int r^4 \left(7-\frac{r^5}{10}\right)^3 dr$

31. $\int x^{1/2} \sin(x^{3/2}+1)\, dx$

32. $\int x^{1/3} \sin(x^{4/3}-8)\, dx$

33. $\int \sec\left(v+\frac{\pi}{2}\right) \tan\left(v+\frac{\pi}{2}\right) dv$

34. $\int \csc\left(\frac{v-\pi}{2}\right) \cot\left(\frac{v-\pi}{2}\right) dv$

35. $\int \frac{\sin(2t+1)}{\cos^2(2t+1)}\, dt$

36. $\int \frac{6\cos t}{(2+\sin t)^3}\, dt$

37. $\int \sqrt{\cot y}\csc^2 y\, dy$

38. $\int \frac{\sec z \tan z}{\sqrt{\sec z}}\, dz$

39. $\int \frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t} - 1\right) dt$

40. $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t} + 3)\, dt$

41. $\int \frac{1}{\theta^2}\sin\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta}\, d\theta$

42. $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\sin^2\sqrt{\theta}}\, d\theta$

43. $\int (s^3 + 2s^2 - 5s + 5)(3s^2 + 4s - 5)\, ds$

44. $\int (\theta^4 - 2\theta^2 + 8\theta - 2)(\theta^3 - \theta + 2)\, d\theta$

45. $\int t^3(1 + t^4)^3\, dt$

46. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\, dx$

47. $\int x^3\sqrt{x^2 + 1}\, dx$

48. $\int 3x^5\sqrt{x^3 + 1}\, dx$

THEOREM 6 Substitution in Definite Integrals

If g' is continuous on the interval $[a, b]$ and f is continuous on the range of g, then

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

$$\int_1^3 2x(x^2+1)^3\, dx$$

$$\begin{cases} u = x^2+1 \Rightarrow du = 2x\, dx \\ x = 3 \Rightarrow u = 10 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2$$

$$= \int_2^{10} u^3\, du = \frac{u^4}{4}\Big|_2^{10} = ?$$

$$\int_a^b f(x+1)\, dx = \int_{a+1}^{b+1} f(x)\, dx \qquad \begin{cases} u = x+1 \\ du = dx \end{cases}$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}\, dx = \sin^{-1}\frac{u}{a} + C \;;\; u^2 < a^2$$

قاعده ۷

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4 - x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x\,dx}{\sqrt{4 - (x^2)^2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right) + c$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}\,dx = \sin^{-1}(\sin x) = x + c$$

$$\int \frac{u'}{a^2 + u^2}\,dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c$$

قاعده 8 -

$$\int \frac{x\,dx}{2 + x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x^2}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C \qquad (\text{Valid for } |u| > a > 0)$$

$$\int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \sec^{-1} x \Big]_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

$$\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi/6$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 6}} = \int \frac{e^x\,dx}{e^x\sqrt{e^{2x} - 6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sec^{-1}\left|\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right| + c$$

$$\int \frac{u'}{u\sqrt{u^2 - 6}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} \qquad 4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{۴-(x-۲)^۲}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-۲}{۲}\right)+c$$

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}$$

$$4x^2+4x+2=(2x+1)^2+1$$

$$= \int \frac{dx}{1+(2x+1)^2} = \frac{1}{2}tg^{-1}(2x+1)+c$$

$$\int \frac{\sin 2x \, dx}{1+\sin^4 x} = tg^{-1}(\sin^2 x)+c$$

73. $\displaystyle\int \frac{dx}{17 + x^2}$

74. $\displaystyle\int \frac{dx}{9 + 3x^2}$

75. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2 - 2}}$

76. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 4}}$

77. $\displaystyle\int_0^1 \frac{4\,ds}{\sqrt{4 - s^2}}$

78. $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{2}/4} \frac{ds}{\sqrt{9 - 4s^2}}$

79. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{8 + 2t^2}$

80. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dt}{4 + 3t^2}$

81. $\displaystyle\int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2 - 1}}$

82. $\displaystyle\int_{-2/3}^{-\sqrt{2}/3} \frac{dy}{y\sqrt{9y^2 - 1}}$

83. $\displaystyle\int \frac{3\,dr}{\sqrt{1 - 4(r - 1)^2}}$

84. $\displaystyle\int \frac{6\,dr}{\sqrt{4 - (r + 1)^2}}$

85. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + (x - 1)^2}$

86. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + (3x + 1)^2}$

87. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x - 1)\sqrt{(2x - 1)^2 - 4}}$

88. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 3)\sqrt{(x + 3)^2 - 25}}$

89. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\,d\theta}{1 + (\sin\theta)^2}$

90. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\csc^2 x\,dx}{1 + (\cot x)^2}$

91. $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\,dx}{1 + e^{2x}}$

92. $\displaystyle\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4\,dt}{t(1 + \ln^2 t)}$

93. $\displaystyle\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1 - y^4}}$

94. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 y\,dy}{\sqrt{1 - \tan^2 y}}$

95. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$

96. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

97. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{6\,dt}{\sqrt{3 - 2t - t^2}}$

98. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{6\,dt}{\sqrt{3 + 4t - 4t^2}}$

99. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 - 2y + 5}$

100. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + 6y + 10}$

101. $\displaystyle\int_1^2 \frac{8\,dx}{x^2 - 2x + 2}$

102. $\displaystyle\int_2^4 \frac{2\,dx}{x^2 - 6x + 10}$

103. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x}}$

104. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

105. $\displaystyle\int \frac{e^{\sin^{-1} x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

106. $\displaystyle\int \frac{e^{\cos^{-1} x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

107. $\displaystyle\int \frac{(\sin^{-1} x)^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

108. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\tan^{-1} x}\,dx}{1+x^2}$

109. $\displaystyle\int \frac{dy}{(\tan^{-1} y)(1+y^2)}$

110. $\displaystyle\int \frac{dy}{(\sin^{-1} y)\sqrt{1-y^2}}$

111. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\sec^2(\sec^{-1} x)\,dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

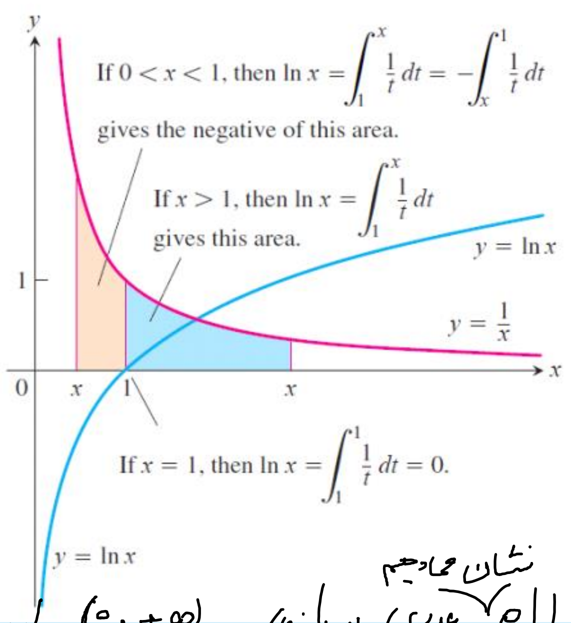
112. $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{\cos(\sec^{-1} x)\,dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Natural Logarithms

The Natural Logarithm Function

تابع $\ln x$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \qquad x > 0$$



بنابر اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، تابع Lnx تابعی پیوسته است

تعریف عدد e (عدد نپر): عدد نپر که آن را با e نشان می‌دهیم عددی در بازه‌ی $(0,+\infty)$ است که $Ln(e)=1$

مشتق تابع $y = Lnx$.

طبق اولین قضیه اساسی حساب :

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای اگر u تابعی مشتق پذیر برحسب x باشد

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u} \qquad u > 0$$

چون برای $x>0$ ، $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} > 0$ پس تابع $\ln$ تابعی صعودی است. از طرفی $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2} < 0$ بنابراین تقعر تابع $\ln$ رو به پایین است.

Properties of Logarithms

① $\ln ax = \ln a + \ln x$ ③ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

② $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$ ④ $\ln x^r = r\ln x$

اثبات اولی توابع $\ln ax$ و $\ln x$ دارای مشتق برابر هستند لذا این دو تابع در یک ثابت c اختلاف دارند یعنی

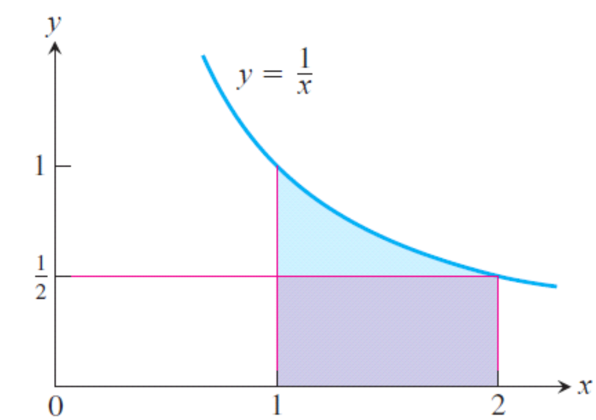
$$\ln(ax) = \ln x + c$$

از آنجا که رابطه فوق برای هر x برقرار است قرار دهید $x=1$ لذا

$$\ln(a) = \ln(1) + c \Rightarrow c = \ln(a)$$

$$\Rightarrow \ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$$

با توجه به نمودار $\ln 2 > \frac{1}{2}$



$$\ln 2^n = n\ln 2 > n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$$

$$\ln 2^{-n} = -n\ln 2 < -n\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{n}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \qquad \text{and} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

If u is a differentiable function that is never zero,

$$\int \frac{1}{u}\, du = \ln |u| + C.$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |f(x)| + C$$

هرگاه مشتق مخرج در صورت موجود باشد :

$$\int_0^2 \frac{2x}{x^2-5}\, dx = \int_{-5}^{-1} \frac{du}{u} = \ln |u| \Big]_{-5}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-5| = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4\cos\theta}{3+2\sin\theta}\, d\theta = 2\ln|3+2\sin\theta| \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = ?$$

$$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c \qquad \int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + c$$

Find dy/dx if $\quad y = \dfrac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}, \qquad x > 1.$

$$\ln y = \ln \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1} = \ln\left((x^2+1)(x+3)^{1/2}\right) - \ln(x-1)$$

$$= \ln(x^2+1) + \ln(x+3)^{1/2} - \ln(x-1) = \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x+3) - \ln(x-1).$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right).$$

37. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x}$

38. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{3\,dx}{3x-2}$

39. $\displaystyle\int \frac{2y\,dy}{y^2-25}$

40. $\displaystyle\int \frac{8r\,dr}{4r^2-5}$

41. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{2-\cos t}\,dt$

42. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} \frac{4\sin\theta}{1-4\cos\theta}\,d\theta$

43. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2\ln x}{x}\,dx$

44. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{dx}{x\ln x}$

45. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

46. $\displaystyle\int_{2}^{16} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$

47. $\displaystyle\int \frac{3\sec^2 t}{6+3\tan t}\,dt$

48. $\displaystyle\int \frac{\sec y\tan y}{2+\sec y}\,dy$

49. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \tan\frac{x}{2}\,dx$

50. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot t\,dt$

51. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} 2\cot\frac{\theta}{3}\,d\theta$

52. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/12} 6\tan 3x\,dx$

53. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+2x}$

54. $\displaystyle\int \frac{\sec x\,dx}{\sqrt{\ln(\sec x+\tan x)}}$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - \tan^{-1}x + c$$

$$\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \boxed{\int \frac{dx}{x(x^2+1)}} = 2\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx \qquad = \ln(x^2+1) - \ln|x| + c$$

The Inverse of ln x and the Number e

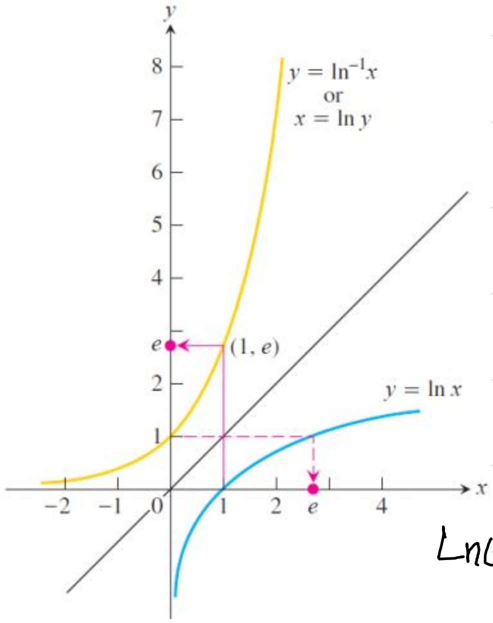
تابع Ln تابعی صعودی اکید و لذا یک به یک است

لذا دارای معکوس است $Ln^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$

تابع Ln تابعی صعودی اکید و لذا یک به یک است

بنابراین دارای معکوس است. $Ln^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$

با توجه به شکل



$$\lim_{x\to\infty} \ln^{-1} x = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{x\to -\infty} \ln^{-1} x = 0.$$

تابع $Ln^{-1}(x)$ را با $EXP(x)$ نیز نمایش می‌دهند

عدد e را به عنوان عددی تعریف کردیم که $Ln(e)=1$

لذا $e = Ln^{-1}(1) = EXP(1)$

با استفاده از کامپیوتر تا 15 رقم اعشار

محاسبه معکوس $Ln\, x$.

$$e = 2.718281828459045.$$

$$\text{Let } x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x > 0 \Rightarrow Ln\, e^x = x\, Ln\, e = x$$

از طرفی تابع Ln یک به یک و لذا معکوس پذیر است بنابر رابطه فوق داریم

$$Ln^{-1}(x) = EXP(x) = e^x$$

Inverse Equations for e^x and $\ln x$

$$e^{\ln x} = x \qquad (\text{all } x > 0) \qquad \ln(e^x) = x \qquad (\text{all } x)$$

DEFINITION General Exponential Functions

For any numbers $a > 0$ and x, the exponential function with base a is

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

$$2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln 2} \approx e^{1.20} \approx 3.32 \qquad 2^{\pi} = e^{\pi \ln 2} \approx e^{2.18} \approx 8.8$$

اگر $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

1. $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$

2. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

3. $\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$

4. $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$

The Derivative and Integral of e^x

Let $f(x) = \ln x$ and $y = e^x = \ln^{-1} x = f^{-1}(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{d}{dx}\ln^{-1} x = \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(e^x)}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{e^x}\right)} = e^x.$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$\frac{d}{dx} e^{\sin x} = e^{\sin x} \frac{d}{dx}(\sin x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$\int u' e^u \, dx = e^u + c$$

$$\int_0^{\ln 2} e^{3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_0^{\ln 2} = ?$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x \, dx = e^{\sin x} \Big]_0^{\pi/2} = e^1 - e^0 = e - 1$$

The Number e as a Limit

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}.$$

If $f(x) = \ln x$, then $f'(x) = 1/x$, so $f'(1) = 1$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right]$$

$$f'(1) = 1 \Rightarrow \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{R}$ ؛

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}.$$

41. $\int (e^{3x} + 5e^{-x})\, dx$ **42.** $\int (2e^{x} - 3e^{-2x})\, dx$

43. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{x}\, dx$ **44.** $\int_{-\ln 2}^{0} e^{-x}\, dx$

45. $\int 8e^{(x+1)}\, dx$ **46.** $\int 2e^{(2x-1)}\, dx$

47. $\int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{x/2}\, dx$ **48.** $\int_{0}^{\ln 16} e^{x/4}\, dx$

49. $\int \frac{e^{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\, dr$ **50.** $\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\, dr$

51. $\int 2t\, e^{-t^2}\, dt$ **52.** $\int t^3 e^{(t^4)}\, dt$

53. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$ **54.** $\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\, dx$

55. $\int_{0}^{\pi/4} (1 + e^{\tan\theta}) \sec^2\theta\, d\theta$ **56.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + e^{\cot\theta}) \csc^2\theta\, d\theta$

57. $\int e^{\sec \pi t} \sec \pi t \tan \pi t\, dt$

58. $\int e^{\csc(\pi + t)} \csc(\pi + t) \cot(\pi + t)\, dt$

59. $\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)} 2e^{v} \cos e^{v}\, dv$ **60.** $\int_{0}^{\sqrt{\ln \pi}} 2x\, e^{x^2} \cos(e^{x^2})\, dx$

61. $\int \frac{e^{r}}{1 + e^{r}}\, dr$ **62.** $\int \frac{dx}{1 + e^{x}}$

$\int \quad 1 + e \qquad\qquad \int \quad 1 + e$

نشان دهید

$$e^{(\ln a+\ln b)/2}\cdot(\ln b-\ln a)<\int_{\ln a}^{\ln b} e^x\,dx<\frac{e^{\ln a}+e^{\ln b}}{2}\cdot(\ln b-\ln a).$$

سپس نشان دهید

$$\sqrt{ab}<\frac{b-a}{\ln b-\ln a}<\frac{a+b}{2}.$$

The Derivative of a^u

فرض کنید $a>0$

$$\frac{d}{dx}a^x=\frac{d}{dx}e^{x\ln a}=e^{x\ln a}\cdot\frac{d}{dx}(x\ln a)=a^x\ln a.$$

پس اگر $a>0$ و u تابعی مشتق پذیر برحسب x باشد،

$$\frac{d}{dx}a^u=a^u\ln a\,\frac{du}{dx}. = u' a^u \mathrm{Ln}\, a$$

$$\frac{d}{dx}3^{\sin x}=3^{\sin x}(\ln 3)\frac{d}{dx}(\sin x)=3^{\sin x}(\ln 3)\cos x$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(a^x)=\frac{d}{dx}(a^x\ln a)=(\ln a)^2\,a^x$$

Find dy/dx if $y=x^x$, $\quad x>0$.

$$x^x = e^{x\,\mathrm{Ln}\,x}$$

The Integral of a^u

$$\int a^u\,du=\frac{a^u}{\ln a}+C.$$

$$\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$\int 2^{\sin x}\cos x\,dx = \frac{2^{\sin x}}{\ln 2} + C$$

DEFINITION $\log_a x$

برای $a \neq 1$ و $a > 0$ تابع $f(x) = a^x$ یک به یک و لذا معکوس پذیر است

معکوس آن را با log نمایش می‌دهیم و داریم

$$y>0 \leftarrow y = a^x \iff x = \log_a y \rightarrow >0$$

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

$$a^{\log_a x} = x \qquad (x > 0) \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$\log_a(a^x) = x \qquad (\text{all } x)$$

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a}\cdot \ln x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u} \times \frac{1}{\ln a}$$

$$\int \frac{\log_2 x}{x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{(\ln x)^2}{2}\right) + C$$

49. $\int_0^1 2^{-\theta}\,d\theta$

50. $\int_{-2}^0 5^{-\theta}\,d\theta$

51. $\int_1^{\sqrt{2}} x2^{(x^2)}\,dx$

52. $\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

53. $\int_0^{\pi/2} 7^{\cos t}\sin t\,dt$

54. $\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan t}\sec^2 t\,dt$

55. $\int_2^4 x^{2x}(1+\ln x)\,dx$

56. $\int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x}\,dx$

57. $\int 3x^{\sqrt{3}}\,dx$

58. $\int x^{\sqrt{2}-1}\,dx$

59. $\int_0^3 (\sqrt{2}+1)x^{\sqrt{2}}\,dx$

60. $\int_1^e x^{(\ln 2)-1}\,dx$

61. $\int \frac{\log_{10} x}{x}\,dx$

62. $\int_1^4 \frac{\log_2 x}{x}\,dx$

63. $\int_1^4 \frac{\ln 2 \log_2 x}{x}\,dx$

64. $\int_1^e \frac{2\ln 10 \log_{10} x}{x}\,dx$

65. $\int_0^2 \frac{\log_2(x+2)}{x+2}\,dx$

66. $\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(10x)}{x}\,dx$

67. $\int_0^9 \frac{2\log_{10}(x+1)}{x+1}\,dx$

68. $\int_2^3 \frac{2\log_2(x-1)}{x-1}\,dx$

69. $\int \frac{dx}{x\log_{10} x}$

70. $\int \frac{dx}{x(\log_8 x)^2}$

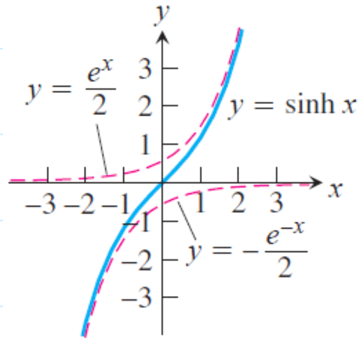
Hyperbolic Functions

توابع هذلولوی

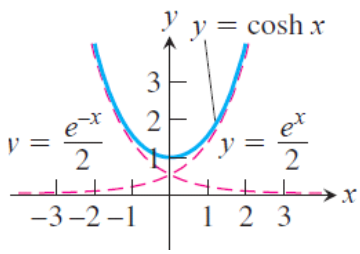
$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{even part}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{odd part}}.$$

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}_{\text{even part}} + \underbrace{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}_{\text{odd part}}.$$

Hyperbolic sine of x: $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

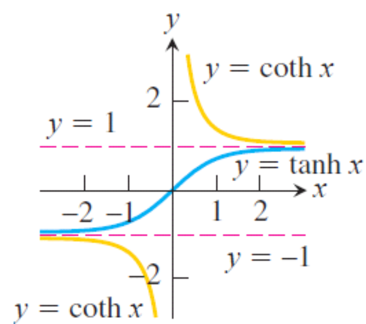


Hyperbolic cosine of x: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

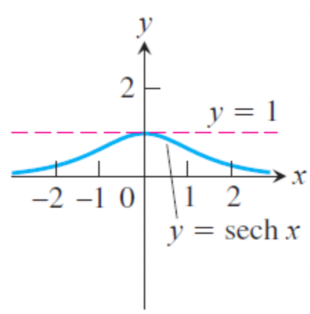


Hyperbolic tangent: $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

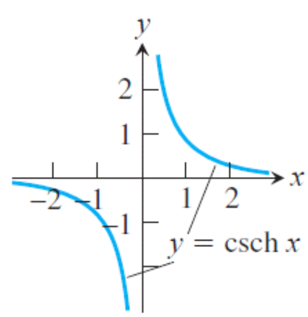
Hyperbolic cotangent: $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$



Hyperbolic secant: $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

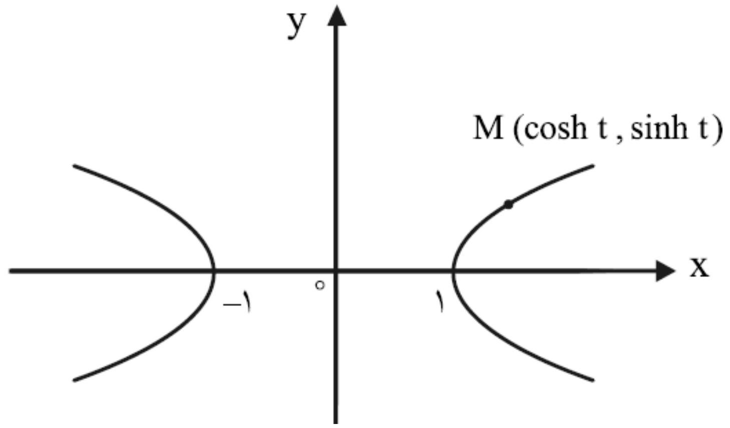


Hyperbolic cosecant: $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$



هذلولی متساوی الساقین $x^2 - y^2 = 1$ را در نظر می‌گیریم. اگر فرض کنیم $x = \cosh t$ و $y = \sinh t$ آنگاه

$M(\cosh t, \sinh t)$ روی این هذلولی واقع است.



از اینجا علت نامگذاری دو تابع سینوس هیپربولیک و کسینوس هیپربولیک معلوم می‌شود. دقت کنید که چون $e^t > 0$ و $e^{-t} = \frac{1}{e^t} > 0$ لذا $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0$ یعنی نقطه M همواره در سمت راست محور yها واقع می‌شود.

$$2 \sinh x \cosh x = 2\, \frac{e^x - e^{-x}}{2}\, \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh(2x)$$

تمرین ثابت کنید.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \Rightarrow \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$

$$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$$

مشتق ها و انتگرال های زیر را بدست آورید.

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx} \qquad \int \sinh u \, du = \cosh u + C$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx} \qquad \int \cosh u \, du = \sinh u + C$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx} \qquad \int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx} \qquad \int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx} \qquad \int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx} \qquad \int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right) = \frac{e^u \, du/dx + e^{-u} \, du/dx}{2} = \cosh u \frac{du}{dx}$$

تمرین)

$$\frac{d}{dt}\left(\tanh \sqrt{1 + t^2}\right) = \qquad \int \coth 5x \, dx =$$

$$\int_0^1 \sinh^2 x \, dx = \int \frac{\cosh 2x}{2} dx - \int \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4}\sinh 2x - \frac{1}{2}x + c$$

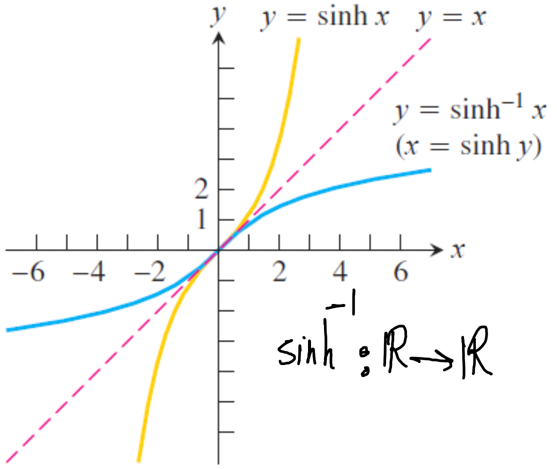
$$\int_0^{\ln 2} 4e^x \sinh x \, dx = \int_0^{\ln 2} \frac{4e^{2x} - 4}{2} dx =$$

Inverse Hyperbolic Functions

معکوس توابع هایپربولیک

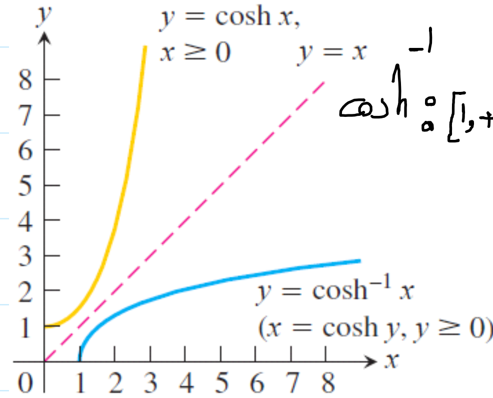
از بین توابع هایپربولیک آنهایی که یک به یک نیستند $y = \cosh x$ و $y = \operatorname{sech} x$

می باشند. دامنه این توابع را به $[0, \infty)$ تحدید می کنیم و معکوس تابع جدید را در نظر می گیریم



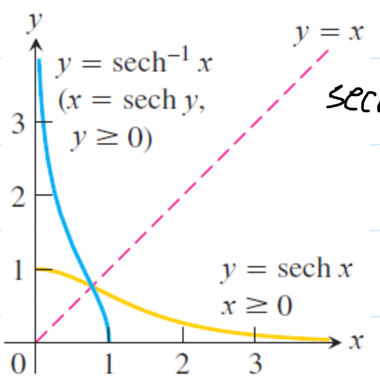
$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(a)



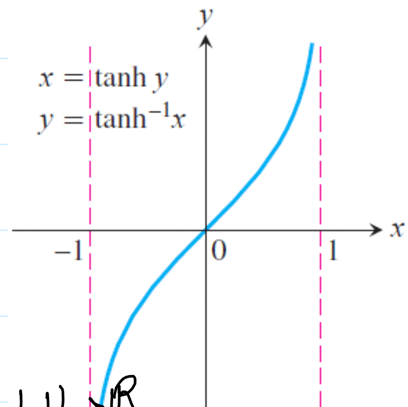
$\cosh^{-1} : [1, +\infty) \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

(b)



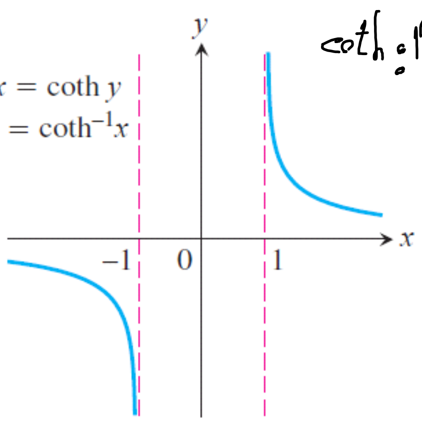
$\operatorname{sech}^{-1} : (0, 1] \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

(c)



$\tanh^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$

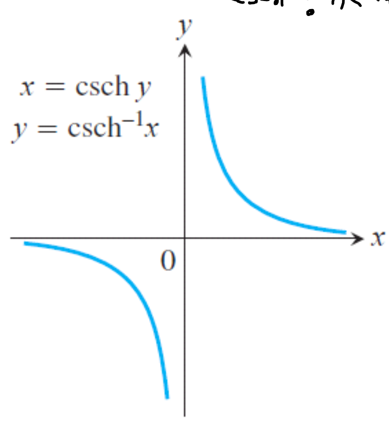
(a)



$\coth^{-1} : \mathbb{R} - [-1, 1] \to \mathbb{R} - \{0\}$

(b)

$\operatorname{csch}^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$



(c)

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1}\frac{1}{x}$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1}\frac{1}{x}$$

$$\coth^{-1} x = \tanh^{-1}\frac{1}{x}$$

if $0 < x \leq 1$, then $\operatorname{sech}\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{1}{\cosh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$

$$\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sech}^{-1} x$$

Derivatives and Integrals

$$\frac{d(\sinh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad u > 1$$

$$\frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{u\sqrt{1-u^2}}, \qquad 0 < u < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{1+u^2}}, \qquad u \neq 0$$

$(\sinh^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ نشان می‌دهیم

$$y = \sinh^{-1} x \Rightarrow x = \sinh y \xRightarrow{\text{مشتق}} 1 = y' \cosh y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$du = u'dx$

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad a > 0$

2. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad u > a > 0$

3. $$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C & \text{if } u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, & \text{if } u^2 > a^2 \end{cases}$$

4. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad 0 < u < a$$

5. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C, \qquad u \neq 0 \text{ and } a > 0$$

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{3 + 4x^2}} = \int \frac{2\,dx}{\sqrt{3+(2x)^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

روابط زیر را ثابت کنید

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \qquad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}, \qquad |x| < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \qquad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), \qquad x \neq 0$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x + 1}{x - 1}, \qquad |x| > 1$$

اثبات اولی

$$y = \sinh^{-1} x \Rightarrow \sinh y = x \Rightarrow 2x = e^y - e^{-y}$$

$$\Rightarrow \cosh y = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1+x^2} = e^y + e^{-y}$$

$$\Rightarrow 2\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = 2e^y$$

$$\Rightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

67. $$\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$$

$$\sinh^{-1}\frac{x}{2}\Big|_0^{2\sqrt{3}} = \sinh^{-1}\sqrt{3} - \sinh^{-1}(0)$$

$$= \ln(\sqrt{3} + 2)$$

68. $$\int_0^{1/3} \frac{6\,dx}{\sqrt{1 + 9x^2}} = 2\sinh^{-1} 3x \Big|_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= ?$$

69. $$\int_{5/4}^{2} \frac{dx}{1 - x^2}$$

70. $$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2}$$

$$0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{4} < 1$$

69. $\int_{5/4} \frac{}{1 - x^2}$ **70.** $\int_0 \frac{}{1 - x^2}$

$\frac{5}{4} < x < 2 \Rightarrow x^2 > \frac{25}{16} > 1$

$\Rightarrow \int_{\frac{5}{4}}^{2} \frac{dx}{1-x^2} = \coth^{-1} x \Big|_{\frac{5}{4}}^{2}$

$= \tanh^{-1} x \Big|_{0}^{0.5}$

71. $\displaystyle\int_{1/5}^{3/13} \frac{dx}{x\sqrt{1 - 16x^2}}$ **72.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4 + x^2}} = \frac{-1}{2} \operatorname{csch}^{-1} \left|\frac{x}{2}\right| \Big|_1^2$

$= -\operatorname{sech}^{-1}(4x) \Big|_{\frac{1}{5}}^{\frac{3}{13}}$

73. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$ **74.** $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 + (\ln x)^2}} = \int_1^e \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

$\sinh^{-1}(\sin x) \Big|_0^{\pi}$

$= \sinh^{-1}(\ln x) \Big|_1^e$

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = = \int \frac{1}{\cosh x} dx = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} = \int \frac{\cosh x}{1 + \sinh^2 x} = \tan^{-1}(\sinh x) + c$$

تمرین :

51. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4} \coth x \, dx$ **52.** $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \tanh 2x \, dx$

53. $\displaystyle\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} 2e^{\theta} \cosh \theta \, d\theta$ **54.** $\displaystyle\int_0^{\ln 2} 4e^{-\theta} \sinh \theta \, d\theta$

55. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cosh(\tan \theta) \sec^2 \theta \, d\theta$ **56.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2 \sinh(\sin \theta) \cos \theta \, d\theta$

57. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\cosh(\ln t)}{t} dt$ **58.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{8 \cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

59. $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$ **60.** $\displaystyle\int_0^{\ln 10} 4 \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

In Exercises 25–36, find the derivative of y with respect to the appropriate variable.

25. $y = \sinh^{-1}\sqrt{x}$

26. $y = \cosh^{-1} 2\sqrt{x+1}$

27. $y = (1-\theta)\tanh^{-1}\theta$

28. $y = (\theta^2 + 2\theta)\tanh^{-1}(\theta + 1)$

29. $y = (1-t)\coth^{-1}\sqrt{t}$

30. $y = (1-t^2)\coth^{-1} t$

31. $y = \cos^{-1} x - x\,\mathrm{sech}^{-1} x$

32. $y = \ln x + \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{sech}^{-1} x$

33. $y = \mathrm{csch}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\theta}$

34. $y = \mathrm{csch}^{-1} 2^{\theta}$

35. $y = \sinh^{-1}(\tan x)$

36. $y = \cosh^{-1}(\sec x), \quad 0 < x < \pi/2$

TECHNIQUES OF INTEGRATION

مثال های مختلف

$$\int (\sec x + \tan x)^2\, dx.$$

$$\int (\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \underbrace{\sec^2 x - 1}_{\tan^2 x})\, dx = 2\int \sec^2 x\, dx + 2\int \sec x \tan x\, dx - \int 1\, dx$$

$$= 2\tan x + 2\sec x - x + C.$$

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\, dx. = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2\cos^2(2x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\, |\cos(2x)|$$

$$\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) = ?$$

$$\int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2}\, dx.$$

$$3x^2 - 7x \;\Big|\; \frac{3x+2}{x-3}$$

$$\frac{\vdots}{6}$$

$a = bq + r$

$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$

$$= \int \left(x - 3 + \frac{6}{3x+2}\right) dx = ?$$

$$\int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx. = 3\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \underline{\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}} = ?$$

$$\int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx. = 3\underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}_{-3\sqrt{1-x^2}+C} + \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\int \sec x\, dx = \int (\sec x)(1)\, dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

1. $\displaystyle\int \sec u\, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$

2. $\displaystyle\int \csc u\, du = -\ln |\csc u + \cot u| + C$

جزء به جزء

integration by parts

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\, dx = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\, dx$$

$$\int f(x)g'(x)\, dx = \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\, dx - \int f'(x)g(x)\, dx$$

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$$

$$\int F(x)\, d(g(x)) = F(x)g(x) - \int g(x)\, d(F(x))$$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

تذکر: برای تابع دیفرانسیل پذیر $y=f(x)$ دیفرانسیل f را به صورت $d(f(x))=f'(x)\,dx$ تعریف می‌کنیم.

$$\int x\cos x\,dx.$$

چون $d(\sin x)=\cos x\,dx$ داریم:

$$=\int x\,d(\sin x)=x\sin x-\int \sin x\,dx=x\sin x+\cos x+c$$

راه دوم

$$I=\int x\cos x\,dx=\int u\,dV=uV-\int V\,du$$

$$\begin{cases} u=x \xRightarrow{\text{مشتق}} du=dx \\ dV=\cos x\,dx \xRightarrow{\text{انتگرال}} V=\sin x \end{cases} \Longrightarrow I=x\sin x-\int \sin x\,dx=x\sin x+\cos x+c$$

$$\int \ln x\,dx.=x\ln x-\int x\,d(\ln x)=x\ln x-\int \frac{x}{x}\,dx=x\ln x-x+c$$

$$\int x^2e^x\,dx.=\int x^2\,d(e^x)=x^2e^x-\int e^x\,d(x^2)=x^2e^x-\int 2xe^x\,dx$$

$$=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^x\,dx\right)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+c$$

$$\int e^x\cos x\,dx.=\int \cos x\,d(e^x)=e^x\cos x-\int e^x\,d(\cos x)$$

$$=e^x\cos x+\int e^x\sin x=e^x\cos x+\left[e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx\right]$$

$$\Longrightarrow 2\int e^x\cos x=e^x(\cos x+\sin x)$$

$$\Longrightarrow \int e^x\cos x=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)$$

$$\int_0^4 xe^{-x}\,dx.=\int_0^4 x\,d(-e^{-x})=-xe^{-x}\Big|_0^4+\int_0^4 e^{-x}\,dx$$

$$=-e^{-x}(x+1)\Big|_0^4=?$$

Tabular Integration

$$\int x^2e^x\,dx.$$

With $f(x) = x^2$ and $g(x) = e^x$, we list:

$f(x)$ and its derivatives		$g(x)$ and its integrals
x^2	$(+)$	e^x
$2x$	$(-)$	e^x
2	$(+)$	e^x
0		e^x

$$\int x^3 \sin x \, dx. = I$$

$+$	x^3	$\sin x$
$-$	$3x^2$	$-\cos x$
$+$	$6x$	$-\sin x$
$-$	6	$\cos x$
	0	$+\sin x$

$$I = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$

$$\int x^2 \cos(3x)\, dx = ?$$ تمرین.

$$\int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx = \int \cos^{n-1} x \, d(\sin x) = \sin x \cos^{n-1} x - \int \sin x \, d(\cos^{n-1} x)$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1-\cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x - \underline{(n-1) \int \cos^n x \, dx}$$

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \int \cos x \, dx = ?$$

1. $\displaystyle\int x \sin\frac{x}{2}\,dx$

2. $\displaystyle\int \theta \cos \pi\theta\, d\theta$

3. $\displaystyle\int t^2 \cos t\, dt$

4. $\displaystyle\int x^2 \sin x\, dx$

5. $\displaystyle\int_1^2 x \ln x\, dx$

6. $\displaystyle\int_1^e x^3 \ln x\, dx$

7. $\displaystyle\int \tan^{-1} y\, dy$

8. $\displaystyle\int \sin^{-1} y\, dy$

9. $\displaystyle\int x \sec^2 x\, dx$

10. $\displaystyle\int 4x \sec^2 2x\, dx$

11. $\displaystyle\int x^3 e^x\, dx$

12. $\displaystyle\int p^4 e^{-p}\, dp$

13. $\displaystyle\int (x^2 - 5x)e^x\, dx$

14. $\displaystyle\int (r^2 + r + 1)e^r\, dr$

15. $\displaystyle\int x^5 e^x\, dx$

16. $\displaystyle\int t^2 e^{4t}\, dt$

17. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta^2 \sin 2\theta\, d\theta$

18. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^3 \cos 2x\, dx$

19. $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^{2} t \sec^{-1} t\, dt$

20. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x \sin^{-1}(x^2)\, dx$

21. $\displaystyle\int e^\theta \sin\theta\, d\theta$

22. $\displaystyle\int e^{-y} \cos y\, dy$

23. $\displaystyle\int e^{2x} \cos 3x\, dx$

24. $\displaystyle\int e^{-2x} \sin 2x\, dx$

25. $\displaystyle\int e^{\sqrt{3s+9}}\, ds$

26. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\, dx$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} x \tan^2 x\, dx$

28. $\displaystyle\int \ln(x + x^2)\, dx$

29. $\displaystyle\int \sin(\ln x)\, dx$

30. $\displaystyle\int z(\ln z)^2\, dz$

$$\int f^{-1}(x)\,dx = \int y f'(y)\,dy = yf(y) - \int f(y)\,dy = xf^{-1}(x) - \int f(y)\,dy$$

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)\,dy \qquad y = f^{-1}(x)$$

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int x\left(\frac{d}{dx}f^{-1}(x)\right)dx.$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C.$$

$y = \ln x, \quad x = e^y$

$dx = e^y\,dy$

$\int \sin^{-1} x\,dx$ $\int \tan^{-1} x\,dx$ $\int \cos^{-1} x\,dx =$ $\int \tanh^{-1} x\,dx$

$\int \sec^{-1} x\,dx$ $\int \log_2 x\,dx$ $\int \sinh^{-1} x\,dx$

$$\int \sin^{-1} x\,dx = x\sin^{-1} x - \int x\,d(\sin^{-1} x) = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

حل انتگرال به روش بسیار ساده تجزیه کسرها

$$\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}dx \qquad \frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}.$$

طرفین تساوی را در مخرج کسر یعنی $(x+1)(x-3)$ ضرب می‌کنیم

$$5x-3 = A(x-3) + B(x+1) = (A+B)x - 3A + B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ 3A-B=3 \end{cases} \Rightarrow A=2 \,,\; B=3$$

$$\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}dx = \int \frac{2}{x+1}dx + \int \frac{3}{x-3}dx = 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C.$$

نکته

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{\frac{1}{a_n - a_1}}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} - \frac{\frac{1}{a_n - a_1}}{a_2 a_3 \cdots a_n}$$

$$\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{5x-15+12}{(x+1)(x-3)} = \frac{5}{x+1} + \frac{12}{(x-3)(x+1)} = \frac{5}{x+1} + \frac{3}{x-3} - \frac{3}{x+1}$$

$$= \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}$$

کسر گویای $\frac{p(x)}{q(x)}$ را در نظر می‌گیریم. اگر درجه صورت از درجه مخرج بیشتر باشد، آنگاه صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم تا یک چندجمله‌ای و یک کسر به دست آید، که در این کسر درجه صورت از درجه مخرج کمتر است. بنابراین حالتی را بررسی می‌کنیم که درجه p(x) از درجه q(x) کمتر باشد. فرض کنید

$$q(x) = k(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_1)^{m_r}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}(x^2+b_2x+c_2)^{n_2}\cdots(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}$$

به ازای هر جمله $(x-a)^m$ در تجزیه چند جمله‌ای $q(x)$ می‌توان مجموع کسرهای جزئی زیر را قرار داد.

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-a)^m}$$

به ازای هر جمله $(x^2+bx+c)^n$ در تجزیه چند جمله‌ای $q(x)$ می‌توان مجموع کسرهای جزئی را قرار داد.

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

$$\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}\,dx = I$$

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}\Rightarrow$$

$$x^2+4x+1=A(x+1)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C((x-1)(x+1))$$

$$x^2+4x+1=Ax^2+4Ax+3A+Bx^2+2Bx-3B+Cx^2-C$$

$$// \quad =(A+B+C)x^2+(4A+2B)x+3A-3B-C$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B+C=1\\4A+2B=4\\3A-3B-C=1\end{cases} \; + \; = \begin{cases}4A-2B=2\\4A+2B=4\end{cases}\Rightarrow A=\frac{3}{4}$$

$$B=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow C=-\frac{1}{4}$$

$$I=\int\frac{\frac{3}{4}}{x-1}\,dx+\int\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx-\int\frac{\frac{1}{4}}{x+3}\,dx=?$$

$$\int\frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx.$$

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+2)^2}\Rightarrow A,B=?$$

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx. \qquad \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

ادامه دهید

$$\int \frac{۳}{x^۳ - ۱}dx = \int \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$$

$$\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

ادامه دهید

$$\int \frac{x + ۱}{(x - ۱)^۲(x^۲ + x + ۱)}dx$$

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{(x^2+x+1)}$$

$$\int \frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}\,dx$$

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2}. \qquad \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Heaviside Method

Find A, B, and C in the partial-fraction expansion

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

طرفین را در $x-1$ ضرب کنید

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B(x-1)}{x-2} + \frac{C(x-1)}{x-3}$$

به جای x قرار دهید 1

$$\frac{2}{2} = A \Rightarrow \boxed{A=1}$$

$$A = \frac{(1)^2+1}{\underbrace{\boxed{(x-1)}}_{\Uparrow\ \text{Cover}}(1-2)(1-3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1$$

$$B = \frac{(2)^2+1}{(2-1)\underbrace{\boxed{(x-2)}}_{\Uparrow\ \text{Cover}}(2-3)} = \frac{5}{(1)(-1)} = -5$$

$$C = \frac{(3)^2+1}{(3-1)(3-2)\underbrace{\boxed{(x-3)}}_{\Uparrow\ \text{Cover}}} = \frac{10}{(2)(1)} = 5.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-r_n)}.$$

$$A_1 = \frac{f(r_1)}{(r_1-r_2)\cdots(r_1-r_n)} \qquad A_2 = \frac{f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)\cdots(r_2-r_n)}$$

$$\ldots \quad A_n = \frac{f(r_n)}{(r_n-r_1)(r_n-r_2)\cdots(r_n-r_{n-1})}.$$

$$I = \int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx. \qquad \frac{x+4}{x(x+5)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x-2}$$

با استفاده از روش فوق

$$A = -\frac{2}{5}\ ,\ B = \frac{-1}{35}\ ,\ C = \frac{3}{7}$$

$$I = -\frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{35}\ln|x+5| + \frac{3}{7}\ln|x-2| + c$$

Find A, B, and C in the equation $\dfrac{x-1}{(x+1)^3} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{(x+1)^3}$.

$$x-1 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C$$

طرفین را در $(x+1)^3$ ضرب می‌کنیم

به‌جای x عدد -1 را قرار می‌دهیم و C را -2 بدست می‌آوریم. از طرفین مشتق بگیرید

$$1 = 2A(x+1) + B \xrightarrow{x=-1} B = 1$$

$$0 = 2A \Rightarrow A = 0$$

دو مرتبه مشتق می‌گیریم

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$

11. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+5x-6}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12}\,dx$

13. $\displaystyle\int_4^8 \frac{y\,dy}{y^2-2y-3}$

14. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{y+4}{y^2+y}\,dy$

15. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^3+t^2-2t}$

16. $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x^3-8x}\,dx$

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^2+2x+1}$

18. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3\,dx}{x^2-2x+1}$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)(x^2+2x+1)}$

21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

22. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}\,dt$

23. $\displaystyle\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}\,dy$

24. $\displaystyle\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{2s+2}{(s^2+1)(s-1)^3}\,ds$

26. $\displaystyle\int \frac{s^4+81}{s(s^2+9)^2}\,ds$

27. $\displaystyle\int \frac{2\theta^3+5\theta^2+8\theta+4}{(\theta^2+2\theta+2)^2}\,d\theta$

28. $\displaystyle\int \frac{\theta^4-4\theta^3+2\theta^2-3\theta+1}{(\theta^2+1)^3}\,d\theta$

29. $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{9x^3-3x+1}{x^3-x^2}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{16x^3}{4x^2-4x+1}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{y^4+y^2-1}{y^3+y}\,dy$

34. $\displaystyle\int \frac{2y^4}{y^3-y^2+y-1}\,dy$

35. $\displaystyle\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t}+3e^t+2}$ $\xrightarrow{e^t=u}$ $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+3u+2}$

36. $\displaystyle\int \frac{e^{4t}+2e^{2t}-e^t}{e^{2t}+1}\,dt$

37. $\displaystyle\int \frac{\cos y\,dy}{\sin^2 y+\sin y-6}$

38. $\displaystyle\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}$

39. $\displaystyle\int \frac{(x-2)^2\tan^{-1}(2x)-12x^3-3x}{(4x^2+1)(x-2)^2}\,dx$

35. $\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t}+3e^t+2}$ 36. $\int \frac{e^{4t}+2e^{2t}-e^t}{e^{2t}+1}dt$

$e^t=u \Rightarrow \int \frac{du}{u^2+3u+2}$

37. $\int \frac{\cos y\,dy}{\sin^2 y+\sin y-6}$ 38. $\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}$

39. $\int \frac{(x-2)^2\tan^{-1}(2x)-12x^3-3x}{(4x^2+1)(x-2)^2}dx$

40. $\int \frac{(x+1)^2\tan^{-1}(3x)+9x^3+x}{(9x^2+1)(x+1)^2}dx$

اگر انتگرال شامل توان‌های کسری از متغیر x باشد آن را می‌توان با تغییر متغیر $x=z^n$ ساده کرد که در آن n کوچکترین مضرب مشترک مخرج توان‌هاست.

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx \qquad x=z^6 \Rightarrow dx=6z^5dz$$

$$6\int \frac{z^5+z^3+1}{z^2+1}dz=6\int \frac{z^3(z^2+1)+1}{z^2+1}$$

$$=6\left(\frac{z^4}{4}+tg^{-1}z\right) \xrightarrow{x=z^6} \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\,tg^{-1}\sqrt[6]{x}+c$$

$$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$$

تمرین.

اگر انتگرال تابعی گویا از $\sin x$ و $\cos x$ باشد با تغییر متغیر $z=\tan\frac{x}{2}$ آن را بـه یک تابع گویا از z تبدیل می‌کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2z}{1+z^2}\ ,\ \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-z^2}{1+z^2}\ ,\ dz=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx$$

یا $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$.

$$I=\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x} \xrightarrow{\text{با تغییر متغیر فوق}} \int\frac{dz}{1+z}=\ln|1+z|+c$$

$$\Rightarrow I=\ln\left|tg\frac{x}{2}+1\right|+c$$

روش دوم

$$\int dx \qquad \int \frac{dx}{}$$

روش دوم

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{dx}{\cancel{\sin^2(\frac{x}{2})}+\cos^2(\frac{x}{2})+2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})+\cos^2(\frac{x}{2})-\cancel{\sin^2(\frac{x}{2})}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}(1+\tan\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2(\frac{x}{2})}{1+tg(\frac{x}{2})}dx = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\int\frac{dx}{۳-۲\cos x} \qquad \int\frac{dx}{۵+۴\sin x}$$

تمرین

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sin x}$

44. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

45. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$

46. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos x}$

47. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

48. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}$

49. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sin t-\cos t}$

50. $\displaystyle\int \frac{\cos t\, dt}{1-\cos t}$

Use the substitution $z = \tan(\theta/2)$ to evaluate the integrals in Exercises 51 and 52.

51. $\displaystyle\int \sec\theta\, d\theta$

52. $\displaystyle\int \csc\theta\, d\theta$

اگر انتگرال تابعی گویا از $\sin x$ و $\cos x$ باشد و با تبدیل $\sin x$ به $-\sin x$ و $\cos x$ به $-\cos x$ انتگرال تغییر نکند تغییر متغیر $\tan x = z$ را می‌دهیم.

$$\sin^۲ x = \frac{z^۲}{۱+z^۲} \quad , \quad dz=(۱+\tan^۲ x)dx \quad , \quad dx=\frac{dz}{۱+z^۲}$$

$$\int\frac{dx}{۱+\sin^۲ x} \xrightarrow{\text{با تغییر متغیر فوق}} \int\frac{dz}{2z^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\sqrt{2}\,z + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}\tan x)+C$$

روش دوم

$$I=\int\frac{dx}{\cos^2 x+2\sin^2 x} = \int\frac{dx}{\cos^2 x(1+2\tan^2 x)} = \int\frac{1+\tan^2 x}{1+2\tan^2 x}$$

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\,(1+2\tan^2 x)} = \int \frac{(1+\tan^2 x)\,dx}{1+2\tan^2 x}$$

$$\underline{\underline{u = \sqrt{2}\tan x}} \qquad \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \underset{\sqrt{2}\tan x}{u} + c$$

$$\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x}$$ تمرین

Trigonometric Substitutions

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad \sqrt{a^2 + x^2} \qquad \sqrt{x^2 - a^2}$$

With $x = a\tan\theta$,

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2\tan^2\theta = a^2(1 + \tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta.$$

With $x = a\sin\theta$,

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2\theta = a^2(1 - \sin^2\theta) = a^2\cos^2\theta.$$

With $x = a\sec\theta$,

$$x^2 - a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2(\sec^2\theta - 1) = a^2\tan^2\theta.$$

$$x = a\tan\theta \quad \text{requires} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{with} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$x = a\sin\theta \quad \text{requires} \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{with} \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

$$x = a\sec\theta \quad \text{requires} \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{with} \quad \begin{cases} 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} & \text{if } \dfrac{x}{a} \ge 1, \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi & \text{if } \dfrac{x}{a} \le -1. \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}.$$

$$x = 2\tan\theta, \qquad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$4 + x^2 = 4 + 4\tan^2\theta = 4(1 + \tan^2\theta) = 4\sec^2\theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{|\sec\theta|} = \int \sec\theta\, d\theta$$

$\sec\theta > 0$ for $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{4 + x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C = \ln|\underbrace{\sqrt{4 + x^2} + x}| + C'.$$

همواره مثبت است. قدر مطلق نیاز نیست.

$$2^{nd} \text{ way}: \quad I = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c = \ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}\right) + c$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

$$x = 3\sin\theta, \qquad dx = 3\cos\theta\,d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$9 - x^2 = 9 - 9\sin^2\theta = 9(1-\sin^2\theta) = 9\cos^2\theta.$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{9\sin^2\theta \cdot 3\cos\theta\,d\theta}{|3\cos\theta|} = 9\int \sin^2\theta\,d\theta = 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + C = \frac{9}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + C = \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}, \qquad x > \frac{2}{5}.$$

$$\sqrt{25x^2-4} = \sqrt{25\left(x^2 - \frac{4}{25}\right)} = 5\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

$$x = \frac{2}{5}\sec\theta, \qquad dx = \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\,d\theta, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25} = \frac{4}{25}(\sec^2\theta - 1) = \frac{4}{25}\tan^2\theta$$

$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}|\tan\theta| = \frac{2}{5}\tan\theta.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \int \frac{dx}{5\sqrt{x^2-(4/25)}} = \int \frac{(2/5)\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{5\cdot(2/5)\tan\theta} = \frac{1}{5}\int \sec\theta\,d\theta = \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}\right| + C.$$

$I = \frac{1}{5}\cosh^{-1}\left(\frac{5x}{2}\right) + C$

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2}.$$

$$x = 2\tan\theta, \qquad dx = 2\sec^2\theta\,d\theta, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{x}{2}, \qquad x^2 + 4 = 4\tan^2\theta + 4 = 4(\tan^2\theta + 1) = 4\sec^2\theta$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2}. = \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{(4\sec^2\theta)^2} \;=\!=$$ تمرین

تمرین

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2}. = \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(4\sec^2\theta)^2} =$$

تمرین

1. $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{9+y^2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{3\,dy}{\sqrt{1+9y^2}}$

3. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$

4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{8+2x^2}$

5. $\displaystyle\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

6. $\displaystyle\int_0^{1/2\sqrt{2}} \frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

7. $\displaystyle\int \sqrt{25-t^2}\,dt$

8. $\displaystyle\int \sqrt{1-9t^2}\,dt$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-49}}, \quad x > \frac{7}{2}$

10. $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{\sqrt{25x^2-9}}, \quad x > \frac{3}{5}$

11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y^2-49}}{y}\,dy, \quad y > 7$

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y^2-25}}{y^3}\,dy, \quad y >$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$

14. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$

15. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{8\,dw}{w^2\sqrt{4-w^2}}$

18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-w^2}}{w^2}\,dw$

19. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2\,dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

20. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}, \quad x > 1$

22. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^{5/2}}, \quad x > 1$

23. $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x^4}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{8\,dx}{(4x^2+1)^2}$

26. $\displaystyle\int \frac{6\,dt}{(9t^2+1)^2}$

27. $\displaystyle\int \frac{v^2\,dv}{(1-v^2)^{5/2}}$

28. $\displaystyle\int \frac{(1-r^2)^{5/2}}{r^8}\,dr$

29. $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\,dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}$ **30.** $\displaystyle\int_{\ln(3/4)}^{\ln(4/3)} \frac{e^t\,dt}{(1+e^{2t})^{3/2}}$

31. $\displaystyle\int_{1/12}^{1/4} \frac{2\,dt}{\sqrt{t}+4t\sqrt{t}}$ **32.** $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dy}{y\sqrt{1+(\ln y)^2}}$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ **34.** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$

35. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ **36.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx$$ انتگرال های به شکل

حالت اول / اگر m فرد و n زوج باشد

$m = 2k+1$

$$\sin^m x = \sin^{2k+1} x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1-\cos^2 x)^k \sin x.$$

در انتگرال شرکت می دهیم و حل می کنیم

اگر n فرد باشد ←

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1-\sin^2 x)^k \cos x.$$

اگر m و n زوج باشند از روابط زیر استفاده می کنیم

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx = \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\cos^2 x\,dx$$

$$\underline{\underline{\substack{\cos x = u \\ -\sin x\,dx = du}}} \int (u^2-1)u^2\,du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$\int \cos^5 x\,dx. = \int \cos x \cos^4 x\,dx = \int \cos x(1-\sin^2 x)^2\,dx$$

$$\underline{\underline{\sin x = u}} \int (1-u^2)^2\,du = ?$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx.$$

$$\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x)\,dx = \frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x-\int(\cos^2 2x+\cos^3 2x)\,dx\right].$$

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-u^2)\,du = \frac{1}{2}\left(\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)$$

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)+C.$$

$$\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\cos 4x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2\cos^2 2x}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/4}$$

$$\int \tan^4 x\,dx.$$

(حل) $= \int \tan^4 x\,dx = \int \tan^2 x\cdot\tan^2 x\,dx = \int \tan^2 x\cdot(\sec^2 x-1)\,dx$

$$= \int \tan^2 x\sec^2 x\,dx - \int \tan^2 x\,dx = \int \tan^2 x\sec^2 x\,dx - \int(\sec^2 x-1)\,dx$$

$$= \int \underbrace{\tan^2 x\sec^2 x\,dx}_{\int u'u^n dx} - \int \sec^2 x\,dx + \int dx = \frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C.$$

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \tan x\tan^2 x\,dx = \int \tan x(\sec^2 x-1)\,dx$$

$$= \int \underbrace{\tan x\sec^2 x\,dx}_{\int u u' dx} - \int \tan x\,dx = \frac{\tan^2 x}{2}+\ln|\cos x|+c$$

$$\int \sec^3 x\,dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec x\sec^2 x\,dx = \int \sec x\,d(\tan x) = \sec x\tan x-\int \tan x\,d(\sec x)$$

$$= \sec x \tan x - \int (\tan x)(\sec x \tan x\, dx) = \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx$$

$$= \sec x \tan x + \int \sec x\, dx - \int \sec^3 x\, dx.$$

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

$$\int \sin mx \sin nx\, dx, \qquad \int \sin mx \cos nx\, dx, \qquad \text{and} \qquad \int \cos mx \cos nx\, dx$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x].$$

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\, dx$ **2.** $\int_0^{\pi} \sin^5 \frac{x}{2}\, dx$

3. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$ **4.** $\int_0^{\pi/6} 3\cos^5 3x\, dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 y\, dy$ **6.** $\int_0^{\pi/2} 7\cos^7 t\, dt$

7. $\int_0^{\pi} 8\sin^4 x\, dx$ **8.** $\int_0^{1} 8\cos^4 2\pi x\, dx$

9. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 16\sin^2 x \cos^2 x\, dx$ **10.** $\int_0^{\pi} 8\sin^4 y \cos^2 y\, dy$

11. $\int_0^{\pi/2} 35\sin^4 x \cos^3 x\, dx$ **12.** $\int_0^{\pi} \sin 2x \cos^2 2x\, dx$

13. $\int_0^{\pi/4} 8\cos^3 2\theta \sin 2\theta\, d\theta$ **14.** $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \cos^3 2\theta\, d\theta$

15. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

17. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 t}\,dt$

18. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 \theta}\,d\theta$

19. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx$

20. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x-1}\,dx$

21. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta\sqrt{1-\cos 2\theta}\,d\theta$

22. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos^2 t)^{3/2}\,dt$

23. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{0} 2\sec^3 x\,dx$

24. $\displaystyle\int e^x \sec^3 e^x\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^4 \theta\,d\theta$

26. $\displaystyle\int_0^{\pi/12} 3\sec^4 3x\,dx$

27. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^4 \theta\,d\theta$

28. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} 3\csc^4 \frac{\theta}{2}\,d\theta$

29. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} 4\tan^3 x\,dx$

30. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 6\tan^4 x\,dx$

31. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot^3 x\,dx$

32. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} 8\cot^4 t\,dt$

33. $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \sin 3x\cos 2x\,dx$

34. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 2x\cos 3x\,dx$

$I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$ تغییر متغیر $x=\pi-u \Rightarrow \begin{cases} dx=-du \\ x=0\Rightarrow u=\pi \\ x=\pi\Rightarrow u=0\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-u)\sin u}{1+\cos^2 u}(-du)=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-u)\sin u}{1+\cos^2 u}du=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin u}{1+\cos^2 u}du-\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}du}_{I}$$

$$\Rightarrow 2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{1+\cos^2 u}du=-\pi\left(\tan^{-1}(\cos u)\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{2}$$

$$I=\frac{\pi^2}{4}$$

$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx$ $\qquad x=\frac{\pi}{2}-u$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos u)\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2I=I+I=\int^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin x+\ln\cos x)dx=\int^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sin 2x}{}\right)dx$$

$$\Rightarrow 2I = I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin x + \ln \cos x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) - \frac{\pi}{2}\ln(2)$$

از طرفی:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\, dx \xrightarrow{2x = u} \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\, du = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\, du}_{I} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\, du}_{I}\right]$$

با تغییر متغیر $u = \pi - v$

$$= \frac{1}{2}(I + I) = I$$

نتیجه جواب $\Rightarrow 2I = I - \frac{\pi}{2}\ln 2 \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

$$\int_0^{\pi} x \ln \sin x \, dx$$

$x = \pi - u$ (راهنمایی) تمرین

$$\int x(2x + 5)^{-1} dx. = \int \frac{x}{2x+5} dx = \int \frac{\frac{2}{2}x + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}}{2x+5} dx = \int \frac{\left(\frac{1}{2}(2x+5) - \frac{5}{2}\right) dx}{2x+5}$$

$$= \int \frac{1}{2} dx - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{2x+5} = ?$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x + 4}}.$$

$x = t^2$ تمرین درس راه حل اول

راه حل دوم

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{x})^2 + 4}} = 2\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}\, dx}{\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{x})^2 + 4}} = 2\left(-\frac{1}{2}\operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{2}\right| + c\right)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x - 4}}.$$

$$\int \frac{x}{(ax + b)^2} dx.$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}.$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\int x\sin^{-1}x\,dx.$$

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - \int \tan^{n-2}x\,dx$$

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$$

$$\int \sin^n x\cos^m x\,dx = -\frac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2}x\cos^m x\,dx \qquad (n \neq -m).$$

$$\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1}ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}ax\,dx.$$

Nonelementary Integrals

Integrals of functions that do not have elementary antiderivatives are called **nonelementary** integrals.

integrals such as

$$\int \sin x^2\,dx \qquad \int \sqrt{1+x^4}\,dx$$

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad \int e^{(e^x)}\,dx, \quad \int \frac{1}{\ln x}\,dx, \quad \int \ln(\ln x)\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

Improper Integrals

تعریف. انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ را یک انتگرال ناسره می‌نامیم هرگاه :

الف. حداقل یکی از کرانه‌های انتگرال نامتناهی باشد. در این صورت انتگرال را انتگرال ناسره نوع اول می‌گوییم.

ب. $f(x)$ در یک یا چند نقطه $[a,b]$ نامتناهی باشد در این صورت انتگرال را انتگرال ناسره نوع دوم می‌گوییم.

ج) انتگرال ناسره‌ای که هم از نوع اول و هم از نوع دوم باشد، انتگرال ناسره نوع سوم است.

$\int_0^\infty \sin x^2\,dx \longrightarrow$ انتگرال ناسره نوع اول

$\int_0^4 \frac{dx}{x-3} \longrightarrow$ انتگرال ناسره نوع دوم

$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \longrightarrow$ " " نوع سوم

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \longrightarrow$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ زیرا انتگرال معمولی است

تعریف. فرض کنیم تابع f در فاصله $[a,+\infty)$ انتگرال پذیر باشد، در اینصورت $\int_a^\infty f(x)\,dx$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$

اگر حد طرف راست وجود داشته باشد گوییم انتگرال ناسره $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ همگرا است و در غیر این صورت

انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ واگرا است.

فرض کنیم تابع f در فاصله $-\infty < x \leqq a$ انتگرال پذیر باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,dt.$$

اگر حد سمت راست وجود داشته باشد انتگرال همگرا و در غیر اینصورت واگرا است.

به طور مشابه تعریف می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,dt + \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt.$$

به شرط آنکه حدهای سمت راست موجود باشند انتگرال همگرا است.

تذکر مهم: $\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,dt + \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt$ و $\lim_{x\to\infty}\left[\int_{-x}^{a} f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt\right]$

لزوما با هم برابر نیستند

همگرا

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1 \text{ so that } \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} \text{ converges to } 1.$$

$$\int_{-\infty}^{u}\cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^u \cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty}(\sin u - \sin a).$$

چون حد موجود نیست انتگرال واگرا است

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b}{2} = \frac{\pi}{4}$$

اگر $a > 0$ داریم

انتگرال p

$$\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p} \begin{cases} \text{همگرا} & \text{اگر } p>1 \\ \text{واگرا} & \text{اگر } p\leq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^{\infty} e^{-tx}\,dx \begin{cases} \text{همگرا} & \text{اگر } t>0 \\ \text{واگرا} & \text{اگر } t\leq 0 \end{cases}$$

$$\int_{\circ}^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$$

$$\int_{\circ}^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{\circ}^{b} e^{-x}\sin x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{-۱}{۲}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_{\circ}^{b}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{۱}{۲}e^{-b}(\sin b+\cos b)+\frac{۱}{۲}(\circ+۱)\right]=\circ+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\int_{-\infty}^{\circ} e^{۲x}\,dx$$

حل) $$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{\circ} e^{۲x}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\frac{۱}{۲}e^{۲x}\Big|_{a}^{\circ}=\lim_{a\to-\infty}\frac{۱}{۲}(۱-e^{۲a})=\frac{۱}{۲}-\circ=\frac{۱}{۲}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^{۲}-۴x+۹}$$

حل) $$\int\frac{dx}{x^{۲}-۴x+۹}=\int\frac{dx}{(x-۲)^{۲}+۵}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\operatorname{arctg}\frac{x-۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\int_{-\infty}^{\circ}\frac{dx}{x^{۲}-۴x+۹}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{\circ}\frac{dx}{x^{۲}-۴x+۹}=\lim_{a\to-\infty}\frac{۱}{\sqrt{۵}}\operatorname{arctg}\frac{x-۲}{\sqrt{۵}}\Big|_{a}^{\circ}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{-۲}{\sqrt{۵}}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{a-۲}{\sqrt{۵}}\right)\right]=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{-۲}{\sqrt{۵}}\right)-\left(\frac{-\pi}{۲}\right)\right] \quad ①$$

و $$\int_{\circ}^{+\infty}\frac{dx}{x^{۲}-۴x+۹}=\lim_{b\to+\infty}\int_{\circ}^{b}\frac{dx}{x^{۲}-۴x+۹}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\frac{\pi}{۲}-\arctan\left(\frac{-۲}{\sqrt{۵}}\right)\right] \quad ②$$

$$①,② \to \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^{۲}-۴x+۹}=\int_{-\infty}^{\circ}\frac{dx}{x^{۲}-۴x+۹}+\int_{\circ}^{+\infty}\frac{dx}{x^{۲}-۴x+۹}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{۵}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}۳x^{۲}e^{x^{۳}}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}۳x^{۲}e^{x^{۳}}\,dx=\int_{-\infty}^{\circ}۳x^{۲}e^{x^{۳}}\,dx+\int_{\circ}^{+\infty}۳x^{۲}e^{x^{۳}}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\circ}۳x^{۲}e^{x^{۳}}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{\circ}۳x^{۲}e^{x^{۳}}=\lim_{a\to-\infty}e^{x^{۳}}\Big|_{a}^{\circ}=\lim_{a\to-\infty}(۱-e^{a^{۳}})=۱$$

$$\int_{\circ}^{+\infty}۳x^{۲}e^{x^{۳}}\,dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{\circ}^{b}۳x^{۲}e^{x^{۳}}\,dx=\lim_{a\to+\infty}(e^{b^{۳}}-۱)=+\infty$$

$$\int_{0}^{+\infty} 3x^2 e^{x^3} dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{b} 3x^2 e^{x^3} dx = \lim_{a\to+\infty} (e^{b^3}-1) = +\infty$$

آزمون‌های همگرایی

قضیه (آزمون مقایسه). فرض کنیم توابع f و g در فاصله $[a,+\infty)$ انتگرال‌پذیر باشند و در این فاصله $0 \le f(x) \le g(x)$ در این صورت :

الف) اگر $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ همگرا باشد، $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ نیز همگرا است.

ب) اگر $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ واگرا باشد، $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ نیز واگرا است.

مثال. نوع انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ را بررسی کنید.

since $0 < \frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$ and as $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ is convergent

hence $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)} < \infty$ i.e. it is convergent.

مثال. نوع انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$ را بررسی کنید.

it is divergent $\longrightarrow$ واگرا

since on $[1,\infty)$ $\quad \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x^3}} < \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ is divergent (واگرا) $\Longrightarrow \int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$ is divergent

Since $\frac{1}{e^x+1} \le \frac{1}{e^x} = e^{-x}$ and $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ converges, $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+1}$ also converges.

واگرا

Since $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ for $x \ge 2$ and $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x}$ diverges (p integral with $p=1$), $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$ also diverges.

آزمون مقایسه حدی.

فرض کنید برای توابع نامنفی f و g داشته باشیم: $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

الف. اگر $A \ne 0$ آنگاه دو انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ و $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ هم نوع هستند (نه هم مقدار)

ب. اگر $A = 0$ و $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ نیز همگرا است.

پ. اگر $A = \infty$ و اگر $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ واگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ نیز واگرا است.

مثال. نوع انتگرال $\int_{1}^{+\infty} \frac{x\,dx}{3x^4+7x^2+1}$ را بررسی می‌کنیم:

فرض کنیم $f(x)=\frac{x\,dx}{3x^4+7x^2+1}$ و $g(x)=\frac{1}{x^3}$ چون $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{3}\neq 0$ پس دو انتگرال $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ و $\int_{1}^{\infty} g(x)\,dx$ هم نوع هستند اما انتگرال $\int_{1}^{\infty} g(x)\,dx=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^3}$ (p انتگرال با $p>1$) همگراست لذا انتگرال مسئله همگرا است.

همگرائی یا واگرائی انتگرال $\int_{2}^{\infty}\frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+1}}dx$ را بررسی می‌کنیم.

فرض کنیم $f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+1}}$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ چون $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1\neq 0$ پس دو انتگرال $\int_{2}^{\infty} f(x)\,dx$ و $\int_{2}^{\infty} g(x)\,dx$ هم نوع هستند اما انتگرال $\int_{2}^{\infty} g(x)\,dx=\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x}$ واگراست لذا انتگرال مسئله واگرا است.

Let $\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = A$. Then

متناهی

(i) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converges if $p>1$ and A is finite

نامتناهی

(ii) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverges if $p \leqq 1$ and $A \neq 0$ (A may be infinite).

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{4x^4+25} \text{ converges since } \lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{x^2}{4x^4+25}=\frac{1}{4}.$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}} \text{ diverges since } \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}=1.$$

همگرای مطلق و مشروط

همگرای مطلق

Absolute and conditional convergence. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ is called *absolutely convergent* if $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ converges. If $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converges but $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ diverges, then $\int_a^\infty f(x)\,dx$ is called *conditionally convergent*.

همگرای مشروط

Theorem 2. If $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ converges, then $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converges. In words, an absolutely convergent integral converges.

انتگرال $\int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$ همگرای مطلق است (بنابر آزمون مقایسه $\left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{x^2+1}$

انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ همگرای مشروط است زیرا $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ واگرا است زیرا

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{\sin v}{v+n\pi}\,dv \tag{1}$$

Now $\frac{1}{v+n\pi} \geqq \frac{1}{(n+1)\pi}$ for $0 \leqq v \leqq \pi$. Hence,

$$\int_0^\pi \frac{\sin v}{v+n\pi}\,dv \geqq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_9^\pi \sin v\,dv = \frac{2}{(n+1)\pi} \tag{2}$$

Since $\sum_{n=0}^\infty \frac{2}{(n+1)\pi}$ diverges, the series on the right of (*1*) diverges by the comparison test. Hence, $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ diverges and the required result follows.

IMPROPER INTEGRALS OF THE SECOND KIND

اگر تابع f در نقطه a نامتناهی باشد در اینصورت

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$

اگر تابع f در نقطه b نامتناهی باشد

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

نامتناهی متمایز تعریف نشده

Note: Be alert to the word *unbounded*. This is distinct from undefined. For example, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ is a proper integral, since $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ and hence is bounded as $x \to 0$ even though the function is undefined at $x = 0$. In such case the integral on the left of (3) is called convergent or divergent according as the limit on the right exists or does not exist.

سره بنابراین کراندار

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0+} \int_a^{x_0-\epsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0+} \int_{x_0+\epsilon_2}^b f(x)\,dx$$

اگر تابع در نقطه $x_0 \in (a , b)$ نامتناهی باشد

CAUCHY PRINCIPAL VALUE

by choosing $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \int_a^{x_0-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\epsilon}^b f(x)\,dx \right\}$$

$$\int_{-1}^5 \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\epsilon_1 \to 0+} \int_{-1}^{1-\epsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^3} + \lim_{\epsilon_2 \to 0+} \int_{1+\epsilon_2}^5 \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to 0+} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2\epsilon_1^2}\right) + \lim_{\epsilon_2 \to 0+} \left(\frac{1}{2\epsilon_2^2} - \frac{1}{32}\right) \Rightarrow$$ حد موجود نیست

مقدار اصلی کشی $\longrightarrow$ $$\lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \int_{-1}^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1+\epsilon}^5 \frac{dx}{(x-1)^3} \right\} = \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \frac{1}{8} - \frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{2\epsilon^2} - \frac{1}{32} \right\} = \frac{3}{32}$$

آزمون حدی (آزمون مقایسه مشابه با حالت قبل قابل کاربرد است)

1. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ converges if $p < 1$, and diverges if $p \geqq 1$.
2. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ converges if $p < 1$ and diverges if $p \geqq 1$.

Let $\displaystyle\lim_{x \to a+} (x-a)^p f(x) = A$. Then

زمانی که f در a نامتناهی است

(i) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converges if $p < 1$ and A is finite

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverges if $p \geqq 1$ and $A \neq 0$ (A may be infinite).

Let $\displaystyle\lim_{x \to b-} (b-x)^p f(x) = B$. Then

f در b نامتناهی است

$\int_a^b f(x)\,dx$ converges if $p < 1$ and B is finite

$\int_a^b f(x)\,dx$ diverges if $p \geqq 1$ and $B \neq 0$ (B may be infinite).

$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ converges, since $\lim_{x\to 1+} (x-1)^{1/2} \cdot \frac{1}{(x^4-1)^{1/2}} = \lim_{x\to 1+} \sqrt{\frac{x-1}{x^4-1}} = \frac{1}{2}$.

$\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$ diverges, since $\lim_{x\to 3-} (3-x) \cdot \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

. Investigate the convergence of:

(a) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x^3-8)^{2/3}}$ (c) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$ (e) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\cos x)^{1/n}}, n > 1.$

(b $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$ (d) $\int_{-1}^{1} \frac{2^{\sin^{-1} x}}{1-x}\,dx$

Show how to transform the improper integral of the second kind, $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$, into (a) an improper integral of the first kind, (b) a proper integral.

سره

a) Consider $\int_1^{2-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$ where $0 < \epsilon < 1$, say. Let $2-x = \frac{1}{y}$. تمرین

b) Letting $2-x = v^2$ in the integral of (a), it becomes $2\int_{\sqrt{\epsilon}}^{1} \frac{dv}{\sqrt{v^2+2}}$.

Prove that $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ converges.

زیرا $\rightarrow \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = 0 \rightarrow$ با عدد هوپیتال

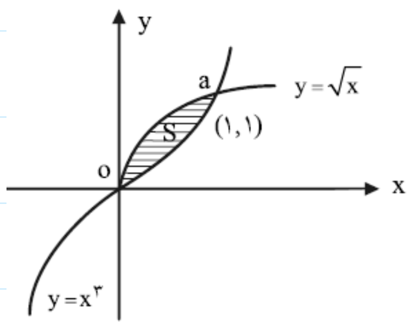
$\lim \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 0$

کاربرد انتگرال

فرض کنیم دو تابع f و g در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشند. مساحت ناحیه بین این دو منحنی در فاصله $[a,b]$ برابر است با :

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

مساحت ناحیه محدود بین دو منحنی $y=x^3$ و $y=\sqrt{x}$ را به دست آورید.



$$\sqrt{x}=x^3 \Rightarrow x=0,1$$

$$\int_0^1 (\sqrt{x}-x^3)\,dx=?$$

اگر توابع $x=f(y)$ و $x=g(y)$ روی فاصله $[c,d]$ پیوسته باشند، آنگاه مساحت ناحیه محدود به این دو منحنی در فاصله $[c,d]$ برابر است با :

$$\int_c^d |f(y)-g(y)|dy$$

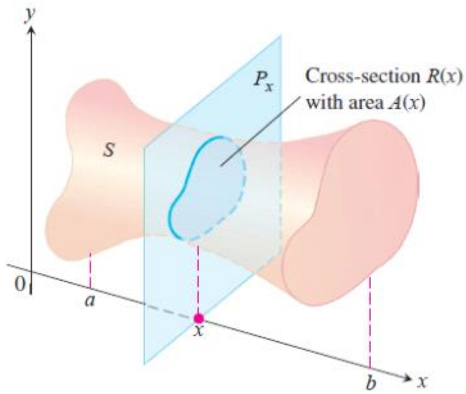
مثال. مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $x=y^3-y^2$ و $x=5y^2$ را به دست آورید.

تمرین

فرض کنیم بخواهیم حجم جسمی که بین صفحات $x=a$ و $x=b$ قرار دارد را که توسط رویه $f(x,y)=0$ از بالا و توسط صفحه xy از پائین محدود است را محاسبه کنیم.

با فرض آنکه مساحت سطح مقطع هر صفحه که بر محور xها در فاصله a تا b عمود باشد را بدانیم لذا اگر مساحت

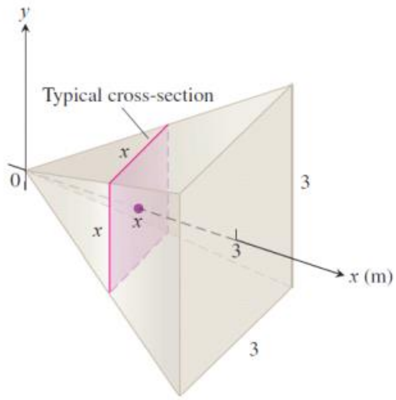
این سطح مقطع در نقطه $x \in [a, b]$ بصورت تابع $A(x)$ بیان‌شود



آنگاه حجم از a تا b برابر است با

$$V = \int_a^b A(x)\, dx.$$

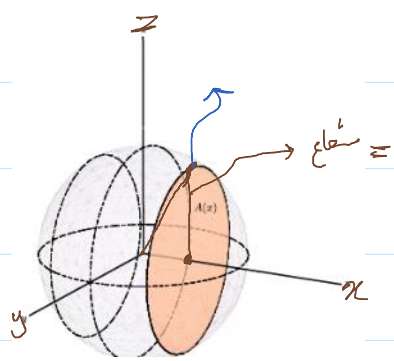
Volume of a Pyramid



$$V = \int_0^3 A(x)\, dx = \int_0^3 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\bigg]_0^3 = 9 \text{ m}^3$$

حجم یک کره به شعاع r را بدست آورید.

فرض کنیم کره طوری قرار گرفته است که مرکز آن در مبدأ مختصات باشد



شعاع $= \sqrt{r^2 - x^2}$

بنابراین سطح مقطع‌ها دایره است

$$\Rightarrow A(x) = \pi (r^2 - x^2)$$

$$\int_{-r}^{r} A(x)\, dx = \frac{4}{3}\pi r^3$$

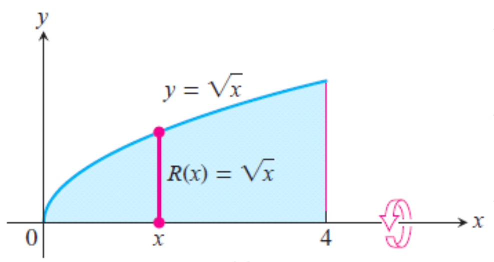
فرض کنیم A ناحیه محدود به نمودار $y = f(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ و محور xها باشد. می‌خواهیم حجم حاصل از دوران این ناحیه حول محور xها را بدست آوریم برای محاسبه این حجم دو روش وجود دارد که عبارتند از روش برشی (روش واشری) و روش لایه‌ای استوانه‌ای

الف) حجم جسم دوار با روش برشی (روش واشری).

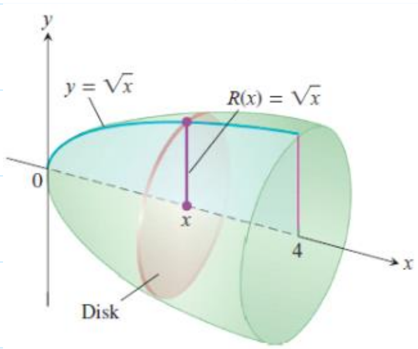
ناحیه A محدود به نمودار $y = f(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ و محور xها را مطابق شکل (آ) در نظر می‌گیریم. با دوران ناحیه A حول محور xها حجمی حاصل می‌شود که آنرا V می‌نامیم. چنانچه $A(x)$ مساحت یك مقطع عرضی در x عمود بر محور xها باشد آنگاه این مقطع عبارت از دایره‌ای به شعاع $|y| = |f(x)|$ خواهد بود و مساحت این مقطع برابر است با $A(x) = \pi y^2 = \pi |f(x)|^2$ بنابراین با بکار بردن فرمول مقدماتی حجم $V = \int_a^b A(x)dx$ فرمول زیر برای حجم حاصل از دوران ناحیه A حول محور xها حاصل می‌شود.

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \pi [R(x)]^2\, dx.$$

حجم حاصل از دوران ناحیه A محدود به منحنی $y = \sqrt{x}$ و خطوط $x = 0$ و $x = 1$ و $y = 0$ حول محور xها را بدست آورید.



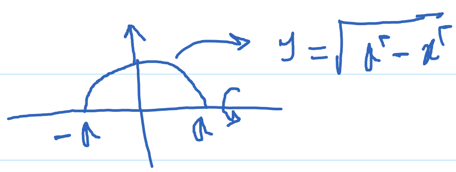
(a)



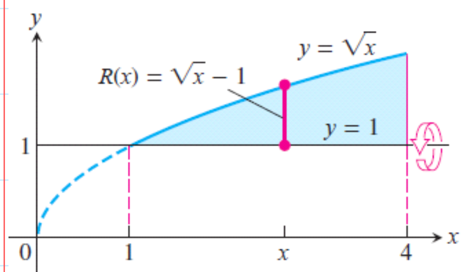
$$V = \int_a^b \pi [R(x)]^2\, dx = \int_0^4 \pi \left[\sqrt{x}\right]^2 dx$$

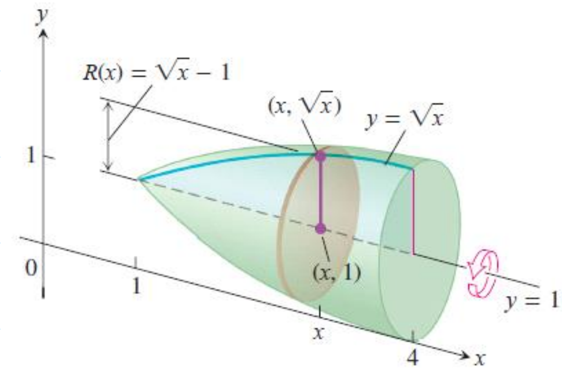
$$= \pi \int_0^4 x\, dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = \pi \frac{(4)^2}{2} = 8\pi.$$

EXAMPLE 5 Volume of a Sphere



حجم حاصل از دوران ناحیه A محدود به منحنی $y = \sqrt{x}$ و خطوط $y = 1, x = 4$

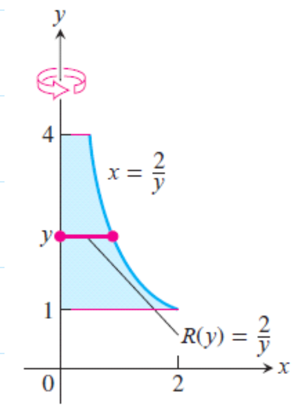


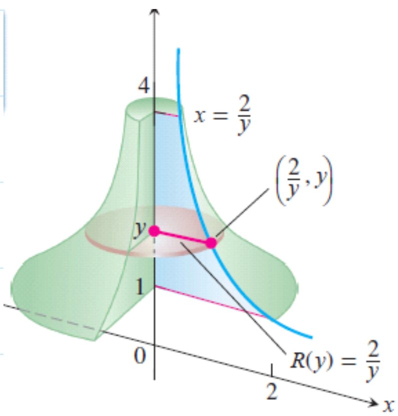


(b)

$$V = \int_1^4 \pi[R(x)]^2\, dx = \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx = \pi \int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right] dx = \frac{7\pi}{6}.$$

EXAMPLE 7 Rotation About the y-Axis

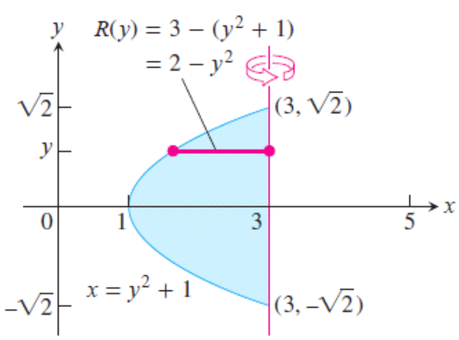


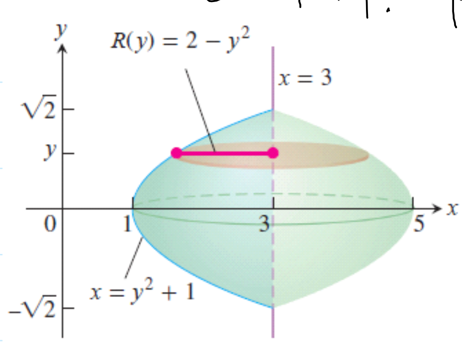


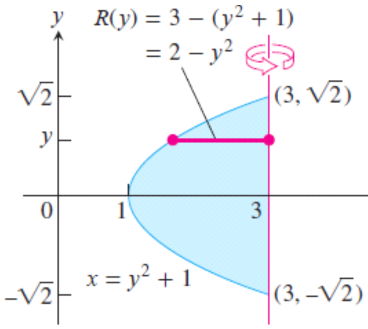
$$V = \int_1^4 \pi[R(y)]^2\, dy = \int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = 3\pi.$$

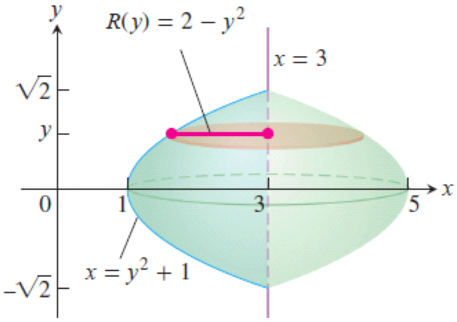
Rotation About a Vertical Axis

نمودار $x = y^2+1$ را حول خط $x=3$ دوران دهیم
حجم جسم حاصل چیست؟







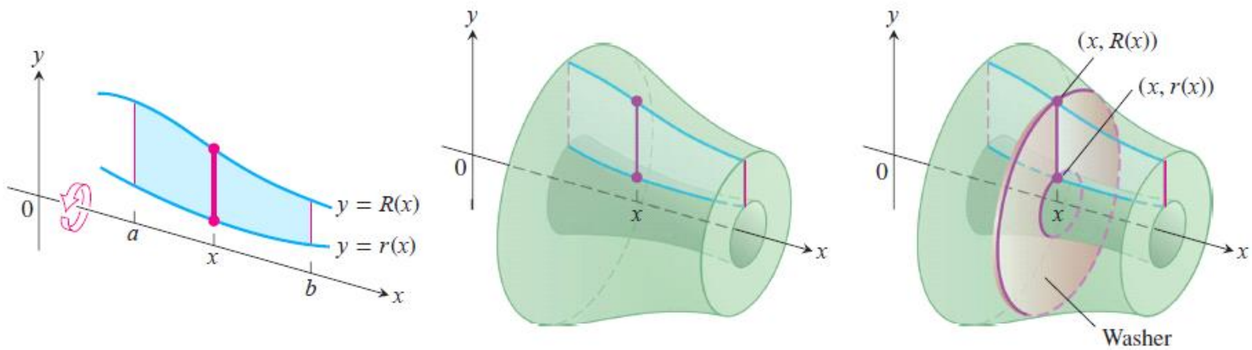


$$V=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\pi[R(y)]^2\,dy=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\pi[2-y^2]^2\,dy=\frac{64\pi\sqrt{2}}{15}.$$

Solids of Revolution: The Washer Method

فرض کنید برای هر $x\in[a,b]$ ، $0\le r(x)\le R(x)$ (مطابق شکل) اگر ناحیه محدود به ۲ تابع را

حول محور x ها دوران دهیم شکل زیر بوجود می‌آید. مساحت واشر برابر $A(x)=\pi(R(x)^2-r(x)^2)$



Outer radius: $R(x)$

Inner radius: $r(x)$

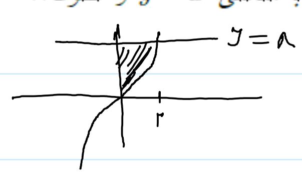
$$A(x)=\pi[R(x)]^2-\pi[r(x)]^2=\pi([R(x)]^2-[r(x)]^2).$$

بنابراین حجم برابر است با

$$V=\int_a^b A(x)\,dx=\int_a^b \pi([R(x)]^2-[r(x)]^2)\,dx.$$

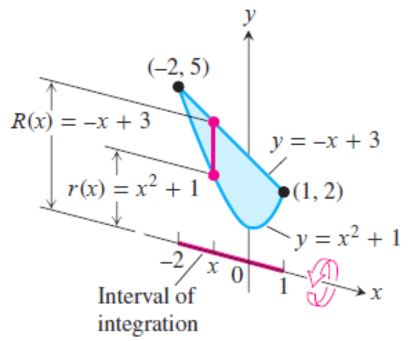
حجم حاصل از دوران ناحیه A محدود به منحنی $y=x^۳$ و خطوط $y=۸$ و $x=۰$ را بدست آورید.

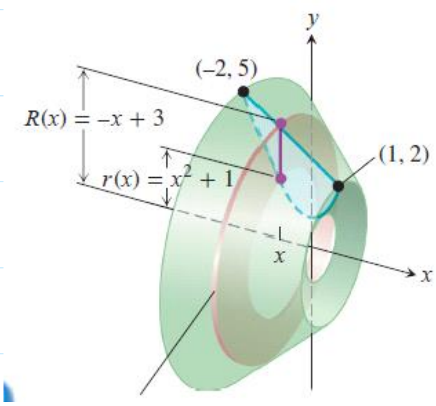
$x^3=8 \Rightarrow x=2$



$$V=\int_۰^۲\pi[۸^۲-(x^۳)^۲]dx=\frac{۷۶۸}{۷}\pi.$$

حجم حاصل از دوران ناحیه A محدود به منحنی $y=x^2+1$ و $y=-x+3$ حول محور x را بدست آورید.



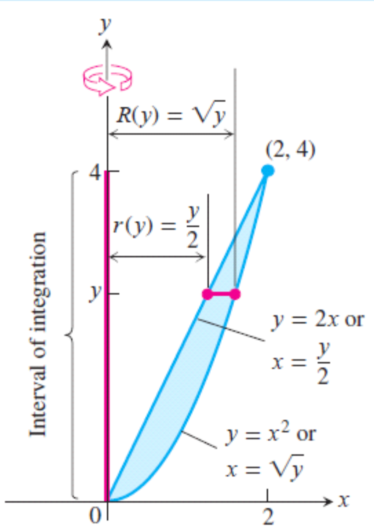


$x^2 + 1 = -x + 3 \implies x = -2, \quad x = 1$

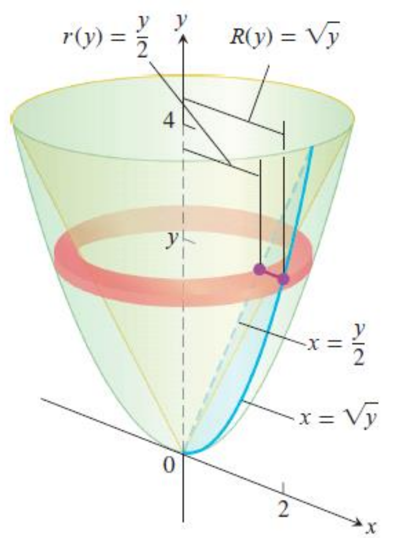
$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\, dx = \int_{-2}^{1} \pi((-x+3)^2 - (x^2+1)^2)\, dx = \frac{117\pi}{5}$$

A Washer Cross-Section (Rotation About the y-Axis)

The region bounded by the parabola $y = x^2$ and the line $y = 2x$ in the first quadrant is revolved about the y-axis to generate a solid. Find the volume of the solid.



(a)



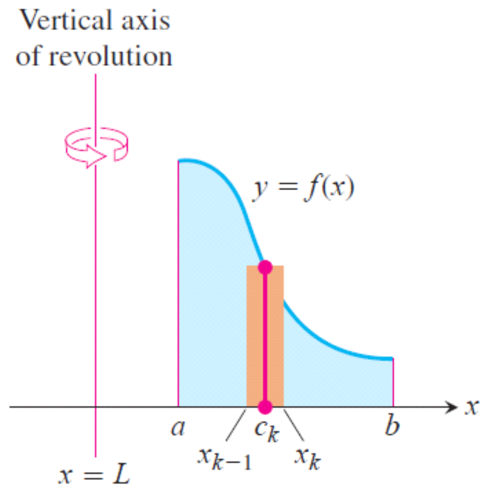
$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\, dy = \int_0^4 \pi\left(\left[\sqrt{y}\right]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right) dy = \frac{8}{3}\pi.$$

Volumes by Cylindrical Shells

روش لایه‌های استوانه‌ای.

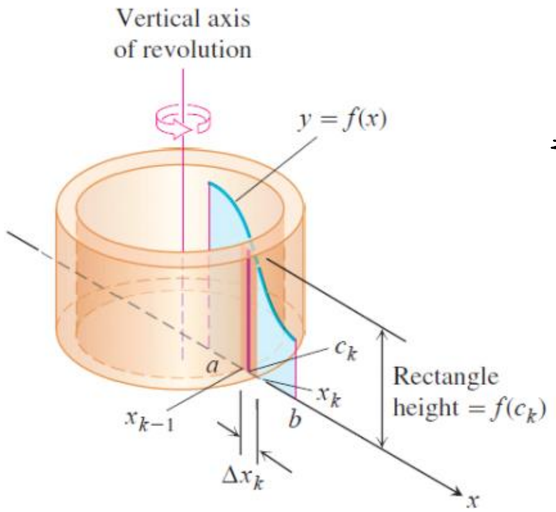
Vertical axis
of revolution

فرض کنید می‌خواهیم تابع $y=f(x)$ را که نمودارش بالای محور



فرض کنید می‌خواهیم تابع $y=f(x)$ را که نمودارش بالای محور عرض‌ها و محدود به بازه $[a,b]$ است، را نسبت به محور $x=L$ که $L<a$ دوران دهیم.

مستطیل مقابل را درون شکل ایجاد می‌کنیم. همزمان با دوران شکل، مستطیل نیز دوران می‌کند و پوسته استوانه‌ای زیر را تشکیل می‌دهد.



حجم این پوسته استوانه‌ای برابر است با

$$\pi(x_k-L)^2 f(c_k)-\pi(x_{k-1}-L)^2 f(c_k)$$

$$=2\pi f(c_k)(c_k-L)\Delta x_k=\Delta V_k$$

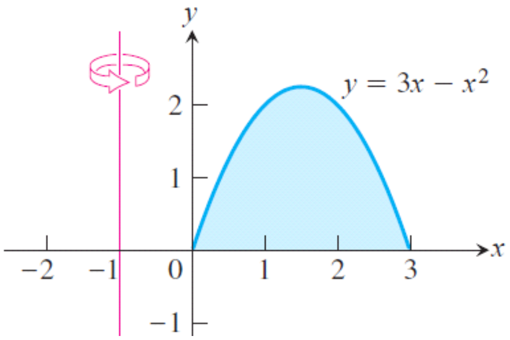
اگر بازه $[a,b]$ را به $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ افراز کنیم در این صورت حجم کل تقریباً برابر $\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k$ خواهد بود

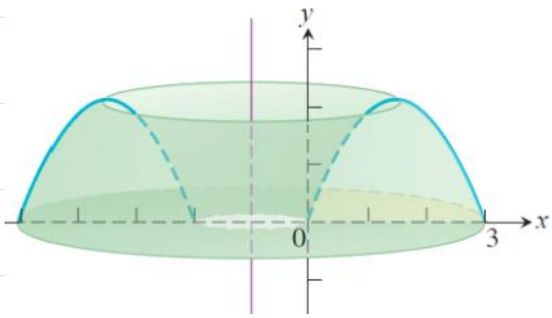
اگر $\|P\|\to 0$ حجم کل برابر خواهد بود با

$$\int_a^b 2\pi(x-L)f(x)\,dx$$

$$V=\int_a^b 2\pi\underbrace{\begin{pmatrix}\text{shell}\\ \text{radius}\end{pmatrix}}_{\text{شعاع}}\underbrace{\begin{pmatrix}\text{shell}\\ \text{height}\end{pmatrix}}_{\text{ارتفاع}}dx.$$

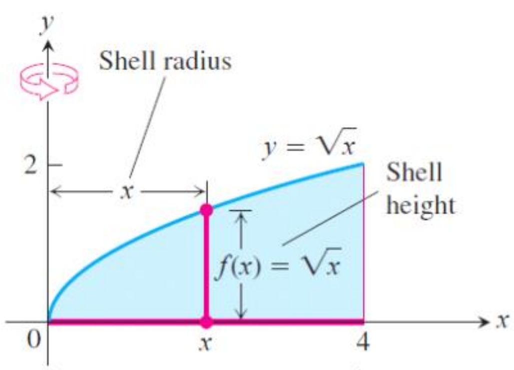
مثال) حجم حاصل از دوران منحنی $y=3x-x^2$ در بازه $[0,3]$ حول محور $x=-1$ را بیابید.

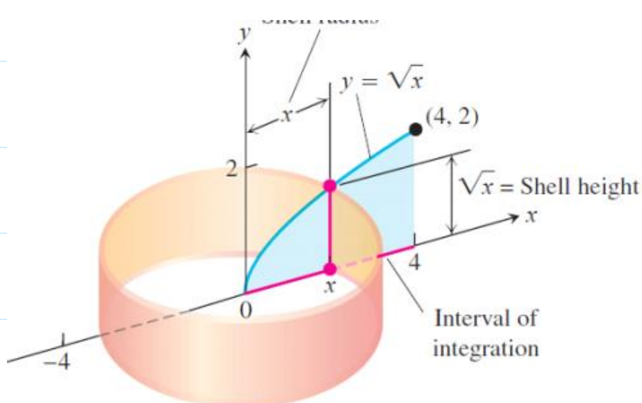




$$V = \int_0^3 2\pi(x + 1)(3x - x^2)\, dx = \frac{45\pi}{2}.$$

حجم حاصل از دوران نمودار $y=\sqrt{x}$ حول محور y ها ($x=0$) را در بازه $[0, 4]$ بیابید.

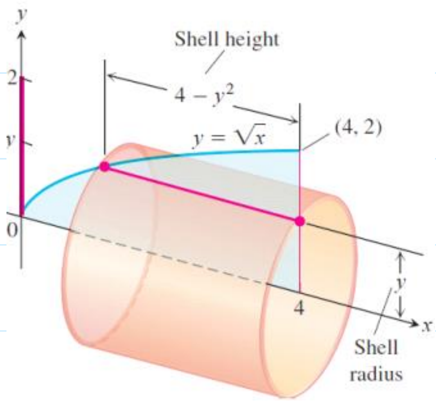




$$V = \int_0^4 2\pi(x)\left(\sqrt{x}\right) dx = \frac{128\pi}{5}.$$

اگر نمودار مثال فوق را حول محور x دوران دهیم حجم را بدست آورید

$$V = \int_0^2 2\pi\underbrace{(y)}_{\text{شعاع}}\underbrace{(4 - y^2)}_{\text{ارتفاع}}\, dy = 8\pi.$$



اگر ناحیه A محدود به منحنی‌های $y_1 = f_1(x)$ از پائین، $y_2 = f_2(x)$ از بالا و خطوط $x = a$ و $x = b$، $(0 \le a < b)$ و $y = 0$ باشد آنگاه حجم حاصل از دوران ناحیه A حول محور yها را می‌توان با تفاضل حجم‌ها بصورت زیر بدست آورد.

$$V = \int_a^b 2\pi\underbrace{x}_{x-0\,=\,\text{شعاع}}\underbrace{[f_2(x) - f_1(x)]}_{\text{ارتفاع}}dx$$

حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین منحنی‌های $y = x^3$ و $x = y^2$ حول محور yها و حول محور xها را با روش لایه‌های استوانه‌ای بدست آورید.

۱. دوران حول محور yها.

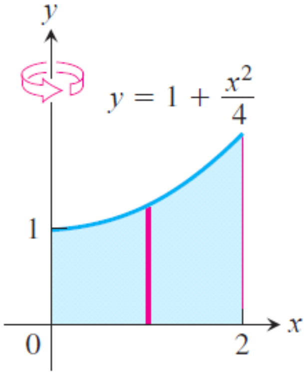
$$V = \int_0^1 2\pi x[\sqrt{x} - x^3]dx = \frac{2\pi}{5}$$

۲. دوران حول محور xها.

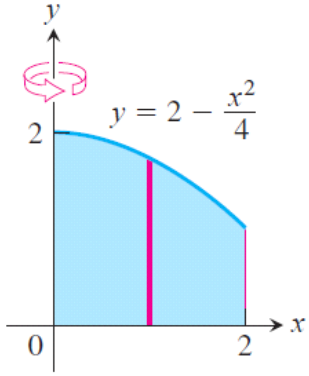
$$V = \int_0^1 2\pi y[\sqrt[3]{y} - y^2]dy = \frac{5\pi}{14}$$

تمرین مطابق شکل دوران دهید و حجم جسم حاصل را بیابید

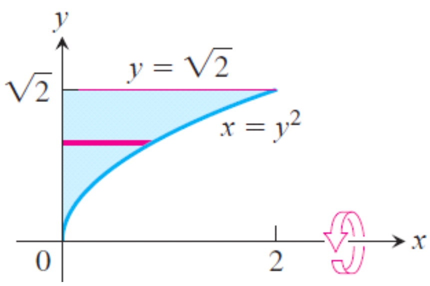
1.



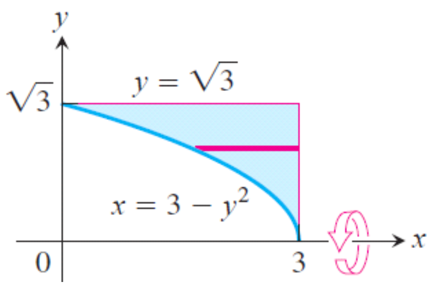
2.



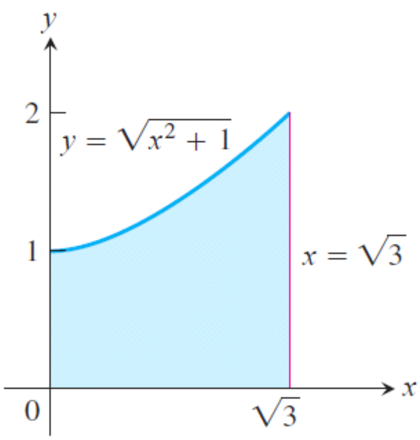
3.



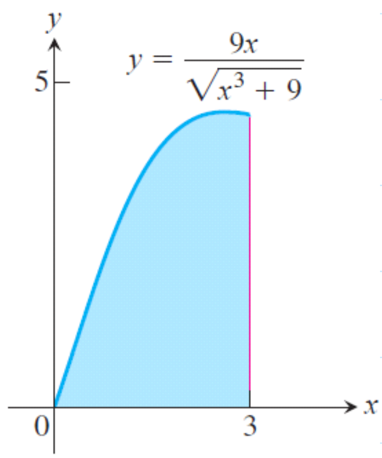
4.



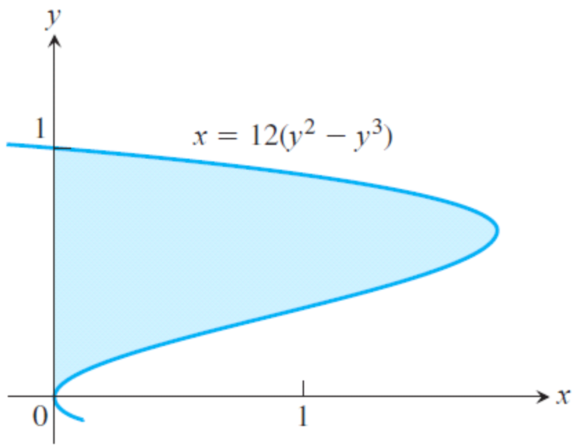
5. The y-axis



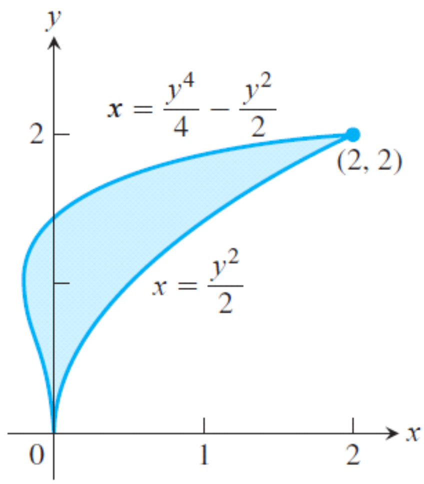
6. The y-axis



تابع داده شده را در بازه مورد نظر حول محور عمودی داده شده دوران دهید و حجم را بدست آورید.



a. The x-axis
b. The line $y = 1$
c. The line $y = 8/5$
d. The line $y = -2/5$

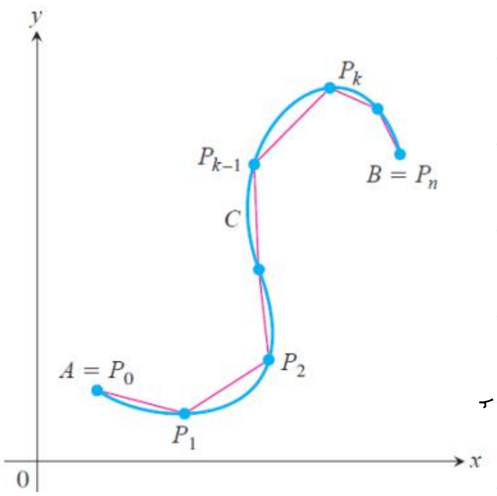


a. The x-axis
b. The line $y = 2$
c. The line $y = 5$
d. The line $y = -5/8$

Length of a Parametrically Defined Curve

Let C be a curve given parametrically by the equations

$$x = f(t) \qquad \text{and} \qquad y = g(t), \qquad a \le t \le b.$$



then **the length of *C*** is

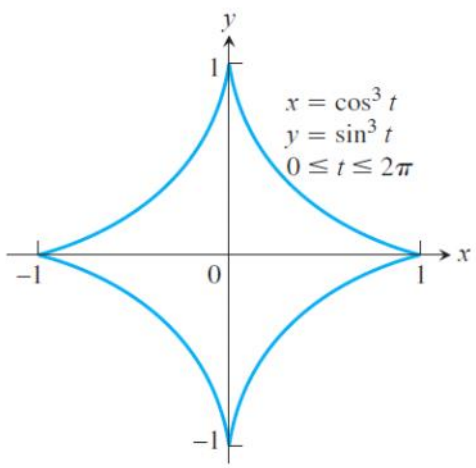
$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

به شرط آنکه f و g مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته در بازه $[a,b]$ باشند و در بازه $[a,b]$ نمودار تکرار نشود.

مثال) طول قوس منحنی $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ را بدست آورید.

$0 \le t \le 2\pi$

ابتدا آنرا بصورت پارامتری تبدیل می‌کنیم $x = \cos^3 t$ و $y = \sin^3 t$



$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1}}$$

$$= \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} = 3\cos t \sin t.$$

$\cos t \sin t \ge 0$ for $0 \le t \le \pi/2$

$\Rightarrow$ طول $= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t\, dt = 6$

Length of a Curve $y = f(x)$

If f is continuously differentiable on the closed interval $[a, b]$, the length of the curve (graph) $y = f(x)$ from $x = a$ to $x = b$ is

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Find the length of the curve

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2} - 1, \qquad 0 \le x \le 1.$$

مقدار محاسبه $(y')^2$ داریم:

بعد از محاسبه $(y')^2$ داریم :

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x}\, dx = \frac{13}{6}$$

اگر y' در نقطه‌ای از دامنه y موجود نباشد می‌توانیم طول منحنی را به عنوان تابعی از x بر حسب y بدست آوریم

Formula for the Length of $x = g(y)$, $c \le y \le d$

If g is continuously differentiable on $[c, d]$, the length of the curve $x = g(y)$ from $y = c$ to $y = d$ is

$$\int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

Example: Find the length of the curve $y = (x/2)^{2/3}$ from $x = 0$ to $x = 2$.

مشتق $y' = \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x}}$ در $x = 0$ تعریف نشده است. x را بر حسب y

بدست آوریم : $x = 2y^{\frac{3}{2}}$ داریم $x' = 3\sqrt{y}$

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\, dy = \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 2.27.$$

تمرین) طول منحنی‌های زیر را بیابید

7. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$ from $x = 0$ to $x = 3$
8. $y = x^{3/2}$ from $x = 0$ to $x = 4$
9. $x = (y^3/3) + 1/(4y)$ from $y = 1$ to $y = 3$
   (*Hint:* $1 + (dx/dy)^2$ is a perfect square.)
10. $x = (y^{3/2}/3) - y^{1/2}$ from $y = 1$ to $y = 9$
    (*Hint:* $1 + (dx/dy)^2$ is a perfect square.)
11. $x = (y^4/4) + 1/(8y^2)$ from $y = 1$ to $y = 2$
    (*Hint:* $1 + (dx/dy)^2$ is a perfect square.)
12. $x = (y^3/6) + 1/(2y)$ from $y = 2$ to $y = 3$
    (*Hint:* $1 + (dx/dy)^2$ is a perfect square.)
13. $y = (3/4)x^{4/3} - (3/8)x^{2/3} + 5, \quad 1 \le x \le 8$
14. $y = (x^3/3) + x^2 + x + 1/(4x + 4), \quad 0 \le x \le 2$
15. $x = \int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1}\, dt, \quad -\pi/4 \le y \le \pi/4$
16. $y = \int_{-2}^x \sqrt{3t^4 - 1}\, dt, \quad -2 \le x \le -1$

Areas of Surfaces of Revolution

سطح جانبی حاصل از دوران یك منحنی

فرض کنیم $y = f(x)$، $a \leq x \leq b$، یك تابع مشتق‌پذیر و مثبت و دارای مشتق پیوسته باشد، سطح جانبی حاصل از دوران $y = f(x)$، $a \leq x \leq b$ حول محور xها بوسیله فرمول زیر بدست می‌آید

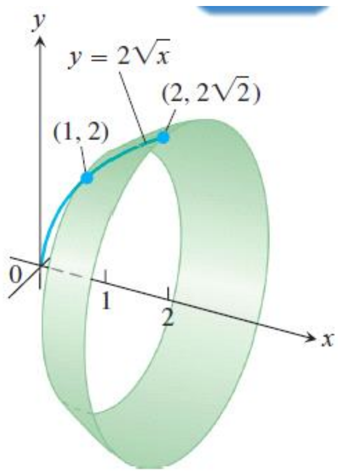
$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

$dA = ۲\pi$(شعاع دوران)(عنصر دیفرانسیل طول قوس) عنصر دیفرانسیل سطح جانبی

در حالتی که دوران یك منحنی حول محور yها صورت گیرد سطح جانبی حاصل از دوران این منحنی با تعویض متغیرهای x و y بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$A = \int_a^b ۲\pi x \sqrt{۱ + (\frac{dx}{dy})^۲}\, dx$$

مساحت جانبی رویه حاصل از دوران منحنی $y = ۲\sqrt{x}$، $۱ \leq x \leq ۲$ حول محور xها را بدست آورید.

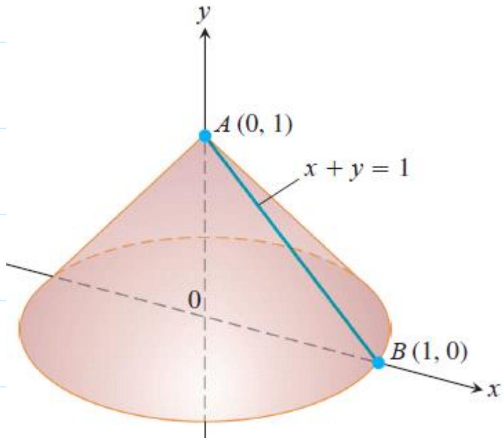


$$a = 1, \quad b = 2, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}.$$

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\, dx = 4\pi \int_1^2 \sqrt{x+1}\, dx = \frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right).$$

The line segment $x = 1 - y, 0 \leq y \leq 1$, is revolved about the y-axis to generate a cone. find its surface



$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 2\pi(1-y)\sqrt{2}\, dy$$

$$= \pi\sqrt{2}.$$

Surface Area of Revolution for Parametrized Curves

If a smooth curve $x = f(t), y = g(t), a \le t \le b$, is traversed exactly once as t increases from a to b, then the areas of the surfaces generated by revolving the curve about the coordinate axes are as follows.

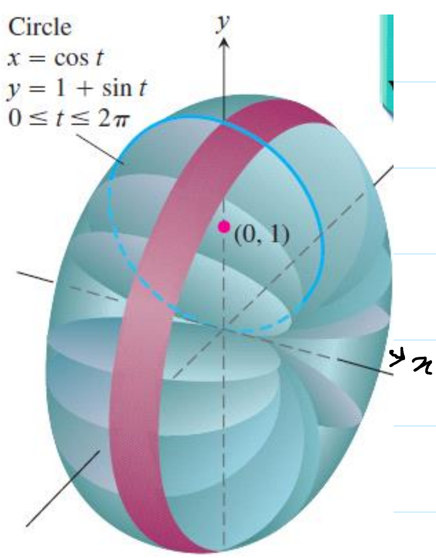
1. Revolution about the x-axis ($y \ge 0$):

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (5)$$

2. Revolution about the y-axis ($x \ge 0$):

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (6)$$

دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز (۱و۰) را حول محور x دوران می‌دهیم تا شکل زیر بدست آید. مساحت رویه را بیابید



$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y - 1 = \sin t \Rightarrow y = \sin t + 1 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\pi(1 + \sin t)\sqrt{\underbrace{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}_{1}}\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 + \sin t)\, dt = 2\pi\Big[t - \cos t\Big]_0^{2\pi} = 4\pi^2$$

INFINITE SEQUENCES AND SERIES

DEFINITION Infinite Sequence

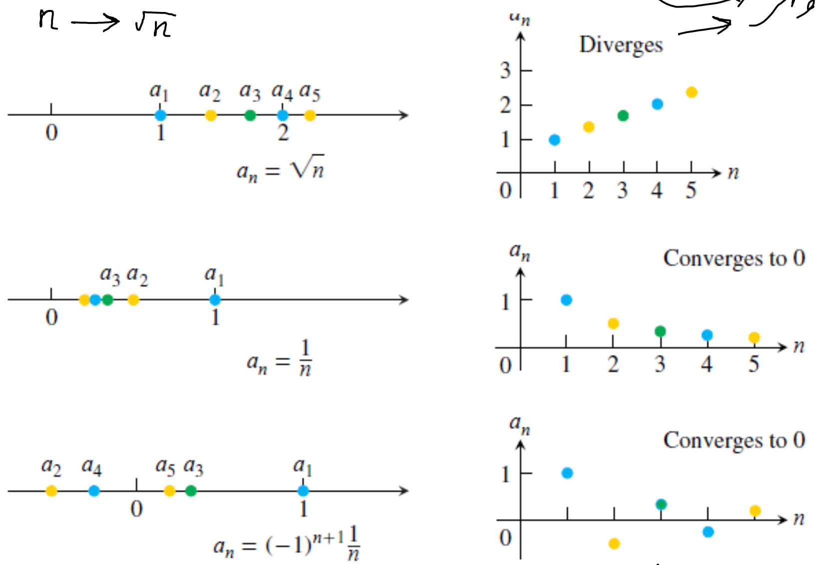
دنباله نامتناهی

تعریف : یک دنباله روی $\mathbb{R}$ هر تابعی با دامنه اعداد طبیعی است یعنی

هر تابع به شکل $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ معمولاً $f(n)$ را با f_n نشان می‌دهیم

$$a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow \sqrt{n}$$

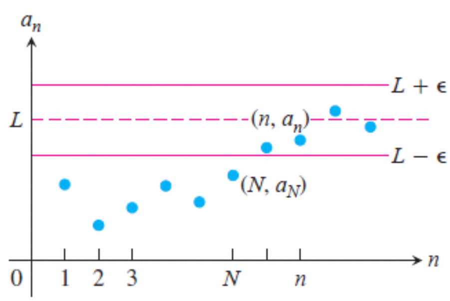
واگراست



همگرا به صفر

$$a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

قضیه : اگر و فقط اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = L$



$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, m \in \mathbb{N} \;\; s.t \;\; if \;\; n \geq m \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

به عبارت دیگر می‌گوییم حد دنباله $\{a_n\}$ برابر با L است

و می‌نویسیم $a_n \longrightarrow L$ ، هرگاه به ازای هر

همسایگی حول L ، تمامی جملات دنباله به جز تعداد متناهی داخل این همسایگی باشند

Show that

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ **(b)** $\lim_{n\to\infty} k = k$

↳ ? $1/2$

DEFINITION Diverges to Infinity

The sequence $\{a_n\}$ **diverges to infinity** if for every number M there is an integer N such that for all n larger than N, $a_n > M$. If this condition holds we write

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{or} \qquad a_n \to \infty.$$

Similarly if for every number m there is an integer N such that for all $n > N$ we have $a_n < m$, then we say $\{a_n\}$ **diverges to negative infinity** and write

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{or} \qquad a_n \to -\infty.$$

THEOREM 1

Let $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ be sequences of real numbers and let A and B be real numbers. The following rules hold if $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ and $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

1. *Sum Rule:* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
2. *Difference Rule:* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$
3. *Product Rule:* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
4. *Constant Multiple Rule:* $\lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$ (Any number k)
5. *Quotient Rule:* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$ if $B \neq 0$

THEOREM 2 The Sandwich Theorem for Sequences

Let $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, and $\{c_n\}$ be sequences of real numbers. If $a_n \leq b_n \leq c_n$ holds for all n beyond some index N, and if $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, then $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ also.

از اندیسی به بعد

(a) $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$ because $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\cos n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$;

(b) $\dfrac{1}{2^n} \to 0$ because $0 \leq \dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$;

(c) $(-1)^n \dfrac{1}{n} \to 0$ because $-\dfrac{1}{n} \leq (-1)^n \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n}$.

Example: If $b_n = \left[\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}\right]$, find $\lim_{n\to\infty} b_n$

Evidently $\dfrac{n}{(2n)^2} \leq b_n \leq \dfrac{n}{n^2}$, for each $n \in \mathbb{N}$.

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Ex. If $b_n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, show that $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$

Ex. show that i) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} = 0$, ii) $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \infty$

تعریف : دنباله $\{a_n\}$ را صعودی گوییم هرگاه برای هر n، $a_n \leq a_{n+1}$ و آن را نزولی گوییم هرگاه برای هر n، $a_n \geq a_{n+1}$.

دنباله $\{a_n\}$ را کراندار می‌گوییم هرگاه $M>0$ موجود باشد که برای هر n، $|a_n| \leq M$

آن را از بالا کراندار گوییم هرگاه برای هر n، $a_n \leq M$ و آن را از پایین کراندار گوییم هرگاه برای هر n، $a_n \geq M$.

دنباله $\{a_n\}$ را کشی می‌نامیم هرگاه برای هر $\varepsilon>0$، $n_0 \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که برای هر $m,n \geq n_0$، $|a_n - a_m| < \varepsilon$

قضیه :

۱) هر دنباله همگرا، کراندار است (عکس برقرار نیست، چرا؟)

۲) هر دنباله صعودی و از بالا کراندار، همگرا است.

۳) هر دنباله نزولی و از پایین کراندار، همگرا است.

قضیه : اگر برای هر n، $a_n < b_n$ و $a_n \to a$ و $b_n \to b$ در اینصورت $a \leq b$

(مثال از دنباله‌هایی بیاورید که در شرایط فوق صدق کنند و $a=b$.)

قضیه : فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد در اینصورت $\lim_{x\to a} f(x) = L$

اگر و تنها اگر برای هر دنباله $\{a_n\}$ که $a_n \neq a$ و $a_n \to a$،

اگر و فقط اگر برای هر دنباله $\{a_n\}$ که $a_n \neq a$ و $a_n \to a$ ،

$f(a_n) \to L$

اگر $a_n = \frac{n+1}{n}$, $f(x) = \frac{2x + [-x]}{x^2 - 1}$، آن‌گاه دنباله‌ی $f(a_n)$ به چه عددی همگرا است؟

حل: دنباله $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی و همگرا به عدد یک است (دقت کنید که اگر $f(x) = \frac{x+1}{x}$ آنگاه این تابع در بازه $(0, +\infty)$ نزولی است زیرا در این بازه $f'(x) < 0$) (راه دیگر: $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ پس به‌وضوح دنباله $\{a_n\}$ نزولی است) در واقع a_n از طریق مقادیر بیشتر از 1 به 1 میل می‌کند. لذا برای یافتن حد $f(a_n)$ کافیست حد راست تابع فوق را بیابیم $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$ بنابراین $f(a_n) \to 1$

قضیه: فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}$ و $f: E \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. تابع f در نقطه $a \in E$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر دنباله $\{a_n\}$ که $a_n \to a$ ، $f(a_n) \to f(a)$

Show that $\sqrt{(n+1)/n} \to 1$.

$\frac{n+1}{n} \to 1$ و تابع $\sqrt{x}$ در یک پیوسته است

کادامنه

لذا $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to \sqrt{1} = 1$

The Sequence $\{2^{1/n}\} \to 1$

$1/n \to 0 \Rightarrow 2^{1/n} \to 2^0 = 1$

l'Hôpital's Rule

THEOREM 4

Suppose that $f(x)$ is a function defined for all $x \geq n_0$ and that $\{a_n\}$ is a sequence of real numbers such that $a_n = f(n)$ for $n \geq n_0$. Then

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Show that $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

حل: با استفاده از قاعده هوپیتال،

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

Find $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n}$.

$\lim \quad 2^x \qquad \lim \quad 2^x \ln 2$

Find $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\,}{5n}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{5} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = ?$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = e^2$$

since

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} = 2$$

Commonly Occurring Limits

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \qquad (x > 0)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad (|x| < 1)$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad (\text{any } x)$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad (\text{any } x)$

مثال

(a) $\frac{\ln(n^2)}{n} = \frac{2\ln n}{n} \to 2 \cdot 0 = 0$

(b) $\sqrt[n]{n^2} = n^{2/n} = (n^{1/n})^2 \to (1)^2 = 1$

(c) $\sqrt[n]{3n} = 3^{1/n}(n^{1/n}) \to 1 \cdot 1 = 1$

(d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$

(e) $\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n \to e^{-2}$

(f) $\frac{100^n}{n!} \to 0$

قضیه: اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ در اینصورت $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) = L$

حاصل حد $\lim b_n$ وقتی

$$b = \left\{ \frac{1}{\;} + \frac{1}{\;} + \dots + \frac{1}{\;} \right\} = \sum^{n} \frac{1}{\;}$$

$$b_n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

را بیابید.

Let $a_k = \frac{n}{\sqrt{n^2+k}}$, $k = 1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

بنابراین بنابر قضیه فوق

$$\lim b_n = \lim \frac{\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}}{n} = 1$$

تمرین) نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right] = \infty$$

$$\lim \frac{1}{n} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right] = 0$$

$$\lim \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right] = 0$$

قضیه) اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جملات مثبت باشد که به عدد مثبت L همگرا است در اینصورت

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} = L$$

نشان دهید $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$$(n)^{\frac{1}{n}} = \left(1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1} \right)^{\frac{1}{n}}$$

چون $\lim \frac{n}{n-1} = 1$ لذا حاصل حد فوق بنابر قضیه بالا برابر 1 است.

حاصل حد $\lim \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{\dots}$ را بیابید

$\qquad\qquad$ ۲n + ۱

حل) می‌دانیم $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$ لذا

$$\left\{\left(\frac{۲}{۱}\right)^1\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲\left(\frac{۴}{۳}\right)^۳\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} \longrightarrow e$$

یا $\frac{n+1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \to e$ بنابراین $\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n+1} \to \frac{1}{e}$

تذکر: چون $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}} = \infty$ پس $\frac{n}{(n!)^{1/n}} \longrightarrow e$

Stirling's approximation $\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}$ for large values of n.

$a_n = \frac{2^n3^n}{n!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{n!} = 0$

$a_n = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!} = \frac{۲n!\,(۲n+۳)(\overset{۲}{\cancel{۲n+۲}})(۲n+1)}{n!\,\cancel{(n+1)}} \longrightarrow \infty$

$۲n! = ۲n(۲n-1)(۲n-۲)\cdots(۲n-n)!$

مثال) حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(۲n+1)!}{n!}}$ را بیابید. تمرین تحویلی

جواب $\frac{۴}{e}$

$(۲n)!^{\frac{1}{۲n}} \simeq \frac{۲n}{e}$ راهنمایی) از تقریب استرلینگ استفاده کنید

Suppose that $f(x)$ is differentiable for all x in $[0, 1]$ and that $f(0) = 0$. Define the sequence $\{a_n\}$ by the rule $a_n = nf(1/n)$. Show that $\lim_{n\to\infty} a_n = f'(0)$.

$a_n = n\tan^{-1}\frac{1}{n} = ?$ $\qquad f(x) = tg^{-1}x \Rightarrow f'(0) = ?$

$a_n = n \tan^{-1} \frac{1}{n} =$ $f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(0) = 1$

$a_n = n(e^{1/n} - 1) =$

$a_n = n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) =$

دنباله‌های بازگشتی

دنباله‌های بازگشتی دنباله‌هایی هستند که هر جمله دنباله را می‌توان از جمله قبلی و یا جملات قبلی بدست آورد.

مثال: دنباله اعداد صحیح را می‌توان بصورت بازگشتی چنین نوشت:

$a_1 = 1$ and $a_n = a_{n-1} + 1$

مثال: دنباله $a_1 = 1$ and $a_n = n \cdot a_{n-1}$ نشان دهنده چه دنباله‌ای است؟

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6,\ a_4 = 24,\ \dots,\ a_n = n!$

مثال: دنباله $a_1 = 1, a_2 = 1,$ and $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ را دنباله فیبوناچی Fibonacci می‌نامند

$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

مثال: حاصل $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}}$ را بدست آورید.

قرار می‌دهیم $a_1 = \sqrt{2}$ و $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. نشان می‌دهیم دنباله $\{a_n\}$ همگرا است.
بدین منظور نشان می‌دهیم صعودی و از بالا کران‌دار است.

$a_1 = \sqrt{2} < 2$ let $a_k < 2$ then $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{4} = 2$

پس 2 کران بالا است. نشان می‌دهیم صعودی است.

$a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$. Let $a_k < a_{k+1}$ then $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k}$

$< \sqrt{2 + a_{k+1}} = a_{k+2} \Rightarrow$ دنباله صعودی است

$< \sqrt{2+a_{k+1}} = a_{k+2} \Rightarrow$ دنباله صعودی است

چون صعودی و از بالا کران دار است پس همگرا است $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ فرض کنید. با حد گرفتن

از طرفین دنباله داریم $L = \sqrt{2+L}$ لذا $L^2 - L - 2 = 0$

$$\begin{cases} L_1 = 2 \\ L_2 = -1 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

Infinite Series

سری‌های نامتناهی

فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله باشد. قرار می‌دهیم

$s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, ... , $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, ...

به دنباله s_n دنباله مجموع جزئی دنباله $\{a_n\}$ گوییم.

اگر دنباله s_n همگرا باشد حد همگرایی آن را با نماد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نشان می‌دهیم و آن را یک سری نامتناهی می‌نامیم. اگر دنباله $\{s_n\}$ همگرا باشد سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرا گوییم و اگر حد s_n موجود نباشد و یا به بینهایت میل کند $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را واگرا گوییم. بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

سری تلسکوپی) نشان دهید

$$\sum_{k=m}^{n} f(k+1) - f(k) = f(n+1) - f(m)$$

مثال)

$$\sum_{k=m}^{n} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) = \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2n+3}$$

اگر به جای k قرار دهید $k+1$ باید جمله بعدی بدست آید.

Find the sum of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

حل: می‌دانیم $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow \text{تمرین}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} \longrightarrow \text{تمرین}$$

Geometric Series (سری هندسی)

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \qquad |r| < 1.$$

If $|r| \geq 1$, the series diverges.

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} = \frac{a}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/9}{1-(1/3)} = \frac{1}{6}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = \frac{5}{1+(1/4)} = 4.$$

قضیه: اگر $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim a_n = 0$ (عکس قضیه برقرار نیست)

$n \to \infty$

برهان :

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$$

تذکر: شرط لازم برای همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ این است که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ diverges because $n^2 \to \infty$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ diverges because $\frac{n+1}{n} \to 1$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ diverges because $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ does not exist

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ diverges because $\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+5} = -\frac{1}{2} \neq 0.$

If $\sum a_n = A$ and $\sum b_n = B$ are convergent series, then

1. *Sum Rule:* $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$
2. *Difference Rule:* $\sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$
3. *Constant Multiple Rule:* $\sum k a_n = k \sum a_n = kA$ (Any number k).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} = \frac{1}{1-(1/2)} - \frac{1}{1-(1/6)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 8$$

If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converges for any $k > 1$ and

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

Reindexing

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h}$$

h اضافه شده   h کم شده

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h}$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = ?$$ با استفاده از سری تلسکوپی

$$\sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = ?$$

تمرین) حاصل سری‌های زیر را بدست آورید.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n}$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right)$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{1/n}} - \frac{1}{2^{1/(n+1)}}\right)$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan^{-1}(n) - \tan^{-1}(n+1)\right)$

مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$ را بیابید

حل)

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{2}$$

مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ را حساب کنید.

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{k+1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

حاصل $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$ را بدست آورید.

حل)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k^2(k-1)^2} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} = 1$$

حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+3n-2}$ را بدست آورید.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) \to \frac{1}{6}$$

(اصل عمومی همگرایی کشی). شرط لازم و کافی برای همگرایی سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ آن است که برای هر $\epsilon > 0$، عدد صحیح و مثبت n موجود باشد بطوریکه برای هرعدد صحیح p، $p > 1$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon$$

The Harmonic Series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

نشان دهید سری همساز واگرا است.

فرض کنید $a_n = \frac{1}{n}$. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه برای $\epsilon = \frac{1}{2}$، باید عدد صحیح nی موجود باشد بطوریکه برای هر عدد صحیح $p \geq 1$.

$$\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| < \frac{1}{2}$$

برای $n = m$ و $p = m$ داریم

$$\frac{۱}{m+۱} + \frac{۱}{m+۲} + \ldots + \frac{۱}{m+m} \geq \frac{m}{۲m} = \frac{۱}{۲}$$

(آزمون انتگرال کُشی - مک لورن). اگر f تابعی نزولی نامنفی و بر $[۱, \infty)$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f(n)$ و انتگرال $\int_۱^{\infty} f(x)dx$ هردو همگرا یا هر دو واگرا هستند.

سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ همگراست اگر و فقط اگر $p > ۱$.

همگرایی سری‌های مقابل را بررسی کنید

$$(b)\ \sum_1^{\infty} \frac{n}{n^2+1};\quad (c)\ \sum_2^{\infty} \frac{1}{n\ln n};\quad (d)\ \sum_1^{\infty} n e^{-n^2}.$$

محک تراکم کشی

Cauchy's Condensation Criterion. Suppose that $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$. Then the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent if and only if the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$

is convergent.

تمرین: هرگاه $P > ۱$، $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n(\log n)^P}$ همگراست و اگر $P \leq ۱$ واگراست

حل) $\sum_{n=1}^{\infty} ۲^n \frac{۱}{۲^n (\log ۲^n)^P} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{۱}{(n \log ۲)^P} = \frac{۱}{(\log ۲)^P} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^P}$

(آزمون مقایسه). فرض کنید برای هر $n \geq m$ که m عددی ثابت، مثبت و صحیح است، $۰ \leq a_n \leq b_n$. در این صورت

الف) اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

ب) اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ نیز واگرا است.

EXAMPLE. Since $\frac{1}{2^n+1} \leqq \frac{1}{2^n}$ and $\sum \frac{1}{2^n}$ converges, $\sum \frac{1}{2^n+1}$ also converges.

EXAMPLE. Since $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ and $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverges, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ also diverges.

آزمون مقایسه حدی

The Limit-Comparison or Quotient Test for series of non-negative terms.

(*a*) If $u_n \geqq 0$ and $v_n \geqq 0$ and if $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$ or ∞, then Σu_n and Σv_n either both converge or both diverge.

(*b*) If $A = 0$ in (*a*) and Σv_n converges, then Σu_n converges.

(*c*) If $A = \infty$ in (*a*) and Σv_n diverges, then Σu_n diverges.

Let $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = A$. Then

(*i*) Σu_n converges if $p > 1$ and A is finite.

(*ii*) Σu_n diverges if $p \leqq 1$ and $A \neq 0$ (A may be infinite).

EXAMPLES. 1. $\sum \frac{n}{4n^3-2}$ converges since $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{n}{4n^3-2} = \frac{1}{4}$.

2. $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ diverges since $\lim_{n\to\infty} n^{1/2} \cdot \frac{\ln n}{(n+1)^{1/2}} = \infty$.

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}$, (*b*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$, (*c*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+3}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$

از آزمون مقایسه نیز میتوان استفاده کرد

$e^{n^2} > n^2 \Rightarrow e^{-n^2} < \frac{1}{n^2}$

$n^2 e^{-n^2} \longrightarrow 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$.

$\lim_{n\to\infty} n^3 \sin^3\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را متناوب گوئیم اگر جملات a_n یك درمیان مثبت و منفی شود

قضیه اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری متناوب باشد و اگر $|a_n|$ نزولی و $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$,

در اینصورت سری همگرا است

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}$, (*b*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln^2 n}$, (*c*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^2}$.

کدام یک همگرا است؟

Ratio test. Let $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L$. Then the series Σu_n

آزمون نسبت

(*a*) converges (absolutely) if $L < 1$

(*b*) diverges if $L > 1$.

If $L = 1$ the test fails.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2^{n+1} + 5)/3^{n+1}}{(2^n + 5)/3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1} + 5}{2^n + 5} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2 + 5 \cdot 2^{-n}}{1 + 5 \cdot 2^{-n}}\right) \to \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}.$$

چون $\frac{2}{3} < 1$ پس سری همگرا است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$$

If $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$, then $a_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$ and

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} \to 4.$$

پس سری واگرا است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n n! n!} = \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \to 1.$$

پس از این آزمون نمی‌توان استفاده کرد.

مثال) اگر $a_n = nq^n$ آنگاه $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ برابر است با $\frac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n} = q + \frac{q}{n}$

بنابراین $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to |q|$. لذا بنابر آزمون نسبت اگر $|q|<1$ در اینصورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ همگرا است و $\lim_{n\to\infty} nq^n = 0$. از طرفی برای $|q|<1$ ثابت می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(q-1)^2}$$ (تمرین)

مثال) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}-1)^2} = 2$$

آزمون ریشه

The *n*th root test. Let $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$. Then the series Σu_n

(a) converges (absolutely) if $L < 1$

(b) diverges if $L > 1$

The *n*th root test. Let $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$. Then the series Σu_n

(*a*) converges (absolutely) if $L < 1$

(*b*) diverges if $L > 1$.

If $L = 1$ the test fails.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \text{ converges because } \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} \to \frac{1}{2} < 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \text{ diverges because } \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to \frac{2}{1} > 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n \text{ converges because } \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n}\right)^n} = \frac{1}{1+n} \to 0 < 1.$$

Let $a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ odd} \\ 1/2^n, & n \text{ even.} \end{cases}$ Does $\sum a_n$ converge?

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{n}/2, & n \text{ odd} \\ 1/2, & n \text{ even.} \end{cases} \qquad \frac{1}{2} \le \sqrt[n]{a_n} \le \frac{\sqrt[n]{n}}{2}.$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2$ by the Sandwich Theorem.

همگرایی سری های زیر را بررسی کنید

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{1.25^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{2^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(n^3)$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n+1)!}{3^n n!}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{(n/2)}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \ln n}{n(n+2)!}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}$

27. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{n} a_n$

28. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\tan^{-1} n}{n} a_n$

29. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3n-1}{2n+5} a_n$

30. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$

31. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2}{n} a_n$

32. $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$

33. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$

34. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n+\ln n}{n+10} a_n$

35. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$

36. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = (a_n)^{n+1}$

37. $a_n = \frac{2^n n! n!}{(2n)!}$

38. $a_n = \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{(n^2)}}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{4^n 2^n n!}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{[2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)](3^n+1)}$

Raabe's test. Let $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{u_n+1}{u_n}\right|\right) = L$. Then the series Σu_n

(a) converges (absolutely) if $L > 1$

(b) diverges or converges conditionally if $L < 1$.

If $L = 1$ the test fails.

This test is often used when the ratio tests fails.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \Rightarrow 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+1} = \frac{-1}{2} < 1 \Rightarrow$$ سری واگرا است

Test for convergence $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot4}{3\cdot6}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\ldots(3n)}\right)^2 + \cdots$.

The ratio test fails since $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2 = 1$. However, by Raabe's test,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} n\left\{1 - \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2\right\} = \frac{4}{3} > 1$$ and so the series converges.

آزمون لگاریتم.

اگر $\sum a_n$ یک سری با جملات مثبت باشد و $\lim\left(n \log \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = L$

در اینصورت اگر $L > 1$ سری همگرا است و اگر $L < 1$ سری واگرا است.

مثال همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ را بررسی کنید.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{e} \longrightarrow 1$$

بنابراین از آزمون نسبت نمی‌توان استفاده کرد. از طرفی چون $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ از آزمون ریشه نیز نمی‌توان استفاده نمود. حال اگر از آزمون لگاریتم استفاده کنیم داریم:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot e \Rightarrow n \log \frac{a_n}{a_{n+1}} = n \log\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot e\right) = n\left[1 - n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

در فصل سری‌ها، توانی نشان می‌دهیم حاصل این حد برابر $\frac{1}{2}$ است.

بنابراین سری داده شده واگرا است.

گوییم سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگراست اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد.

قضیه: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

برای $x \in \mathbb{R}$ رفتار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ را بررسی کنید.

حل) $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \Longrightarrow$ سری داده همگرای مطلق ولذا همگرا است.

رفتار سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{2^n+5}$ را بررسی کنید. تمرین

تعریف: اگر یک سری نامتناهی همگرا باشد ولی همگرای مطلق نباشد، آن را همگرای مشروط می‌نامیم. سری‌های $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ و $\sum (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$ نمونه‌هایی از سری‌های همگرای مشروط می‌باشند

آزمون آبل: اگر b_n دنباله‌ای مثبت و نزولی اکید باشد و اگر $\sum a_n$ همگرا باشد در اینصورت $\sum a_n b_n$ نیز همگرا خواهد بود.

مثال) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ همگرا است زیرا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است و دنباله $\{\frac{1}{\log n}\}$ مثبت و نزولی است.

صورت دیگر: اگر $\sum a_n$ همگرا باشد و دنباله $\{b_n\}$ کراندار و یکنوا باشد در اینصورت $\sum a_n b_n$ همگرا است.

مثال) همگرایی سری $\sum \frac{(n^3+1)^{\frac{1}{3}}-n}{\log n}$ را بررسی کنید.

حل) $\sum \left[(n^3+1)^{\frac{1}{3}}-n\right]$ همگرا است زیرا

$(n^3+1)^{\frac{1}{3}}$ n 1

حل) $\left[(n^3+1)^{\frac{1}{3}}-n\right]$ همگرا است زیرا

$$(n^3+1)^{\frac{1}{3}}-n=\frac{1}{(n^3+1)^{\frac{2}{3}}+(n^3+1)^{\frac{1}{3}}n+n^2}$$

بنابراین سری بنابر آزمون مقایسه حدی با ($p=2$) همگرا است.

از طرفی $b_n=\frac{1}{\log n}$ دنباله‌ای نزولی و کران دار است. پس سری داده شده بنابر آزمون آبل همگرا است.

مثال) نشان دهید سری $1-\frac{1}{3\times2^2}+\frac{1}{5\times3^2}-\frac{1}{7\times4^2}+\cdots$ همگرا است.

حل) فرض کنید $\sum a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ و $b_n=\frac{1}{2n-1}$.

آزمون دیریکله: اگر $\{b_n\}$ دنباله‌ای مثبت و نزولی اکید با حد صفر باشد و اگر $\sum a_n$ یک سری باشد که دنباله مجموع های جزئی اش، $\{S_n\}$، کران دار است، در این صورت $\sum a_n b_n$ همگرا است.

مثال) دنباله $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ بنابر آزمون دیریکله همگرا است.

مثال) همگرایی سری های $i)\ \sum\frac{\cos n\theta}{n^{\alpha}}$ و $ii)\ \sum\frac{\sin n\theta}{n^{\alpha}}$ را بررسی کنید.

حل (i): می‌دانیم $\theta\neq 0,2m\pi$ و

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{\cos\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

بنابراین S_n کران دار است یعنی $\sum\cos n\theta$ دارای دنباله مجموع جزئی کران دار است.

از طرفی اگر $\alpha>0$، $\frac{1}{n^{\alpha}}\to 0$ بنابراین بنابر آزمون دیریکله وقتی $\theta\neq 0,2m\pi$ سری برای $\alpha>0$ همگرا است. توجه کنید که اگر $\alpha\leq 0$ سری واگرا است.

اگر $\theta=0$ یا $2m\pi$ سری به $\sum\frac{1}{n^{\alpha}}$ تبدیل می‌شود که برای $\alpha>1$ همگرا و برای $\alpha\leq 1$ واگرا است.

حل (ii) تمرین $\theta\neq 0,2m\pi$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\sin\left[\frac{(n-1)\theta}{2}\right]\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$n \quad k=1 \qquad \sin\frac{\theta}{2}$

تمرین) همگرایی سری زیر را بررسی کنید

$$\sum\left\{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right\}\cos n\theta$$

$$\sum\left\{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right\}\sin^2 n\theta$$

سری‌های توانی

سری توانی حول

A **power series about $x = 0$** is a series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots.$$

حول

A **power series about $x = a$** is a series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

in which the **center** a and the **coefficients** $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ are constants.

که در آن — ضرایب — ثابت

EXAMPLE A Geometric Series

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots.$$

سری فوق برای $|x|<1$ همگرا به $\frac{1}{1-x}$ است بنابراین:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad -1 < x < 1.$$

اگر دنباله‌ی مجموع جزئی سری فوق را بنویسیم داریم:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad -1 < x < 1.$$

اگر دنباله‌ی مجموع جزئی سری فوق را بنویسیم داریم:

$s_1 = 1$ و $s_2 = 1 + x$

$s_3 = 1 + x + x^2$ و ... و $s_n = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$ و ...

پس می‌بینیم که در بازه $(-1,1)$ تابع

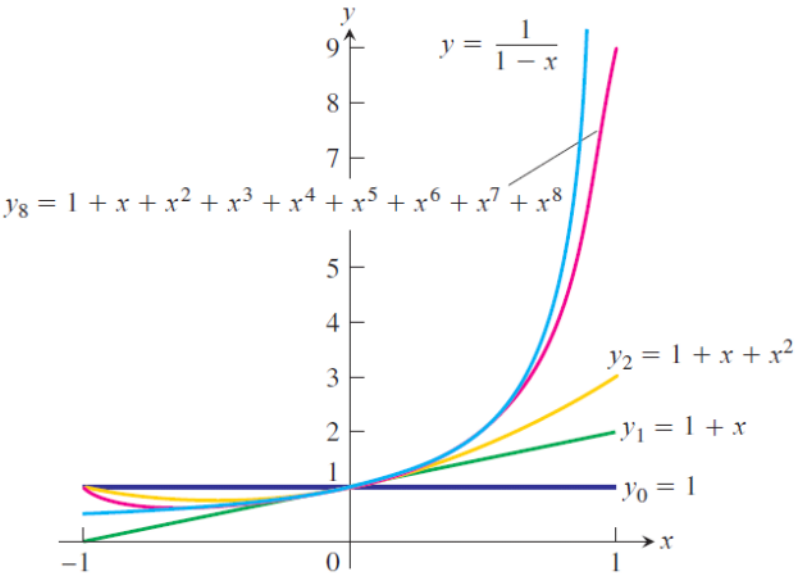
پیوسته $\frac{1}{1-x}$ حد دنباله‌ای

از چندجمله‌ای‌ها است یعنی

می‌توانیم در صورت نیاز این تابع

را با یک چندجمله‌ای با ضرایب ثابت

تقریب بزنیم.



The power series

$$1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots$$

$a = 2, c_0 = 1, c_1 = -1/2, c_2 = 1/4, \ldots, c_n = (-1/2)^n.$

a geometric series with first term (جمله) 1 and ratio (قدرنسبت) $r = -\dfrac{x-2}{2}$.

$\left|\dfrac{x-2}{2}\right| < 1$ or $0 < x < 4$. The sum is

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 + \frac{x-2}{2}} = \frac{2}{x},$$

For what values of x do the following power series converge?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$

حل) $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{n}{n+1}|x| \to |x|.$

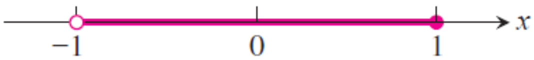
بنابر آزمون نسبت اگر $|x|<1$ سری همگرای مطلق و اگر $|x|>1$ سری واگرا است.

بنابر آزمون نسبت اگر $|x|<1$ سری همگرای مطلق و اگر $|x|>1$ سری واگرا است.

وقتی $|x|=1$ یا $x=\pm 1$ داریم:

if $x=1 \Rightarrow$ the series is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ which converges

if $x=-1 \Rightarrow$ " " " $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ which diverges

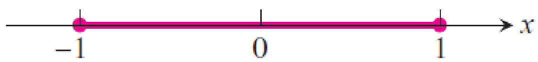


پس بازه همگرایی بازه $(-1,1]$ است

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2n-1}{2n+1}x^2 \rightarrow x^2.$$

سری برای $x^2<1$ همگرا و $x^2>1$ واگرا است از طرفی بررسی کنید که سری در $x=1,-1$ همگرا است



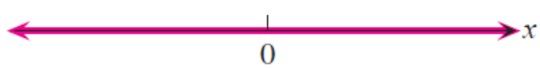
پس بازه همگرایی $[-1,1]$ است

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \text{ for every } x.$$

بنابر آزمون نسبت چون $0<1$

برای تمام $x\in R$، سری همگرا است



(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x| \rightarrow \infty \text{ unless } x = 0.$$

THEOREM

If the power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ converges for $x = c \neq 0$, then it converges absolutely for all x with $|x| < |c|$. If the series diverges for $x = d$, then it diverges for all x with $|x| > |d|$.

تذکر: با توجه به قضیه فوق در مورد سری‌های توانی که در حالت کلی به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ می‌باشند، سه حالت خواهیم داشت. یا سری فقط در نقطه $x=a$ همگرا است یا همه‌جا در $\mathbb{R}$ همگرا است و یا در یک بازه به مرکز $x=a$ و شعاع R همگرا است. که در حالت اخیر R را شعاع همگرایی سری می‌نامیم. بنابراین

The convergence of the series $\sum c_n (x-a)^n$ is described by one of the following three possibilities:

1. There is a positive number R such that the series diverges for x with $|x - a| > R$ but converges absolutely for x with $|x - a| < R$. The series may or may not converge at either of the endpoints $x = a - R$ and $x = a + R$.
2. The series converges absolutely for every x ($R = \infty$).
3. The series converges at $x = a$ and diverges elsewhere ($R = 0$).

For what values of x do the following series converge?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}$, تمرین

Then the *interval of convergence* is $-3 \leqq x < 3$. The series diverges outisde this interval.
Note that the series converges absolutely for $-3 < x < 3$. At $x = -3$ the series converges conditionally.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, تمرین

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-a)^n$, تمرین

$$(d)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}.$$

حل)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(3n-1)(x-1)}{2n(3n+2)}\right| = \left|\frac{x-1}{2}\right| = \frac{|x-1|}{2}$$

Thus, the series converges for $|x-1| < 2$ and diverges for $|x-1| > 2$.

For $x = 3$ the series becomes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$, which diverges

For $x = -1$ the series becomes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n-1}$, which also diverges

تمرین) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+n)^n}{n!} x^n$ حتماً بررسی شود.

(راهنمایی: به مثال آزمون لگاریتم مراجعه کنید)

مثال) بازه همگرایی سری مقابل را بیابید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n}$$

حل) $\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|x+2|}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow |x+2|$

پس اگر $|x+2|<1$ یعنی $-3<x<-1$ آنگاه سری همگرای مطلق است و برای مقادیری از x که

$|x+2|>1$، سری واگرا است. برای $|x+2|=1$ یا $x=-1$ و $x=-3$ داریم

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{converges}$$

$$x=-3 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverges}$$

پس بازه همگرایی عبارت است از $(-3, -1]$

بازه همگرایی و شعاع همگرایی سری‌های زیر را مشخص کنید.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

5. $\sum \frac{(x-2)^n}{10^n}$

6. $\sum (2x)^n$

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}\, 3^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^n}{3^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+5)^n$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+\pi)^n}{\sqrt{n}}$

32. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n} - 1)^n$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4n}$

34. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{9^n}$

35. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n$

36. $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

37. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$

38. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$

Abel's limit theorem.

If $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converges at $x = x_0$, which may be an interior point or an endpoint of the interval of convergence, then

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \lim_{x \to x_0} a_n x^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

If x_0 is an end point, we must use $x \to x_0+$ or $x \to x_0-$

The Term-by-Term Differentiation Theorem

اگر سری $\sum c_n(x-a)^n$ برای $R-a<x<R+a$ همگرا باشد، برای هر x در این بازه

تابع $f:(R-a,R+a)\to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

این تابع در دامنه تعریف خود یعنی بازه $(R-a,R+a)$ مشتق پذیر از هر مرتبه است

مشتق اول و دوم آن عبارتند از

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(c_n(x-a)^n\right)$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-a)^{n-2},$$

Find series for $f'(x)$ and $f''(x)$ if

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad -1 < x < 1$$

Solution

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \qquad -1 < x < 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}, \qquad -1 < x < 1$$

تذکر: مشتق گیری جمله به جمله ممکن است برای سری های غیرتوانی درست نباشد

به عنوان مثال سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^2}$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^2}\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(n!x)}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cos(n!x)}{n^2}$$

زیرا سری سمت چپ نامساوی برای هر x همگرا است و مشتق آن موجود است.

اما سری سمت راست واگرا است. پس عمل مشتق گیری از سری عبور نکرد.

Term-by-Term Integration

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ converges for $a - R < x < a + R$ $(R > 0)$. Then

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}$ converges for $a - R < x < a + R$ and

$$\int f(x)\,dx = \int\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int c_n(x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1} + C$$

for $a - R < x < a + R$.

Example: Identify the function $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \qquad -1 \le x \le 1.$

حل: مشتق می‌گیریم داریم:

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \qquad -1 < x < 1.$$

سری هندسی با قدر نسبت $r = -x^2$ لذا:

$$f'(x) = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

حال انتگرال می‌گیریم

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

حال انتگرال می‌گیریم

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C.$$

در $x=0$ ، $f(0)=0$ بنابراین $C=0$ لذا

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \tan^{-1} x, \qquad -1 < x < 1.$$

مثال) یک سری برای تابع $f(x)=\ln(1+x)$ و $-1<x\leq 1$ بنویسید

حل) می‌دانیم $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots$ و $-1<x<1$ به جای x قرار دهید $-x$:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1-x+x^2-x^3+\cdots \quad , \quad -1<x<1$$

بنابراین

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+x}\,dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \Big]_0^z$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \qquad -1<z<1$$

تذکر: می‌توان نشان داد که در نقطه $z=1$ ، سری به $\ln(2)$ همگرا است یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$$

مثال) مقدار حد $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[1-n\cdot\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ را بیابید.

حل) با توجه به بسط $\ln(1+x)$ در بازه $(-1,1)$ ،

$$\lim a_n = \lim n\left[1-n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots\right)\right] = \lim n - n + \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{4n^2} + \cdots = \frac{1}{2}$$

مقدار سری $s(x) = \frac{x^2}{1\times 2} + \frac{x^3}{2\times 3} + \ldots + \frac{x^n}{(n-1)n} + \ldots$ را بیابید.

$$s'(x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n-1}\cdots \qquad s''(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$s'(۰) = ۰, \quad s''(x) = \frac{۱}{۱-x} \qquad -1 < x < 1$$

بنابر اولین قضیه حساب دیفرانسیل انتگرال

$$s'(x) = \int_۰^x s''(x)dx = \int_۰^x \frac{dt}{۱-t} = -\ln(۱-x)$$

$$s(x) = \int_۰^x -\ln(۱-t)dt = (۱-x)\ln(۱-x) + x$$

تمرین

نشان دهید $\ln(\frac{۱+x}{۱-x}) = ۲(x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} + \cdots)$ برای $|x| < ۱$

If $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ and $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge absolutely for $|x| < R$, and

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

then $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converges absolutely to $A(x)B(x)$ for $|x| < R$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Multiply the geometric series $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ by itself to get a power series for $1/(1-x)^2$, for $|x| < 1$.

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1-x)$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1-x)$$

$$c_n = \underbrace{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_k b_{n-k} + \cdots + a_n b_0}_{n+1 \text{ terms}} = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ ones}} = n + 1.$$

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

Taylor and Maclaurin Series

If a function $f(x)$ has derivatives of all orders on an interval I, can it be expressed as a power series on I?

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$
$$f''(x) = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a) + 3\cdot 4a_4(x-a)^2 + \cdots$$
$$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a)^2 + \cdots,$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \text{a sum of terms with } (x-a) \text{ as a factor}.$$

$$f'(a) = a_1,$$
$$f''(a) = 1\cdot 2a_2, \implies a_2 = \frac{f''(a)}{2}$$
$$f'''(a) = 1\cdot 2\cdot 3a_3, \implies a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

$$f^{(n)}(a) = n!a_n. \implies a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

اگر تابع f در همسایگی از نقطه a بینهایت بار مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه بسط تیلور تابع f در نقطه a یا سری تیلور تابع f در نقطه a عبارت است از

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots.$$

سری مکلورن تابع f عبارت است از

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,$$

که همان سری تیلور تابع f در نقطه $a=0$ است.

مثال) سری تیلور تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نقطه $a=2$ بیابید. به ازای چه مقادیری از x، سری به $\frac{1}{x}$ همگرا است.

$$f(x) = x^{-1}, \qquad f(2) = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \qquad f'(x) = -x^{-2}, \quad f'(2) = -\frac{1}{2^2},$$

$$f''(x) = 2!x^{-3}, \qquad \frac{f''(2)}{2!} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}, \qquad f'''(x) = -3!x^{-4}, \quad \frac{f'''(2)}{3!} = -\frac{1}{2^4},$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}, \qquad \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}, \qquad \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

$$f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \cdots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \cdots.$$

این سری یک سری هندسی با قدر نسبت $-\frac{(x-2)}{2}$ است بنابراین سری برای $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$ یا $0<x<4$ همگرا به $\frac{1/2}{1+(x-2)/2} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{x}$. است.

سری مکلورن تابع $f(x)=e^x$ را نوشته و شعاع همگرائی سری را نیز بدست آورید.

حل) چون $f^{(n)}(x)=e^x$ پس $f^{(n)}(0)=1$ بنابراین سری مکلورن تابع نمائی عبارت است از

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

حال چون $\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$ پس سری برای هر $x\in\mathbb{R}$ همگرا است.

نتیجه: برای هر عدد حقیقی x، $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$.

در این مثال، همانطور که در ادامه نشان خواهیم داد، سری تیلور تابع با خود تابع برابر است. اما در حالت کلی همواره اینطور نیست یعنی توابعی هستند که سری تیلور آنها با خود تابع برابر نیست به عنوان مثال

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$f^{(n)}(0) = 0$ for all n $\Rightarrow$ Taylor series generated by f at $x=0$ is

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$
$$= 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \cdots + 0\cdot x^n + \cdots = 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots.$$

The series converges for every x (its sum is 0) but converges to $f(x)$ only at $x=0$.

Taylor Polynomial of Order n

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Taylor Polynomials for $\cos x$ at $x=0$

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

these polynomials approximate $f(x) = \cos x$ near $x = 0$.

سری تیلور هریک از توابع زیر را در نقطه داده شده بیابید.

1. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

2. $f(x) = \ln(1+x), \quad a = 0$

3. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$

4. $f(x) = 1/(x+2), \quad a = 0$

5. $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/4$

6. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/4$

7. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$

8. $f(x) = \sqrt{x+4}, \quad a = 0$

Find the Maclaurin series for the functions in Exercises 9–20.

9. e^{-x}

10. $e^{x/2}$

11. $\dfrac{1}{1+x}$

12. $\dfrac{1}{1-x}$

13. $\sin 3x$

14. $\sin \dfrac{x}{2}$

Quadratic Approximations

The Taylor polynomial of order 2 generated by a twice-differentiable function $f(x)$ at $x = a$ is called the **quadratic approximation** of f at $x = a$. In Exercises 33–38, find the **(a)** linearization (Taylor polynomial of order 1) and **(b)** quadratic approximation of f at $x = 0$.

33. $f(x) = \ln(\cos x)$

34. $f(x) = e^{\sin x}$

35. $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$

36. $f(x) = \cosh x$

37. $f(x) = \sin x$

38. $f(x) = \tan x$

1. For what values of x can we normally expect a Taylor series to converge to its generating function?
2. How accurately do a function's Taylor polynomials approximate the function on a given interval?

یادآوری از قضیه مقدار میانگین: اگر $f(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق پذیر باشد
در اینصورت $c \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

THEOREM 22 Taylor's Theorem

If f and its first n derivatives $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ are continuous on the closed interval between a and b, and $f^{(n)}$ is differentiable on the open interval between a and b, then there exists a number c between a and b such that

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}.$$

Taylor's Formula

If f has derivatives of all orders in an open interval I containing a, then for each positive integer n and for each x in I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x), \quad (1)$$

where

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1} \quad \text{for some } c \text{ between } a \text{ and } x. \quad (2)$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

مثال) به ازای c مناسبی بین x تا 0 داریم

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + R_3(x)$$

که در آن $R_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-0)^4$ که برابر است با $\dfrac{e^c}{4!}x^4$

که در آن $R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-0)^4$ که برابر است با $\frac{e^c}{4!}x^4$

باقیمانده سری از مرتبه n

Equation (1) is called **Taylor's formula**. The function $R_n(x)$ is called the **remainder of order n** or the **error term** (خطا) for the approximation of f by $P_n(x)$ over I. If $R_n(x) \to 0$ as $n \to \infty$ for all $x \in I$, we say that the Taylor series generated by f at $x = a$ **converges** to f on I, and we write

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Show that the Taylor series generated by $f(x) = e^x$ at $x = 0$ converges to $f(x)$ for every real value of x.

Solution The function has derivatives of all orders throughout the interval $I = (-\infty, \infty)$. Equations (1) and (2) with $f(x) = e^x$ and $a = 0$ give

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{for some } c \text{ between 0 and } x.$$

برای

if $x \leq 0 \Rightarrow \exists c$ s.t $x \leq c \leq 0 \Rightarrow e^x \leq e^c \leq 1$

if $x \geq 0$ // // // $0 \leq c \leq x \Rightarrow e^0 \leq e^c \leq e^x$ thus :

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{when } x \leq 0, \qquad |R_n(x)| < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{when } x > 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad \text{for every } x,$$

$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, and the series converges to e^x for every x. Thus,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots.$$

The Taylor Series for $\sin x$ at $x = 0$

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x, \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x,$$

$$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad \text{and} \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x).$$

$$|R_{2k+1}(x)| \leq 1 \cdot \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

$R_{2k+1}(x) \longrightarrow 0$

Maclaurin series for $\sin x$ converges to $\sin x$ for every x. Thus,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

The Taylor Series for $\cos x$ at $x = 0$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

سری مک لورن $\cos 2x$ را بنویسید

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots$$

Find the Taylor series for $x \sin x$ at $x = 0$.

$$x \sin x = x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots.$$

با خطای کمتر از 10^{-6}

Calculate e with an error of less than 10^{-6}.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1),$$

$$R_n(1) = e^c \frac{1}{(n+1)!} \qquad \text{for some } c \text{ between 0 and 1.}$$

فرض کنید می دانیم $e<3$ است لذا :

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

اگر $n+1$ را ۹ بگیریم بنابر تجربه ی محاسبه $\frac{1}{9!} > 10^{-6}$

درحالی که اگر $n+1$ را برابر ۱۰ در نظر بگیریم $\frac{1}{10!} < 10^{-6}$

بنابراین برای داشتن خطای کمتر از 10^{-6} لازم است که $n+1=10$ و لذا $n=9$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718282.$$

EXAMPLE 7 For what values of x can we replace $\sin x$ by $x - (x^3/3!)$ with an error of magnitude no greater than 3×10^{-4}?

به بزرگی نابیشتر

the error in truncating $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ after $(x^3/3!)$ is no greater than

$$\left|\frac{x^5}{5!}\right| = \frac{|x|^5}{120}.$$

Therefore the error will be less than or equal to 3×10^{-4} if

(چون سری سری متناوب است)

$$\frac{|x|^5}{120} < 3 \times 10^{-4} \quad \text{or} \quad |x| < \sqrt[5]{360 \times 10^{-4}} \approx 0.514.$$

Rounded down, to be safe

در هر یک از توابع زیر نشان دهید سری تیلور در $n=0$ به خود تابع همگرا است

1. e^{-5x}
2. $e^{-x/2}$
3. $5\sin(-x)$
4. $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
5. $\cos\sqrt{x+1}$
6. $\cos\left(x^{3/2}/\sqrt{2}\right)$
7. xe^x
8. $x^2 \sin x$
9. $\frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$
10. $\sin x - x + \frac{x^3}{3!}$
11. $x \cos \pi x$
12. $x^2 \cos(x^2)$

13. $\cos^2 x$ (*Hint:* $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$.)

14. $\sin^2 x$

15. $\dfrac{x^2}{1 - 2x}$

16. $x \ln(1 + 2x)$

17. $\dfrac{1}{(1 - x)^2}$

18. $\dfrac{2}{(1 - x)^3}$

19. For approximately what values of x can you replace $\sin x$ by $x - (x^3/6)$ with an error of magnitude no greater than 5×10^{-4}? Give reasons for your answer.

20. If $\cos x$ is replaced by $1 - (x^2/2)$ and $|x| < 0.5$, what estimate can be made of the error? Does $1 - (x^2/2)$ tend to be too large, or too small? Give reasons for your answer.

21. How close is the approximation $\sin x = x$ when $|x| < 10^{-3}$? For which of these values of x is $x < \sin x$?

22. The estimate $\sqrt{1 + x} = 1 + (x/2)$ is used when x is small. Estimate the error when $|x| < 0.01$.

23. The approximation $e^x = 1 + x + (x^2/2)$ is used when x is small. Use the Remainder Estimation Theorem to estimate the error when $|x| < 0.1$.

24. (*Continuation of Exercise 23.*) When $x < 0$, the series for e^x is an alternating series. Use the Alternating Series Estimation Theorem to estimate the error that results from replacing e^x by $1 + x + (x^2/2)$ when $-0.1 < x < 0$. Compare your estimate with the one you obtained in Exercise 23.

25. Estimate the error in the approximation $\sinh x = x + (x^3/3!)$ when $|x| < 0.5$. (*Hint:* Use R_4, not R_3.)

26. When $0 \le h \le 0.01$, show that e^h may be replaced by $1 + h$ with an error of magnitude no greater than 0.6% of h. Use $e^{0.01} = 1.01$.

27. For what positive values of x can you replace $\ln(1 + x)$ by x with an error of magnitude no greater than 1% of the value of x?

28. You plan to estimate $\pi/4$ by evaluating the Maclaurin series for $\tan^{-1} x$ at $x = 1$. Use the Alternating Series Estimation Theorem to determine how many terms of the series you would have to add to be sure the estimate is good to two decimal places.

29. **a.** Use the Taylor series for $\sin x$ and the Alternating Series Estimation Theorem to show that

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \neq 0.$$

T **b.** Graph $f(x) = (\sin x)/x$ together with the functions $y = 1 - (x^2/6)$ and $y = 1$ for $-5 \le x \le 5$. Comment on the relationships among the graphs.

30. **a.** Use the Taylor series for $\cos x$ and the Alternating Series Estimation Theorem to show that

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}, \quad x \neq 0.$$

(This is the inequality in Section 2.2, Exercise 52.)

Find $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \right)$.

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots \right)}{x \cdot \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots \right)}$$

$$= \frac{x^3 \left(\dfrac{1}{3!} - \dfrac{x^2}{5!} + \cdots \right)}{x^2 \left(1 - \dfrac{x^2}{3!} + \cdots \right)} = x \frac{\dfrac{1}{3!} - \dfrac{x^2}{5!} + \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{3!} + \cdots}.$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(x \frac{\dfrac{1}{3!} - \dfrac{x^2}{5!} + \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{3!} + \cdots} \right) = 0.$$

ثابت کنید

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \le 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \tanh^{-1} x = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \le 1$$

Binomial Series

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \qquad |x| < 1,$$

Find the first four terms of the binomial series for the functions in Exercises 1–10.

1. $(1+x)^{1/2}$ **2.** $(1+x)^{1/3}$ **3.** $(1-x)^{-1/2}$

4. $(1-2x)^{1/2}$ **5.** $\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2}$ **6.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}$

7. $(1+x^3)^{-1/2}$ **8.** $(1+x^2)^{-1/3}$

9. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}$ **10.** $\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/3}$

Use series to evaluate the limits in Exercises 47–56.

47. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2}$

48. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

49. $\lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t - (t^2/2)}{t^4}$

50. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta - \theta + (\theta^3/6)}{\theta^5}$

51. $\lim_{y\to 0} \frac{y - \tan^{-1} y}{y^3}$

52. $\lim_{y\to 0} \frac{\tan^{-1} y - \sin y}{y^3 \cos y}$

53. $\lim_{x\to\infty} x^2(e^{-1/x^2} - 1)$

54. $\lim_{x\to\infty} (x+1)\sin\frac{1}{x+1}$

55. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$

56. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{\ln(x-1)}$

Show that the Taylor series for $f(x) = \tan^{-1} x$ diverges for $|x| > 1$.

Express $\int \sin x^2\, dx$ as a power series.

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} - \cdots.$$

$$\int \sin x^2\, dx = C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \frac{x^{10}}{19\cdot 9!} - \cdots.$$

Estimate $\int_0^1 \sin x^2\, dx$ with an error of less than 0.001.

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \frac{1}{19\cdot 9!} - \cdots.$$

The series alternates, and we find by experiment that

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} \approx 0.00076$$

is the first term to be numerically less than 0.001. The sum of the preceding two terms

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0.310.$$

With two more terms we could estimate

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx \approx 0.310268$$

with an error of less than 10^{-6}. With only one term beyond that we have

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \frac{1}{6894720} \approx 0.310268303,$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad |x| \le 1$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{۲n+1} = \frac{\pi}{۴}$$

Evaluate

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}. = ?$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots,$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{1}{2}(x-1) + \cdots\right) = 1.$$

-5 sin(32)

مثال) حاصل $\sin(32)$ را با خطای کمتر از 10^{-5} بیابید (32 رادیان)

حل) 32 رادیان نزدیک به 10π می باشد پس سری تیلور sin را حول 10π می نویسیم

$$f(10\pi) = \sin(10\pi) = 0$$

$$f'(10\pi) = \cos(10\pi) = 1$$

$$f''(10\pi) = 0 \quad , \quad f'''(10\pi) = -1 \quad , \ \ldots$$

$$\Longrightarrow \quad 0 + (x-10\pi) - \frac{(x-10\pi)^3}{3!} + \frac{(x-10\pi)^5}{5!} - \cdots$$

حال برای بدست آوردن مقدار تقریبی $\sin(32)$ کافیست عدد 32 را در چند جمله ای سری فوق بگذاریم برای بدست آوردن $\sin(32)$ با خطای کمتر از 10^{-5}، $P_5(32)$ را بدست می آوریم که $P_5(x) = (x-10\pi) - \frac{(x-10\pi)^3}{3!} + \frac{(x-10\pi)^5}{5!}$ چند جمله ای تیلور از مرتبه 5 می باشد.

$$P_5(32) = 0.55143$$

پس $\sin(32) \approx 0.55143$ با خطای کمتر از 10^{-5}.