روش سریع تراختنبرگ
در حساب

آن کاتلر و رودلف مک شین

ترجمهٔ محمد باقری

آن کاتلر و رودلف مک شین

روش سریع تراختنبرگ در حساب

ترجمهٔ محمد باقری

دانشمند
تهران ۱۳۷۱

This is a Farsi (Persian) translation of:

The Trachtenberg Speed System of Basic Mathematics

Translated and Adapted by:

Ann Cutler & Rudolph McShane.

Greenwood Press, Publishers,

Westport, Connecticut, U.S.A.

دانشمند

شماره ٢٤، کوچه شهید مهماندوست، خیابان شهید صابونچی، خیابان شهید بهشتی، تهران.

چاپ اول: ١٣٧١

تعداد: ٥٠٠٠

لیتوگرافی: قاسملو

چاپ: مرتضی

صحافی: صبح امروز

تلفن مرکز پخش: ٨٥٤٩٦٩

به نام خدا

مجله **دانشمند** با سی سال سابقهٔ فعالیت در زمینهٔ انتشار مواد خواندنی علمی و درک نیازهای خوانندگان جوان، اقدام به انتشار کتابهایی در زمینه های علمی می کند. انتشار این کتابها به منظور پاسخگویی به نیازهای علمی و فنی خوانندگان و گسترش آگاهی آنان انجام می گیرد.

امیدواریم کتابهای **دانشمند** نیز همچون **ماهنامه ها**، **ویژه نامه ها** و **ضمیمه ها** و در کنار آنها، در خدمت به خوانندگان مشتاق و علاقه مند، مورد توجه قرار گیرد.

دانشمند

فهرست

«نگاه کن و بپرس؛
دوست بدار و گذشت کن؛
یاد بگیر و پیش برو.»

یاکوف تراختنبرگ
(۱۸۸۸ - ۱۹۵۱)

پیشگفتار

آموزگار پسر بچهٔ نه ساله‌ای را که با گامهای استوار راه می‌رفت به سوی تخته سیاهی که رویش ستونی از اعداد به ارتفاع یک متر نوشته شده بود، فرا خواند. پسرک برای آنکه قدش به اعداد بالایی برسد روی پنجهٔ پا بلند شد و مجموع آنها را با سرعت برق به دست آورد.

از دخترکی با گیسهای رویان بسته خواسته شد که حاصل ضرب ۷۳۵۳۵۲۳۱۴ در ۱۱ را پیدا کند. او جواب درست را ــ که ۸۰۸۸۸۷۵۴۵۴ باشد ــ در زمانی کوتاهتر از زمان لازم برای بر زبان آوردن عبارت «جدول ضرب اعداد»، یافت. به پسربچهٔ لاغر اندامی که عینک قاب نقره‌ای به چشم داشت، گفته شد ۵۱۳۲۴۳۷۲۰۱ را در ۴۵۲۷۳۶۵۰۲۷۸۵ ضرب کند. پسرک فوراً کار را آغاز و جواب ۲۳۲۳۶۴۱۶۶۹۱۴۴۳۷۴۱۰۴۷۸۵ را در هفتاد ثانیه محاسبه کرد.

اینجا کلاسی بود که در آن روش ریاضی تراختنبرگ تدریس می‌شد. آنچه این نمایش شعبده بازی ریاضی را شگفت‌انگیزتر می‌کرد این بود که این کودکان کسانی بودند که بارها در درس حساب رد شده بودند، تا آنکه بالاخره والدینشان در عین نومیدی آنها را برای یاد گرفتن

این روش فرستاده بودند.

مرحوم یاکوف تراختنبرگ[1] بنیانگذار مؤسسه ریاضی در زوریخ (سویس) و ابداعگر روش شگفت‌انگیز تازه‌ای در حساب، عمیقاً معتقد بود که همهٔ افراد با «استعدادهای چشمگیر برای محاسبه» به دنیا می‌آیند.

روش تراختنبرگ، افزون بر سریع بودن، ساده هم هست. با فراگرفتن دستورهای آن، انجام محاسبات برق‌آسا، به راحتی قصه خواندن خواهد بود. ظاهراً این کار نوعی جادوگری است ولی دستورهای مذکور از پایهٔ منطقی استواری برخوردارند.

تراختنبرگ، مهندس تیزهوشی که ذهن ابداعگری داشت، روش ریاضیات آسان خود را هنگامی پدید آورد که به عنوان زندانی سیاسی در اردوگاههای اسیران رژیم هیتلری به سر می‌برد. این کار فوق‌العاده را که در ایامی مصیبت بار و در جریان دشواریهای طاقت‌فرسا شکل گرفته، نمی‌توان از سرگذشت پدید آورنده‌اش جدا دانست، زیرا ای بسا که اگر پروفسور تراختنبرگ زندگی آسوده‌تری را می‌گذراند شاید هیچگاه قادر به پدید آوردن روشی نمی‌شد که بتواند زحماتی را که اغلب در حساب پیش می‌آید از میان بردارد.

سرگذشت تراختنبرگ نیز به همان جذابیت و حیرت‌انگیزی روش ریاضی هوشمندانهٔ اوست که به اعتقاد بسیاری از کارشناسان، سرانجام انقلابی در شیوهٔ آموزش حساب در مدارس سراسر جهان پدید خواهد آورد.

یاکوف تراختنبرگ که از تبار روس بود، در ۱۷ ژوئن ۱۸۸۸ در بندر اودسا به دنیا آمد وخیلی زود نبوغ خود را نشان داد. پس از آنکه با درجهٔ ممتاز از مؤسسهٔ مهندسی معدن سن‌پترزبورگ فارغ‌التحصیل شد، به عنوان «دانشجو - مهندس» به کشتی‌سازی معروف اُبوشوف راه یافت.

---

1. Jakow Trachtenberg

هنوز بیست و چند سال بیشتر نداشت که مهندس ارشد خوانده شد. در آن ایام در حکومت تزاری، برنامه‌های بلند پروازانه‌ای برای ایجاد عظیمترین نیروی دریایی وجود داشت و ۱۱۰۰۰ نفر زیر نظر تراختنبرگ کار می کردند.

تراختنبرگ به رغم آنکه سرپرستی کشتی‌سازی اُبوشوف را بر عهده داشت، صلحدوست فداکاری بود. در آستانهٔ جنگ جهانی اول، یک انجمن مددکاری تأسیس کرد که دانشجویان روس را برای مراقبت از مجروحان آموزش می‌داد. این کار موجب دریافت پاداش ویژه‌ای از تزار شد.

اعدام افراد خانوادهٔ سلطنتی درسال ۱۹۱۸ به رؤیای ایجاد نیروی دریایی قدرتمند در روسیه پایان داد. به این ترتیب امید شخصی تراختنبرگ برای رسیدن به زندگی سعادتبار و صلح آمیز نیز پایان گرفت. تراختنبرگ که آن همه از بیرحمی و خشونت بیزار بود، خود قربانی آن شد.

وقتی انقلابیون در روسیه روی کار آمدند، تراختنبرگ بی پروا علیه خشونت و قانون شکنی سخن می گفت. این انتقادها زندگیش را به مخاطره انداخت. در اوایل سال ۱۹۱۹ خبردار شد که می‌خواهند او را بکشند. لباس روستایی به تن کرد و شبانه با پای پیاده، در حالی که روزها در گوشه‌ای پنهان می‌شد، راه آلمان را در پیش گرفت.

برلن با خیابانهای پهن و زیبا، هوای سرد و آسمان صاف خاطرهٔ سن پترزبورگ را در ذهن او زنده می کرد. در این شهر مقیم شد و در اتاقی کوچک در محله‌ای دور افتاده زندگی تازه‌ای را آغاز کرد. اینجا با شماری از روشنفکران ناکام و سرخوردهٔ دوران پس از جنگ دوستی به هم زد و رهبر آنان شد. به عنوان سر دبیر یک مجله، اغلب برای این گروه سخنرانی می کرد و می کوشید تا آلمان را به سوی آینده‌ای صلح آمیز سوق دهد.

تراختنبرگ با زن زیبارویی از طبقهٔ اشراف ازدواج کرد. او با نوشتن مقاله‌هایی انتقادی دربارهٔ شوروی و تدوین نخستین کتاب مرجع درباره صنایع این کشور، شهرتی به هم زد. بتدریج او را به عنوان خبره‌ترین کارشناس اروپا در زمینهٔ امور مربوط به شوروی شناختند. در این احوال، ذهن خلاق او به کار دیگری روی آورد. تراختنبرگ روشی برای تدریس زبانهای خارجی ابداع کرد که هنوز در بسیاری از مدارس آلمان به کار می‌رود.

به نظر می‌رسید که دیگر تلاطمهای دوران اولیهٔ زندگیش را پشت سر گذاشته است. با روی کار آمدن هیتلر، زندگی تراختنبرگ دوباره رنگ آشنای مبارزه به خود گرفت. بی هیچ ترسی، علیه فاشیسم صحبت می‌کرد. شهرت تراختنبرگ به حدی بود که هیتلر نخست صلاح را در آن دید که حملات او را نادیده بگیرد. ولی وقتی تند و تیز به محکوم کردن فاشیسم پرداخت، هیتلر تصمیم گرفت صدای او را خاموش کند.

در سال ۱۹۳۴، پس از آنکه فهمید ماندن در آلمان به قیمت جانش تمام خواهد شد، بار دیگر از مهلکه گریخت. تراختنبرگ به همراه همسرش به وین پناه برد و در آنجا سر دبیر یک نشریهٔ علمی بین‌المللی شد.

هنگامی که جهان برای جنگ آماده می‌شد، تراختنبرگ به منظور تقویت انگیزه‌های صلح‌جویانه اثری به نام وزارت صلح[1] نوشت که خوانندگان بسیاری یافت و مورد ستایش سیاستمدارانی چون روزولت، ماساریک[2] و ون زیلانت[3] قرار گرفت.

1. Das Friedensministerium
۲. رئیس جمهوری چکسلواکی در سالهای ۱۹۱۸ تا ۱۹۳۵، صاحب آثار متعدد فلسفی و سیاسی که در سال ۱۹۳۷ در گذشت ـ م.
۳. Van Zeeland اقتصاددان و سیاستمدار بلژیکی که طی سالهای ۱۹۳۵ تا ۱۹۳۷ نخست وزیر بلژیک بود و در سال ۱۹۷۳ در گذشت ـ م.

اما در سراسر جهان، چراغ صلح به خاموشی می گرایید. آلمانیها وارد خاک اتریش شدند و نام تراختنبرگ در رأس فهرست کسانی بود که هیتلر فرمان دستگیریشان را داده بود. او را گرفتند و به زندان انداختند.

تراختنبرگ موفق شد به یوگسلاوی بگریزد. آنجا به همراه همسرش کنتس آلیس، همچون صید به دام افتاده می زیستند. کمتر جرأت می کردند در طول روز از خانه خارج شوند و با هیچ دوست و آشنایی مراوده نداشتند. اما این دوران آزادی دیری نپایید. شبی به صدای ضربه‌های محکم که به در کوفته شد از خواب پرید ـ مأموران گشتاپو پشت در بودند. پلیس هیتلر سرانجام توانسته بود او را به چنگ آورد.

تراختنبرگ را در کامیون مخصوص حمل دام سوار کردند و به اردوگاهی بردند که به خاطر شرایط بیرحمانه‌اش معروف بود. کوچکترین تخلفی از قوانین، شدیدترین تنبیهات را در پی داشت. هر روز دسته‌ای از زندانیان که انتخاب آنها تصادفی صورت می گرفت در کوره‌های آدم‌سوزی قربانی می‌شدند.

تراختنبرگ برای حفظ تعادل روحی خود به دنیای درون خویش پناه برد ـ دنیایی که منطق و نظم بر آن حاکم بود. در اوضاعی که روز به روز جسمش تکیده‌تر می‌شد و پیرامونش را طاعون، مرگ، و نابودی فرا گرفته بود، ذهن او از پذیرفتن شکست سر باز زد و رهسپار دنیای اعداد شد و به خواست او کارهای معجزه آسایی صورت داد.

آنجا از کتاب، کاغذ، قلم یا مداد خبری نبود. ذهن پیکارجوی او همهٔ این کمبودها را جبران می کرد. او معتقد بود که ریاضیات کلید درست اندیشی است. در روزگار خوشتری، ریاضیات را یک وسیلهٔ سرگرمی عالی یافته بود. در جهانی که دستخوش دیوانگیها بود، منطق آرام اعداد، آنها را همچون دوستانی قدیمی جلوه گر می‌ساخت. ذهن او در خلال تنظیم و بازآرایی اعداد، راههای تازه‌ای برای کار کردن با آنها پیدا کرد.

او نزد خود اعداد غول آسایی را برای افزودن به یکدیگر در نظر گرفت و به جمع آنها پرداخت، چون کسی نمی‌تواند جمع هزاران عدد را به خاطر بسپارد، روشی مصون از خطا ابداع کرد که به کمک آن حتی کودکان هم می‌توانستند هزاران عدد را بر هم بیفزایند، بی آنکه اشتباهی بکنند و در واقع بی آنکه در عمل جمع از عدد یازده بالاتر روند.

طی سالهای طولانی زندگی دوزخی در اردوگاه اسیران، از هر لحظهٔ فراغت، برای تکمیل روشهای سادهٔ ریاضی خود بهره جست و برای هر چیز، از ضرب گرفته تا اعمال جبری، راههای میانبُری ابداع کرد.

هنگامی که سر سختانه به انجام عملیات و محاسبات ریاضی می پرداخت ــ قوانینی برای محاسبه می یافت، بارها و بارها به اثبات آنها می‌پرداخت و بار دیگر موفق به ساده‌تر کردن روش خود می‌شد ــ تباهی و سیه‌روزی، فریادهای برآمده از سلولهای مرطوب و اتاقهای شکنجه، بوی تعفن کوره‌ها، وحشیگریها و تهدید دایمی مرگ را کمتر احساس می کرد.

این ناملایمات، نبوغ او را بیشتر بر می‌انگیخت. چون کاغذ در اختیار نداشت، مطالبش را روی تکه‌های کاغذ لفاف، پاکتهای کهنه یا پشت برگه‌های کارکرد آلمانیها که بدقت نگهداری می‌شد، یادداشت می کرد. چون حتی همین تکه‌های کاغذ هم غنیمت بود، همهٔ کارها را در ذهنش انجام می‌داد و تنها نتایج به دست آمده را ثبت می کرد.

امروزه کسانی که از روش تراختنبرگ استفاده می کنند آن را چنان ساده می‌یابند که می‌توانند همهٔ مسائل را ذهنی حل کنند و تنها جوابها را روی کاغذ بیاورند.

اندکی پس از عید پاک سال ۱۹۴۴، تراختنبرگ خبردار شد که می‌خواهند او را اعدام کنند ـ حکم از بالا آمده بود و دیگر صرفاً یک احتمال نگران کننده نبود. تراختنبرگ با واقعیتی ناگزیر رو به رو شد، پس در دنیایی که خودش آن را ساخته بود فرو رفت. آرام به کار خود ادامه می‌داد: با معادله‌ها بازی می کرد، فرمولهایی به دست می آورد و

قوانینی استخراج می کرد. تصمیم گرفته بود که حتماً روش خود را کامل کند! موضوع کار خود را با یکی از همبندیها در میان گذاشت. تراختنبرگ حدود هفت سال در زندان به سر برد.

همسرش که هیچ گاه از اردوگاه اسیران دور نشده بود از ماجرای حکم اعدام با خبر شد. از آخرین بازماندهٔ پول و جواهراتش دل کند، رشوه‌ای داد و واسطه‌ای پیدا کرد تا توانست اندکی پیش از اجرای حکم اعدام، ترتیب انتقال پنهانی او را به اردوگاه دیگری فراهم آورد.

او را به لایپزیگ فرستادند که بسختی بمباران شده بود و اوضاع آن از هر لحاظ درهم ریخته بود. نه غذایی گیر می آمد، نه گرمایی و نه هیچ گونه امکاناتی. در اقامتگاههای ملال آور، بین ردیفهای به هم فشردهٔ بسترهای ناهموار، جایی برای دراز کشیدن یافت نمی‌شد. اخلاقیات هیچ گاه بدین پایه نزول نکرده بود. مرده‌ها اغلب چند روز بر جای می‌ماندند. همخانه‌ها ضعیفتر از آن بودند که بخواهند گوری بکنند و نگهبانان هراس آلوده‌تر از آن که بخواهند دستوری بدهند.

در این بلبشو، مرد مصممی که حاضر باشد جان خود را به مخاطره اندازد، می‌توانست به سوی آزادی بگریزد. تراختنبرگ بخت خود را آزمود و در تاریکی شب از زیر دو ردیف سیم خاردار بیرون خزید. آنگاه به همسر خود که همهٔ عمر، توان و ثروت خود را وقف یاری به او کرده بود، پیوست. ولی تراختنبرگ نه گذرنامه داشت و نه هیچ مدرکی که به کارش بیاید. او شهروند بی وطنی بود که هر لحظه خطر دستگیری تهدیدش می کرد.

دیگر بار، او را به حبس کشاندند. یک مقام اداری عالیرتبه که از کار تراختنبرگ با خبر بود، او را به یک اردوگاه کار اجباری در تریست فرستاد. در آنجا او را به کار سنگ‌شکنی گماشتند ولی هوا ملایمتر بود و نگهبانان چندان سختگیر نبودند.

خانم تراختنبرگ آرام آرام توانست با رشوه دادن به نگهبانان، پیامهایی برای شوهرش بفرستد و به این ترتیب برنامهٔ فرار دیگری تنظیم

شد. در شب بی ستاره‌ای در اوایل سال ۱۹۴۵، تراختنبرگ از پرچین سیم خاردار گذشت و در حالی که نگهبانان مستقر در برجهای مراقبت به سویش شلیک می کردند مسافتی طولانی را لابه‌لای چمنها سینه‌خیز طی کرد. این آخرین گریز او بود. خانم تراختنبرگ در میعادگاه منتظرش بود. آنها با هم به سوی مرز سویس رهسپار شدند.

تراختنبرگ در یک اردوگاه پناهندگان در کشور سویس تجدید قوایی کرد. موهایش سفید و بدنش ناتوان شده بود، اما سالهای بلاتکلیفی و نومیدی را پشت سر گذاشته و از پا نیفتاده بود. برق شجاعت همچنان در چشمان آبی زلال و آرام او موج می‌زد. شور و سر زندگی و میل شدید به زیستن، هنوز بخشی از وجود او بود.

رفته رفته که بهبود می‌یافت، به تکمیل روش ریاضی خود پرداخت که زمانی او را از دیوانه شدن حفظ کرده بود و به او توانایی پایداری در بازجوییهای گشتاپو را داده بود و اکنون نیز او را قادر می‌ساخت زندگی تازه‌ای را آغاز کند.

تراختنبرگ کودکان را دوست داشت و شیوهٔ جدید و سادهٔ خود برای انجام عملیات حساب را نخستین بار به آنان آموخت. او همواره بر این اعتقاد بود که هر انسانی دارای هوش سرشار زاده می‌شود. حالا می‌خواست این نظر را ثابت کند. تعمداً کودکانی را برای این کار برگزید که در مدرسه تنبل به شمار می‌آمدند.

این بچه‌ها، عموماً وامانده، خجالتی و گوشه گیر، یا درست در نقطهٔ مقابل، یعنی پررو و سرکش بودند. به هر حال، همهٔ آنها کودکان ناسازگاری بودند که بد تربیت شده بودند.

واکنش این کودکان نسبت به شیوهٔ تازه و آسان محاسبات، آنی بود. این روشها به نظر آنان همچون سرگرمی دلپذیری جلوه می کرد. احساس توانایی ایجاد شده در آنها بزودی موجب شد که خصلتهای نابهنجار خود را از دست بدهند.

تأثیرات جنبی فراگیری روش جدید بر این کودکان نیز به همین

اندازه مهم بود. ضمن اینکه بچه‌ها مهارتی در کار با اعداد به دست می آوردند، آرامش و اطمینانی در آنان پدید می آمد که شخصیتشان را دگرگون می کرد و کم کم در سایر درسها هم پیشرفت محسوسی می کردند. احساس توانایی، تلاشها و پیروزیهای بعدی را با خود به دنبال می آورد.

تراختنبرگ برای آنکه نشان دهد هر کسی قادر است طرز حل سریع و سادهٔ مسائل را فرا گیرد، روش خود را با موفقیت به کودک دهساله‌ای که عقب افتاده محسوب می‌شد یاد داد. نه تنها این کودک شیوهٔ محاسبه کردن را فراگرفت، بلکه ضریب هوشی او نیز فزونی یافت. چون همهٔ مسائل به طور ذهنی حل می‌شد، کودک نیروی حافظهٔ چشمگیری به دست آورد و قدرت تمرکزش زیاد شد.

در سال ۱۹۵۰، تراختنبرگ مؤسسهٔ ریاضی زوریخ را بنیاد نهاد که در نوع خود نمونه بود. در ساختمان ساده و وسیع مدرسه، هر روز کلاسها تشکیل می‌شود. در طول روز، شاگردان مدرسه، کودکان هفت تا هجده ساله هستند. ولی هنگام عصر، صدها زن و مرد مشتاق که زحمت فراگیری حساب به روش سنتی را تجربه کرده‌اند، سر کلاسها حاضر می‌شوند. اینان که عمری را با شیوهٔ قدیمی سر کرده‌اند از سادگی روش تازه لذت می‌برند و از مزایای ریاضیات نویافتهٔ خود با افتخار سخن می گویند. شاید این تنها مدرسهٔ دنیا باشد که شاگردان آن ــ چه صبح و چه عصر ــ نیم ساعتی پیش از آنکه زنگ کلاس بخورد به مدرسه می آیند. براستی ماهیت روش تراختنبرگ چیست و از آن چه انتظاری می‌توان داشت؟

روش تراختنبرگ متکی بر دستورالعملهایی است که با آنچه در روشهای معمولی وجود دارد اساساً متفاوت است. از جدول ضرب و از عمل تقسیم خبری نیست. برای یادگیری این روش کافی است شمردن را بلد باشید. این روش مبتنی بر کلیدهایی است که آنها را باید به خاطر سپرد. با یاد گرفتن اینها، حساب به صورت موضوعی آسان و شیرین در

می آید، زیرا شخص خواهد توانست اعداد مطلوب را «بخواند».

مزایای مهم این روش عبارت‌اند از سهولت بیشتر، سرعت بیشتر و دقت بیشتر. مربیان دریافته‌اند که روش تراختنبرگ زمان انجام محاسبات ریاضی را به بیست درصد کاهش می‌دهد.

در همهٔ اعمال مربوط به محاسبه، امکان راه یافتن خطا برای انسان یا دستگاه وجود دارد. اما معلوم شده است که روش تراختنبرگ با داشتن دستور بی نظیری برای امتحان درستی محاسبه به کمک طرح نُه‌ها یا یازده‌ها، درست بودن نتیجه را با اطمینان ۹۹ درصد تضمین می کند، که رکورد چشمگیری است.

ارزش عملی والای این روش جدید در آن است که بر خلاف شیوه‌ها و ترفندهایی که در گذشته برای حالتهای خاص ابداع شده بود، یک روش کامل است. روش تراختنبرگ که خیلی آسانتر از حساب معمولی است، به افراد عادی که هیچ سرو کاری با ریاضیات نداشته‌اند امکان دستیابی به چنان نتایجی را می‌دهد که عموماً از نبوغهای ریاضی انتظار می‌رود. این روش که «تند نویسی ریاضیات» خوانده شده، در پیچیده‌ترین مسائل نیز قابل استفاده است.

اما شاید بزرگترین حُسن این روش تازه و انقلابی در آن باشد که دلبستگی های تازه‌ای را نسبت به ریاضیات بر می‌انگیزاند، در شاگرد اعتماد به نفس پدید می آورد و با گشودن پهنهٔ تلاشی پیش رویش، او را به فرا گرفتن موضوعی فرا می‌خواند که امروزه در مدارس «منفورترین» درس قلمداد می‌شود.

پروفسور تراختنبرگ معتقد بود علت اینکه اغلب ما در کار با اعداد مشکلاتی داریم دشوار بودن فهم حساب نیست، بلکه علت آن در روش کهنه‌ای نهفته است که با آن به ما درس داده‌اند. بسیاری از مربیان نیز همین عقیده را دارند.

بررسی یکساله‌ای که بخش بازرسی آموزش دانشگاه پرینستون انجام داد، نشان می‌دهد که حساب یکی از درسهایی است که در مدارس

[امریکا] به بدترین وضع تدریس می‌شود و معلوم شد که طی یک قرن اخیر آموزش علم حساب در کشور [امریکا] پیشرفت چندانی، یا هیچ پیشرفتی نداشته است؛ همچنین معلوم شد که مهمترین دستاوردهای علوم ریاضی از سدهٔ هفدهم به‌این سو، به‌دبستانها و دبیرستانهای‌ما [در آمریکا] راه نیافته است. این گزارش حاکی از ویرانگریهایی است که به بار می آید. در یک مدرسهٔ عالی مهندسی، معلومات ریاضی هفتاد و دو درصد دانشجویان را به قدری ضعیف تشخیص دادند که لازم شد برای آمادگی حضور در کلاس درس سال اول، یک دور ریاضیات دبیرستانی را مرور کنند.

بویژه در شرایط امروزی که نیاز مبرمی به کادر آموزش دیدهٔ علمی و فنی با درک جدی از ریاضیات وجود دارد، چنین اوضاعی بسیار تأسف‌انگیز است. این وازدگی نسبت به ریاضیات که به گفتهٔ مربیان نقش بسیار مهمی در تعیین مسیر کار و زندگی جوانان دارد، از سطوح دبستان و دبیرستان آغاز می‌شود. در این مراحل است که مهندسان و دانشمندان بالقوهٔ فردا، از این «منفورترین درس» روگردان می‌شوند و پس از آن، هر گاه مقدور باشد حساب را از برنامهٔ درسی خود کنار می گذارند.

روش تراختنبرگ که در سویس به‌طور کامل آزمایش شده است، کار را از همان ابتدا آغاز می کند؛ از اعمال اصلی حساب که شاگرد نخستین بار در آن با دشواریهایی روبه‌رو می‌شود و از لحاظ عاطفی کم کم چنان تأثیراتی می‌پذیرد که بعدها او را در کار ریاضیات فلج می کند.

قدرت انجام اعمال اصلی حساب با سهولت چشمگیری که روش تراختنبرگ پدید می آورد، سبب می‌شود که ترس و تزلزل شاگردان که در مواجهه با زبان کاملاً نمادی و دقت مطلق ریاضیات راه آنان را سد می کند، از میان برود. به گفتهٔ کارشناسان، علت واقعی بیزاری اغلب شاگردان از ریاضیات، موانع عاطفی است، نه ضعف یاد گیری.

این واقعیت را که استفاده از میانبُرها، حساب را آسانتر و

خوشایندتر می کند، طی جنگ جهانی دوم نیروهای نظامی به طور قطعی اثبات کردند. درجه‌داران و ناویهایی که دوره‌های بازآموزی ریاضیات دبیرستانی را می گذراندند، با ساده شدن مطالب قادر بودن کار چندین سال را چند ماهه پیش ببرند.

دانشجویان پزشکی، معماران و مهندسان زوریخی دریافته‌اند که به کمک روشهای ریاضی آسان تراختنبرگ می‌توانند از عهدهٔ گذراندن امتحانات دشواری که برای تکمیل دورهٔ آنان اجباری است، برآیند. یکی از کارشناسان برجستهٔ معماری در سویس تنها پس از شرکت کردن در کلاسهای مؤسسه ریاضی و فرا گرفتن روش تراختنبرگ توانست در رشتهٔ انتخابی خود ادامهٔ تحصیل دهد.

در سویس، وقتی از "مؤسسه ریاضی" صحبت می‌شود، از آن به منزلهٔ «مدرسهٔ نبوغ» یاد می کنند.

طی آزمایش جالبی که اخیراً در زوریخ انجام شد، شاگردانِ روشِ تراختنبرگ به زورآزمایی با ماشینهای محاسبه فرا خوانده شدند. یک ساعت تمام، مسئول امتحان مسائل را می‌خواند: تقسیمهای پیچیده، جمعهای غول‌پیکر، مجذور کردنها و جذرگیریهای دشوار و ضربهای خیلی بزرگ.

همین که ماشینها با صدای تیک‌تیک مشغول پاسخگویی شدند، شاگردان نوجوان بسرعت و بدون هیچ مرحلهٔ بینابینی جوابها را روی کاغذ آوردند.

شاگردان از ماشین پیش افتادند!

این شاگردانی که در دقت و سرعت، ماشینهای محاسبه را پشت سر گذاشتند نابغه نبودند. سرعت عمل آنان از فشردگی و سر راستی روشِ کارشان ناشی می‌شد.

اما تنها در حرفه‌های تخصصی نیست که دانستن حساب ضرورت پیدا می کند. امروزه، در زندگی عادی، ریاضیات نقش حیاتی روزافزونی دارد؛ بویژه در کشور ما [امریکا] که همه در انبوهه‌ای از اعداد زندگی

می کنیم.

با آموختن روش تراختنبرگ، زحمت حساب کردن که بخشی از کارهای روزانه هر کسی است، بر طرف می‌شود.

سویسیها که به تیز هوشی در کار بازرگانی معروف‌اند، با پی بردن به روشنی و خطاناپذیری روش تراختنبرگ، اکنون در همهٔ بانکها، اغلب مؤسسه‌های بازرگانی و در ادارهٔ مالیات از آن استفاده می کنند. کارشناسان ریاضی عقیده دارند که طی دههٔ آینده، روش تراختنبرگ همان تأثیر فراگیری را بر آموزش و علوم خواهد گذاشت که «تند نویسی» بر امر بازرگانی گذاشته است.

اکنون روش تراختنبرگ به صورت اصیل و معتبرش برای نخستین بار در قالب کتابی منتشر می‌شود. ضمن مطالعهٔ کتاب متوجه خواهید شد که پروفسور تراختنبرگ در روش خود نکاتی را وارد کرده است که ابداع خود او نیست. اینها مطالب نسبتاً کم اهمیت‌تری هستند و به منظور ساده کردن هر چه بیشتر به کار گرفته شده‌اند. برای حفظ روال اصلی مطالب، هر جا چنین نکته‌ای در متن آمده، توجه خواننده را به آن جلب کرده‌ایم.

به اعتقاد مؤلفان این کتاب، هر کس دستورهایی را که در اینجا عرضه شده یاد بگیرد می‌تواند در استفاده از روش تراختنبرگ مهارت پیدا کند.

فصل اول

با جدول یا بی‌جدول؟

عمل ضرب

در پیشگفتار کتاب، دربارهٔ هدفهای روش تراختنبرگ سخن گفتیم. اکنون می‌خواهیم با محتوای این روش آشنا شویم. نخستین موضوع بحث، شیوهٔ جدید انجام عمل ضرب است: می‌خواهیم عمل ضرب را بدون از برداشتن جدول ضرب انجام دهیم. ناممکن به نظر می‌رسد؟ نه تنها ممکن است، آسان هم هست. البته باید این توضیح را هم بدهیم که با استفاده از جدول ضرب مخالف نیستیم. اغلب اشخاص جدول ضرب را خوب بلدند؛ به عبارت دیگر همهٔ آن را از بر کرده‌اند و فقط ممکن است در چند مورد دچار تردید شوند. ممکن است کسی در مورد هشت هفت تا، یا شش نُه تا قدری شک کند ولی اعداد کوچکتری مثل چهار پنج تا، برای همه «در حکم آب خوردن» است. ما با استفاده از این معلوماتی که بزحمت حاصل شده، موافقیم. منظور ما در اینجا انسجام بخشیدن به آن است. راجع به این موضوع دوباره در همین فصل سخن خواهیم گفت. اکنون می‌خواهیم برخی عملهای ضرب را بدون استفاده از جدول انجام دهیم.

نخست ضرب اعداد در یازده را بررسی می کنیم. برای سهولت بیان، ابتدا روش کار را به صورت دستورهایی ذکر می کنیم:

ضرب اعداد در یازده

۱. آخرین عدد مضروب (عددی که در یازده ضرب می‌شود) را به عنوان رقم سمت راست جواب، می‌نویسیم.
۲. هر عدد متوالی از مضروب با همسایهٔ طرف راست آن، جمع می‌شود.
۳. اولین عدد مضروب، رقم سمت چپ جواب می‌شود. این آخرین مرحلهٔ کار است.

در روش تراختنبرگ، مثل روش ضرب معمولی، رقمهای جواب یکی‌یکی، از راست به چپ نوشته می‌شوند. مثال ساده‌ای می‌زنیم، ٦٣٣ ضرب در ۱۱:

$$\underline{6\ 3\ 3}\ \times\ 1\ 1$$

محل نوشتن
جواب

با استفاده از این دستورها، جواب را یک رقم، یک رقم، از راست به چپ، زیر ٦٣٣ می‌نویسیم. از این پس برای انجام کار به همین صورت عمل می‌کنیم. ستاره‌های بالای مضروب در این مثال نشان می‌دهند که در هر مرحله از محاسبه، با کدام رقمها سرو کار داریم. حالا دستورها را به کار می‌بندیم:

دستور اول

آخرین رقم ٦٣٣ را به عنوان رقم سمت راست جواب می‌نویسیم:

$$\underline{6\ 3\ \overset{*}{3}}\ \times\ 1\ 1$$
$$3$$

دستور دوم

هر رقم متوالی از ٦٣٣ را با همسایهٔ طرف راست آن جمع می‌کنیم،

۳ بعلاوهٔ ۳ می‌شود ۶:

$$\begin{array}{ccc} \overset{*}{۶} & \overset{*}{۳} & ۳ \\ \hline & ۶ & ۳ \end{array} \times ۱۱$$

این دستور را دوباره به کار می‌بندیم، ۶ بعلاوهٔ ۳ می‌شود ۹:

$$\begin{array}{ccc} \overset{*}{۶} & \overset{*}{۶} & ۳ \\ \hline ۹ & ۶ & ۳ \end{array} \times ۱۱$$

دستور سوم

اولین رقم ۶۶۳ یعنی ۶، رقم سمت چپ جواب می‌شود:

$$\begin{array}{cccc} & \overset{*}{۶} & ۳ & ۳ \\ \hline ۶ & ۹ & ۶ & ۳ \end{array} \times ۱۱$$

پس جواب ۶۹۶۳ است.

در مورد اعداد طولانیتر هم به همین روش عمل می کنیم. دستور دوم که «هر رقم متوالی از مضروب به همسایهٔ طرف راست آن افزوده می‌شود»، در مثال بالا دوبار به کار رفت؛ در عددهای طولانیتر چندین بار آن را به کار می‌بریم. مثال ۷۲۱۳۲۴ ضرب در ۱۱ را در نظر می گیریم:

$$\begin{array}{cccccc} ۷ & ۲ & ۱ & ۳ & ۲ & ۴ \\ \hline \end{array} \times ۱۱$$

دستور اول

آخرین رقم ۷۲۱۳۲۴ به عنوان رقم سمت راست جواب نوشته می‌شود:

$$\begin{array}{cccccc} ۷ & ۲ & ۱ & ۳ & ۲ & \overset{*}{۴} \\ \hline & & & & & ۴ \end{array} \times ۱۱$$

دستور دوم

هر رقم متوالی از ۷۲۱۳۲۴ با همسایهٔ طرف راست آن، جمع می‌شود:

$$\begin{array}{r} ۷\ ۲\ ۱\ ۳\ \dot{۲}\ \dot{۴} \times ۱\ ۱ \\ \hline ۶\ ۴ \end{array}$$

۲ بعلاوهٔ ٤ می‌شود ٦

$$\begin{array}{r} ۷\ ۲\ ۱\ \dot{۳}\ \dot{۲}\ ۴ \times ۱\ ۱ \\ \hline ۵\ ۶\ ۴ \end{array}$$

۳ بعلاوهٔ ۲ می‌شود ۵

$$\begin{array}{r} ۷\ ۲\ \dot{۱}\ \dot{۳}\ ۲\ ۴ \times ۱\ ۱ \\ \hline ۴\ ۵\ ۶\ ۴ \end{array}$$

۱ بعلاوهٔ ۳ می‌شود ٤

$$\begin{array}{r} ۷\ \dot{۲}\ \dot{۱}\ ۳\ ۲\ ۴ \times ۱\ ۱ \\ \hline ۳\ ۴\ ۵\ ۶\ ۴ \end{array}$$

۲ بعلاوهٔ ۱ می‌شود ۳

$$\begin{array}{r} \dot{۷}\ \dot{۲}\ ۱\ ۳\ ۲\ ۴ \times ۱\ ۱ \\ \hline ۹\ ۳\ ۴\ ۵\ ۶\ ۴ \end{array}$$

۷ بعلاوه ۲ می‌شود ۹

دستور سوم

اولین رقم ۷۲۱۳۲٤، رقم سمت چپ جواب می‌شود:

$$\begin{array}{r} \dot{۷}\ ۲\ ۱\ ۳\ ۲\ ۴ \times ۱\ ۱ \\ \hline ۷\ ۹\ ۳\ ۴\ ۵\ ۶\ ۴ \end{array}$$

پس جواب ۷۹۳٤٥٦٤ است.

چنانکه می‌بینید، هر رقم از عدد طولانی دوبار به کار می‌رود. یک بار به عنوان «عدد» و سپس، در مرحلهٔ بعد، به عنوان «همسایه» به کار می‌رود. در مثال اخیر، رقم ۱ (از مضروب) هنگام دادن رقم ٤ از جواب، «عدد» بود، ولی در مرحلهٔ بعد، وقتی با ۲ جمع می‌شد تا رقم ۳ را بدهد، «همسایه» به شمار می‌آمد:

$$\begin{array}{r} ۷\ \dot{۲}\ \dot{۱}\ ۳\ ۲\ ۴ \times ۱\ ۱ \\ \hline ۳ \end{array} \qquad \begin{array}{r} ۷\ ۲\ \dot{۱}\ \dot{۳}\ ۲\ ۴ \times ۱\ ۱ \\ \hline ۴ \end{array}$$

به جای استفاده از این سه دستور، می‌توانیم یک دستور را در مفهوم طبیعی و عادیش به کار ببریم. این دستور چنین است: «با همسایه جمع کن». ابتدا باید صفری جلوی عدد داده شده بنویسیم یا فرض کنیم صفری جلویش هست. سپس دستور جمع کردن با همسایه را به نوبت در مورد همهٔ رقمهای عدد داده شده اجرا می کنیم:

۰ ۶ ۳ ۳ × ۱ ۱

چون ۳ همسایه ندارد چیزی با آن جمع نمی‌شود! — ۳

۰ ۶ ۳ ۳ × ۱ ۱

مانند قبل عمل می‌کنیم — ۳ ۶ ۹

۰ ۶ ۳ ۳ × ۱ ۱

صفر بعلاوهٔ ۶ می‌شود ۶ — ۳ ۶ ۹ ۶

این مثال نشان می‌دهد که چرا باید جلوی مضروب صفر بگذاریم. این صفر به ما یادآوری می کند که کار را زودتر قطع نکنیم. اگر صفر را جلوی عدد ننویسیم، ممکن است فراموش کنیم که رقم ۶ را در آخر جواب بنویسیم و در نتیجه خیال کنیم که جواب همان ۹۶۳ است. جواب همیشه یک رقم طولانیتر از عدد مفروض است، و صفر جلوی عدد موجب رعایت این نکته می‌شود.

حالا خودتان مثالی حل کنید: ٤٤١٣٦٢ ضرب در ۱۱. آن را به صورت مناسب بنویسید:

۰ ۴ ۴ ۱ ۳ ۶ ۲ × ۱ ۱

اگر کار را با ۲ شروع کنید که محل درست شروع است، و مرحله به مرحله به سمت چپ بیایید و در هر مرحله، همسایه را با رقم جمع کنید، باید به جواب درست برسید که ٤٨٥٤٩٨٢ است.

گاه در جمع کردن یک رقم با همسایه‌اش، عددی دو رقمی به

دست می آید، مثلاً ۵ با ۸ که ۱۳ می‌شود. در این حالت ۳ را می‌نویسید و ۱ را همان طور که در حساب دیده‌اید به عنوان «ده بر یک» نگاه می‌دارید. اما خواهید دید که در روش تراختنبرگ هیچ وقت لازم نمی‌شود عدد بزرگی را نگاه دارید. اگر رقمی نگاه داشته شود یا ۱ است یا در مراحل بعدتر احیاناً ۲. این تفاوت در موقع حل مسائل پیچیده تأثیر زیادی دارد.

کافی است برای «ده بر یک»، از یک نقطه و برای «بیست بر دو» که کمتر پیش می آید از دو نقطه استفاده کنیم:

۰ ۱ ۷ ۵ ۴ × ۱ ۱

۱ ۹ ·۲ ۹ ۴

·۲ یعنی ۱۲ که مجموع ۷ و ۵ است

این یکی را خودتان حل کنید: ۷۱۵۶۲٤ ضرب در ۱۱. اول آن را به صورت زیر بنویسید:

۰ ۷ ۱ ۵ ۶ ۲ ۴ × ۱ ۱

زیر رقم ۵ از این عدد یک «ده بر یک» خواهید داشت.

جواب درست مسئله، ۷۸۷۱۸٦٤ است.

در حالت خیلی خاصی از عددهای طولانی که با ۹ شروع می‌شوند و بعد از آن هم رقم بزرگی مثل ۸ دارند، مثلاً در مورد ۹۸۸۳٤ ممکن است در آخرین مرحله یک ۱۰ داشته باشیم. مثال:

۹ ۸ ۸ ۳ ۴ × ۱ ۱

۱ ۰ ·۸ ·۷ ·۱ ۷ ۴

ضرب اعداد در دوازده

برای ضرب هر عدد در ۱۲، دستور زیر را انجام دهید:

هر رقم را دو برابر کنید و همسایه‌اش را با آن جمع کنید

این کار شبیه ضرب کردن در ۱۱ است ولی در اینجا هر «عدد» را قبل از جمع کردن با «همسایه» دو برابر می کنیم. برای ضرب ۴۱۳ در ۱۲، به صورت زیر عمل می کنیم:

مرحلهٔ اول:

۰ ۴ ۱ ۳ × ۱ ۲

۶ — رقم سمت راست را دوبرابر می‌کنیم و زیرخط می‌نویسیم (این رقم همسایه ندارد)

مرحلهٔ دوم:

۰ ۴ ۱ ۳ × ۱ ۲

۵ ۶ — ۱ را دو برابر می‌کنیم و با ۳ جمع می‌کنیم

مرحلهٔ سوم:

۰ ۴ ۱ ۳ × ۱ ۲

۹ ۵ ۶ — ٤ را دو برابر می‌کنیم و با ۱ جمع می‌کنیم

مرحله آخر:

۰ ۴ ۱ ۳ × ۱ ۲

۴ ۹ ۵ ۶ — دو برابر صفرهمان صفراست؛ آن را با ٤ جمع می‌کنیم

جواب ٤۹۵٦ است. اگر خودتان این کار را بکنید، می‌بینید که جواب چقدر زود و راحت پیدا می‌شود.

حالا یک بار خودتان تمرین کنید: ٦٣٢٤٧ ضرب در ۱۲. نخست این عدد را طوری بنویسید که رقمهایش از یکدیگر فاصله داشته باشند و هر رقم از جواب را درست زیر رقمی از ٦٣٢٤٧ که آن را داده است بنویسید. حُسن این کار فقط در مرتب بودن آن نیست، بلکه به خاطر جلوگیری از اشتباه، بسیار پر ارزش است. در روش ضرب تراختنبرگ، روی این نکته تأکید می کنیم زیرا سبب می‌شود که «عدد» و «همسایه» را با یکدیگر اشتباه نگیریم. جای خالی بعدی، که باید رقم بعدی جواب را در آن بنویسیم، درست زیر «عدد» (رقمی که در این مثال باید دو برابر شود) قرار دارد. عدد سمت راست آن «همسایه» است که باید با آن جمع شود. مثال بالا به صورت زیر حل می‌شود:

۰ ۶ ۳ ۲ ۴ ۷ × ۱ ۲

۰۴ دو ۷ تا، ۱٤ تا؛ ده بر یک داریم

۰ ۶ ۳ ۲ ۴ ۷ × ۱ ۲

۰۶ ۰۴ دو ٤ تا، بعلاوهٔ ۷، بعلاوهٔ ۱ می‌شود ۱٦؛ ده بر یک داریم

۰ ۶ ۳ ۲ ۴ ۷ × ۱ ۲

۹ ۰۶ ۰۴ دو ۲ تا، بعلاوهٔ ٤، بعلاوهٔ ۱، می‌شود ۹

بالاخره به اینجا می‌رسید که:

۰ ۶ ۳ ۲ ۴ ۷ × ۱ ۲

۷ ۰۵ ۸ ۹ ۰۶ ۰۴

ضرب اعداد در پنج، در شش و در هفت

برای ضرب در این سه عدد (۵، ٦ و ۷) از مفهوم «نصف» یک رقم استفاده می کنیم. کلمهٔ «نصف» را داخل علامت گیومه گذاشته‌ایم، زیرا نوعی نصف ساده شده است. برای آسان شدن کار، اگر کسری پیدا شد، آن را کنار می گذاریم. مثلاً، «نصف» ۵ را ۲ می گیریم. مقدار واقعی آن ۲/۵ است، و ما با کسرش کاری نداریم. پس «نصف» ۳ می‌شود ۱، و «نصف» ۱ صفر است. البته «نصف» ٤ همان ۲ است، و در مورد همهٔ عددهای زوج، وضع همین طور است.

این مرحله باید فوری انجام شود. نباید بگوییم «نصف ٤ می‌شود ۲» یا چیزی مثل این. نگاه می‌کنیم به ٤ و می‌گوییم ۲. حالا خودتان این کار را با رقمهای زیر انجام بدهید:

۱، ٦، ۳، ۹، ۵، ۸، ٦، ۷، ۰، ۳، ٤، ۹، ۲، ۷، ۸، ۵، ٤، ٦، ۲

در رقمهای فرد یعنی ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ این وضع خاص وجود دارد که کسرها راحذف می کنیم. اما در رقمهای زوج یعنی ۰، ۲، ٤، ٦ و ۸ همان نتیجهٔ معمولی به کار می‌رود.

ضرب اعداد در شش

اکنون از مفهوم «نصف» که در بالا گفتیم، استفاده می کنیم. بخشی از دستور ضرب کردن در ٦ چنین است:

هر عدد را با «نصف» همسایه‌اش جمع کنید.

فعلاً فرض می کنیم که دانستن همین دستور برای ضرب کردن در ٦ کافی است و مسئله زیر را حل می کنیم:

$$\underline{0\ 6\ 2\ 2\ 0\ 8\ 4} \times 6$$

مرحلهٔ اول: اولین «عدد» این عدد طولانی ٤ است که همسایه ندارد پس با چیزی جمع نمی‌شود:

۰ ۶ ۲ ۲ ۰ ۸ ۴ × ۶

۴

مرحلهٔ دوم: دومین عدد ۸ است و همسایه آن ٤ است، پس ۸ را با نصف ٤ (یعنی ۲) جمع می کنیم، می‌شود ۱۰:

۰ ۶ ۲ ۲ ۰ ۸ ۴ × ۶

۰ ۴

مرحلهٔ سوم: عدد بعدی صفر است. نصف همسایه‌اش، ۸ را با آن جمع می کنیم. صفر بعلاوهٔ ٤ می‌شود ٤، ده بر یک هم داریم:

۰ ۶ ۲ ۲ ۰ ۸ ۴ ×۶

۵ ۰ ۴

مرحلهٔ اخیر را در مورد عددهای ۲، ۲، ٦ و صفر متوالیاً انجام می‌دهیم:

۰ ۶ ۲ ۲ ۰ ۸ ۴ × ۶

۳ ۷ ۳ ۲ ۵ ۰ ۴

می خواهید ببینید چقدر این کار راحت است؟ خودتان دو ضرب زیر را انجام بدهید:

۰ ۴ ۴ ۰ ۴ × ۶

۰ ۲ ۸ ۶ ۸ ۸ ۴ ۲ ۴ × ۶

حاصل اولین ضرب ۲٦٤۲٤ و جواب دومی ۱۷۲۱۳۰۵٤٤ است.

با کاری که تا اینجا کردیم، جواب درست مسئله‌ها پیدا شد. ولی این دستور برای ضرب کردن در ٦ کامل نیست. دستور کامل به صورت زیر است:

هر «عدد» را با نصف همسایه‌اش جمع کنید؛ اگر «عدد» فرد است، ۵ تا دیگر هم به آن اضافه کنید.

در اینجا «فرد» بودن «عدد» مطرح است و کاری نداریم به این که «همسایه» فرد است یا نه. فقط نگاه می کنیم به «عدد» که ببینیم فرد

است یا زوج. اگر زوج بود، نصف همسایه‌اش را با آن جمع می کنیم. اگر فرد بود، اول ۵ تا به آن می‌افزاییم و بعد «نصف» همسایه را، همان طور که در بالا عمل کردیم. مثلاً ضرب زیر را در نظر بگیرید:

۰ ۴ ۴ ۳ ۰ ۵ ۲ × ۶

رقمهای ۳ و ۵ فرد هستند. این موضوع با یک نگاه به مضروب معلوم می‌شود. وقتی ضمن عمل به این ۳ و ۵ می‌رسیم، باید با توجه به فرد بودن این رقمها یک ۵ دیگر هم به مجموع بیفزاییم. این ضرب چنین انجام می‌شود:

مرحلهٔ اول:

۰ ۴ ۴ ۳ ۰ ۵ ۲ × ۶

۲ زوج است و همسایه ندارد؛ آن را عیناً درزیر می‌نویسیم ۲

مرحلهٔ دوم:

۰ ۴ ۴ ۳ ۰ ۵ ۲ × ۶

۰۱ ۲

۵ فرد است! ۵ بعلاوهٔ ۵ بعلاوهٔ «نصف» ۲ می‌شود ۱۱

مرحلهٔ سوم:

۰ ۴ ۴ ۳ ۰ ۵ ۲ × ۶

۳ ۰۱ ۲

«نصف» ۵ می‌شود ۲؛ ده بریک راهم با آن جمع می کنیم

مرحلهٔ چهارم:

۰ ۴ ۴ ۳ ۰ ۵ ۲ × ۶

۸ ۳ ۰۱ ۲

۳ فرد است! ۳ بعلاوهٔ ۵ می‌شود ۸

مرحلهٔ پنجم:

۰ ۴ ۴ ۳ ۰ ۵ ۲ × ۶

۵ ۸ ۳ ۰ ۱ ۲

٤ بعلاوهٔ «نصف» ۳

مرحلهٔ ششم:

۰ ۴ ۴ ۳ ۰ ۵ ۲ × ۶

۶ ۵ ۸ ۳ ۰ ۱ ۲

٤ بعلاوهٔ «نصف» ٤

مرحلهٔ آخر:

۰ ۴ ۴ ۳ ۰ ۵ ۲ × ۶

۲ ۶ ۵ ۸ ۳ ۰ ۱ ۲

صفر بعلاوهٔ «نصف» ٤

جواب ۲٦۵۸۳۱۲ است. البته این همه توضیح، صرفاً به خاطر آن است که در آغاز استفاده از این روش، موضوع تا حد امکان روشن‌تر شود. عملاً این کار سریعتر انجام می‌شود زیرا مرحلهٔ جمع کردن با نصف همسایه، بسیار ساده است. با قدری تمرین، این روش جنبهٔ آگاهانهٔ خود را از دست می‌دهد و به حالت خودکار در می‌آید.

شاید با انجام دو ضرب زیر، این موضوع برایتان روشن‌تر شود:

۰ ۸ ۲ ۳ ۴ × ۶

۰ ۶ ۲ ۵ ۰ ۱ ۸ ۸ × ۶

حاصل اولین ضرب ٤۹٤۵٤ و حاصل دومی ۳۷۵۵۱۱۲۸ است.

اعدادی که آنها را در ٦ ضرب کردیم نسبتاً طولانی بودند. آیا این روش برای عددهای یک رقمی مثلاً ۸ ضرب در ٦ هم قابل استفاده است؟

بله، هست، بی آنکه هیچ تغییری لازم شود. مثلاً ببینیم با این روش حاصل ۸ ضرب در ٦ چه می‌شود:

۶ × ۸ ۰
۸

همسایه وجودندارد؛ ۸ بعلاوهٔ «نصف» همسایه همان ۸ ,

۶ × ۸ ۰
۸ ۴

صفر بعلاوهٔ «نصف» ۸ می‌شود ٤

وقتی عددی که در ٦ ضرب می‌شود فرد باشد، مثل ۷، در مرحلهٔ اول باید ۵ را اضافه کنیم. البته در مرحلهٔ دوم آن را اضافه نمی کنیم، زیرا صفر عدد زوج به شمار می آید:

۶ × ۷ ۰
۲

۷ بعلاوهٔ ۵، بعلاوهٔ «نصف» هیچ

۶ × ۷ ۰
۲ ۴

صفر بعلاوهٔ «نصف» ۷، بعلاوهٔ «ده بر یک»

احتمالاً اغلب اشخاص فکر می کنند که جدول ضرب را برای ٦ از بر هستند. شاید بیش از نصف کسانی که مستقیماً با ریاضیات سرو کار ندارند، از این لحاظ به خود مطمئن هستند، گر چه این احساس همیشه بجا نیست. اما در اینجا مسئله تنها این نیست. شیوه‌هایی که در این روش ضرب به کار می‌رود، بعداً در موارد پیچیده‌تری مورد استفادهٔ مجدد قرار خواهد گرفت و صرف نظر از اینکه جدول ضرب را از بر باشیم یا نباشیم به آنها نیاز خواهیم داشت. بهترین راه مطرح کردن این روشهای جدید، به کار گرفتن آنها در مواردی است که قبلاً با آنها آشنا هستیم. در اینجا هم همین راه را در پیش گرفته‌ایم.

بعلاوه (نکته‌ای که اهمیتش بیش از آن است که به نظر می‌رسد)،

این شیوه نقطهٔ آغازی برای کسب عادتهای ذهنی مناسب در محاسبه است. لابد شما هم مطالبی در مورد عادتهای اشخاص عادی در مطالعه، و مؤسساتی که مهارت در تند خوانی را پرورش می‌دهند، شنیده‌اید. صاحب‌نظران می گویند خیلی از اشخاص عادت دارند نوشته‌ها راحرف به حرف بخوانند، و آنچه را می‌خوانند هجی می کنند، یا دست کم تا حد زیادی این کار را انجام می‌دهند. باید در خود این عادت را ایجاد کنیم که هنگام خواندن، تمام کلمه یا عبارت را یکجا تشخیص دهیم. نکته‌های دیگری هم مطرح شده است. خلاصهٔ مطلب این است که: اغلب اشخاص بد مطالعه می کنند زیرا عادتهای آنان در خواندن کـارآمد نیست.

این موضوع کلی، از بعضی لحاظ در مورد حساب هم صادق است. وقتی کسی عادتهای بدی در نحوهٔ انجام اعمال حساب کسب کرد، نتیجه این می‌شود که بخشی از وقت و انرژی خود را به هدر دهد. تنها کسانی چون حسابدارها که اغلب وقتشان صرف کار با اعداد می‌شود، سرانجام دستورالعملهای مناسبی برای خود پیدا می کنند. سایر افراد، حتی اگر در شغل روزمرهٔ خود با محاسبات سرو کار نداشته باشند، با اندک پشتکار و تمرین می‌توانند این روشها را یاد بگیرند. در این فصل و فصل بعد به برخی از این موارد خواهیم پرداخت.

یکی از این مراحل ذهنی را که بسیار ساده هم هست، قبلاً در بیان کاربرد «نصف» همسایه، ذکر کردیم. تمرین ساده‌ای که آنجا می کردیم این بود که با نگاه کردن به یک رقم مثل ۲ یا ۸، بلافاصله می گفتیم ۱ یا ٤، بی آنکه از هیچ مرحلهٔ ذهنی عبور کرده باشیم. جواب باید به محض دیدن ۲ یا ۸ در ذهن نقش ببندد، چنانکه به صورت یک عمل بازتابی در آید. جا دارد که خواننده به رقمهایی که برای تمرین ذکر کرده‌ایم برگردد و شخصاً یک بار دیگر آنها را انجام دهد.

یکی دیگر از مراحل ذهنی درست، آن است که تنها نتیجهٔ افزودن همسایه، یا نصف همسایه را بگوییم، مثلاً در :

۰ ۲ ۶̇ ۴̇ × ۶

۸ ۴

اینجا رقم ۸ مجموع ٦ و نصف ٤ است. اما نباید بگوییم. «نصف ٤ می‌شود ۲، و ٦ و ۲ می‌شود ۸». بلکه به ٦ و ٤ نگاه می کنیم، می‌بینیم نصف ٤، ۲ است و با خود می گوییم «٦، ۸». این کار در آغاز دشوار خواهد بود، بنابراین بهتر است با خود بگوییم «٦، ۲، ۸».

مرحلهٔ دیگری که به تمرین نیاز دارد، مرحله افزودن ۵ است، وقتی که عدد (و نه همسایه) فرد باشد. مثال زیر را در نظر بگیرید:

۰ ۶ ۳̇ ۴̇ × ۶

۰۵ ۴

در اینجا همان طور که از نقطهٔ «ده بر یک» بر می آید، صفر متعلق به ۱۰ است و ۱۰ مجموع ۳ و ۵ (زیرا ۳ فرد است) و ۲ (نصف ٤) است. روال درست آن است که ابتدا بگوییم «۵، ۸، ۲، ۱۰». پس از مدتی تمرین با این روش، سرانجام می‌توانیم آن را به صورت «۸، ۱۰» کوتاه کنیم. رقم ۵ را که به فرد بودن ۳ مربوط است اول می آوریم، زیرا در غیر این صورت ممکن است افزودن آن فراموش شود.

به همین ترتیب، وقتی نقطه‌ای به نشانهٔ «ده بر یک» داریم باید آن را قبل از همسایه (برای ضرب در ۱۱) یا نصف همسایه (برای ضرب در ٦) جمع کنیم. اگر بخواهیم «ده بر یک» را به بعد از افزودن همسایه موکول کنیم، گاهی آن را فراموش خواهیم کرد. در مثال بالا، رقم بعدی به صورت زیر یافته می‌شود:

۰ ۶̇ ۳̇ ۴ × ۶

۸ ۰۵ ۴

به ٦ نگاه می کنیم و با افزودن «ده بر یک» می گوییم «۷»؛ سپس با افزودن «نصف» ۳ می گوییم «۸». بهتر است در اوایل کار، به ٦ نگاه

کنیم و با افزودن «ده بر یک» بگوییم «۷»، سپس به عنوان «نصف» ۳ بگوییم «۱»، بعد هم «۸»، و ۸ را بنویسیم.

وقتی هم «ده بر یک» و هم ۵ (مربوط به فرد بودن) باید افزوده شوند، به جای «۵» می گوییم «۶» و سپس خود عدد را می‌افزاییم. این کار یک مرحله را حذف می کند و براحتی می‌توان به آن عادت کرد.

حالا مداد و کاغذ بردارید و سعی کنید در انجام مثالهای زیر، تنها از مرحله‌های ذهنی درست استفاده کنید. جوابها در دنبالهٔ مثالها داده شده‌اند.

ضرب در یازده (با همسایه جمع کن):

۱. ۰۴۲۳۲

۲. ۰۴۷۴۹۲

ضرب در دوازده (دو برابر کن و با همسایه جمع کن)

۳. ۰۴۲۳۲

۴. ۰۴۷۴۹۲

ضرب درشش (با ۵ برای فرد، و با نصف همسایه جمع کن)

۵. ۰۲۲۲۲

۶. ۰۲۰۰۴

۷. ۰۴۲۳۲

۸. ۰۴۷۴۸

۹. ۰۲۹۰۶

۱۰. ۰۵۲۴۴

۱۱. ۰۳۸۶۵

۱۲. ۰۴۱۱۱

جوابها به قرار زیرند:

۱. ۴۶۵۵۲

۲. ۵۲۲۴۱۲

۳. ۵۰۷۸۴

۴. ۵۶۹۹۰۴

۵. ۱۳۳۳۲

۶. ۱۲۰۲۴

۷. ۲۵۳۹۲

۸. ۲۸۴۸۸

۹. ۱۷۴۳۶

۱۰. ۳۱۴۶۴

۱۱. ۲۳۱۹۰

۱۲. ۲۴۶۶۶

ضرب اعداد در هفت

دستور ضرب اعداد در هفت خیلی شبیه دستور ضرب کردن در شش است:

عدد را دو برابر کنید و با نصف همسایه جمع کنید؛ اگر عدد فرد است ۵ را هم به آن بیفزایید.

فرض کنید می‌خواهیم ٤٢٤٢ را در ۷ ضرب کنیم. در این عدد هیچ رقم فردی وجود ندارد، بنابراین نیازی به افزودن ۵ اضافی نخواهیم داشت. برای حل این مثال، مثل مورد ضرب در شش عمل می کنیم با این تفاوت که در اینجا «عدد» دو برابر می‌شود:

مرحلهٔ اول:

۰ ۴ ۲ ۴ ۲ × ۷

۴ «عدد» ۲ را دو برابر می‌کنیم

مرحلهٔ دوم:

۰ ۴ ۲ ۴ ۲ × ۷

۹ ۴ دو برابر ٤ بعلاوهٔ نصف همسایه

مرحلهٔ سوم:

۰ ۴ ۲ ۴ ۲ × ۷

۶ ۹ ۴ دو برابر ۲ بعلاوهٔ نصف همسایه

مرحلهٔ چهارم:

۰ ۴ ۲ ۴ ۲ × ۷

۹ ۶ ۹ ۴

مرحلهٔ آخر:

۰ ۴ ۲ ۴ ۲ × ۷

۲ ۹ ۶ ۹ ۴ دو برابر صفر همان صفر است، نصف همسایه به آن افزوده می‌شود

حالا مثال دیگری می‌زنیم که رقمهای فرد داشته باشد. رقمهای ۳ و ۱ هر دو فردند:

مرحلهٔ اول:

۰ ۳ ۴ ۱ ۲ × ۷

۴

۲ دو برابر می‌شود؛ همسایه هم ندارد

مرحلهٔ دوم:

۰ ۳ ۴ ۱ ۲ × ۷

۸ ۴

دوبرابر ۱، بعلاوهٔ ۵ زیرا ۱ فرداست، می‌شود ۷، بعلاوهٔ نصف ۲

مرحلهٔ سوم:

۰ ۳ ۴ ۱ ۲ × ۷

۸ ۸ ۴

۴ فرد نیست؛ دو برابر ۴ بعلاوهٔ نصف ۱

مرحلهٔ چهارم:

۰ ۳ ۴ ۱ ۲ × ۷

۰۳ ۸ ۸ ۴

۵ بعلاوهٔ دو برابر ۳، بعلاوهٔ نصف ۴

مرحلهٔ آخر:

۰ ۳ ۴ ۱ ۲

۲ ۰۳ ۸ ۸ ۴ × ۷

دوبرابرصفر، صفراست ولی نصف ۳ و «ده بریک» با آن جمع می‌شود

مراحل ذهنی درست به قرار زیر است:

۱. اگر «ده بر یک» داشته باشیم، می گوییم «۱».

۲. سپس به عدد بعدی نگاه کنیم تا ببینیم آیا فرد است یا نه. اگر بود، ۵ را به ده بر یک می‌افزاییم، می گوییم «۶»، یا اگر ده بر یک نداشتیم می گوییم «۵».

۳. به عدد نگاه می کنیم و آن را به طور ذهنی دو برابر می کنیم، مجموع ۵ و این رقم دو برابر شده را می گوییم. اگر مثلاً رقم ۳ بود،

می گوییم «۵»، سپس می گوییم «۱۱» زیرا دو برابر کردن ۳ که می‌شود ۶ و افزودن ۵ به آن را می‌توان در یک مرحله انجام داد.

۴. با نگاه کردن به همسایه، که مثلاً ۶ است، نصف آن را به آنچه قبلاً داشته‌ایم می‌افزاییم. در بالا به ۱۱ رسیده بودیم. اگر همسایه ۶ باشد، حالا می گوییم «۱۴».

حالا بد نیست قدری با این روش کار کنیم. پرورش ذهن برای این کار خیلی با ارزش است زیرا قدرت تمرکز را افزایش می‌دهد و تمرکز هم عملاً کلید اصلی موفقیت است. اما این پرورش به طور آنی صورت نمی گیرد و برای این کار می‌توانیم چند گام مشخص را به شیوهٔ زیر دنبال کنیم:

اول: به هر یک از رقمهای زیر نگاه کنید و بلافاصله، بدون طی هیچ مرحلهٔ میانی، دو برابر عدد را به صدای بلند بر زبان آورید (با نگاه کردن به ۳، فوراً بگویید «۶» بدون اینکه «۳» را به زبان بیاورید):

۲, ۴, ۱, ۶, ۰, ۳, ۵, ۱, ۴, ۳, ۸, ۲, ۶, ۳,
۷, ۵, ۹, ۲, ۱, ۰, ۶, ۳, ۵, ۲, ۶, ۸, ۷, ۴

دوم: در هر جفت از عددهای زیر، به رقم سمت چپ نگاه کنید و دو برابر آن را به صدای بلند بگویید (به ۳ نگاه کنید و بگویید «۶»)، سپس همسایه را با آن جمع کنید (برای جفت ۳۴ بگویید «۶، ۱۰»).

این روش سریع ضرب اعداد در ۱۲ است:

۲۱	۳۴	۲۰	۱۱	۲۲	۰۲
۲۷	۱۵	۶۰	۷۱	۴۵	۰۹
۳۲	۳۸	۷۴	۵۲	۸۲	۴۱

سوم: در هر جفت از اعداد زیر، به رقم سمت چپ نگاه کنید و دو برابر آن را به صدای بلند بگویید، سپس نصف همسایه را با آن جمع

کنید (به ۲ ۶ نگاه کنید، بگویید «۷، ۴»). این کار همان «ضرب در ۷» برای عددهای زوج است:

۴ ۴	۲ ۶	۶ ۱	۴ ۵	۲ ۷	۲ ۶
۸ ۹	۸ ۸	۸ ۱	۲ ۹	۲ ۲	۵ ۴
۵ ۷	۸ ۱	۴ ۹	۶ ۷	۴ ۳	۶ ۶

چهارم: در مورد هر یک از عددهای زیر، به عدد نگاه کنید و بگویید «۵»، سپس ۵ بعلاوهٔ دو برابر آن عدد را بر زبان آورید (با نگاه کردن به ۳، بگویید «۱۱، ۵»):

۷, ۵, ۳, ۱, ۹, ۳, ۷, ۵, ۱

حالا دوباره این تمرین را تماماً انجام دهید!

پنجم: در هر جفت از اعداد زیر، به عدد سمت چپ نگاه کنید، بگویید «۵»، سپس ۵ بعلاوهٔ دو برابر عدد را مثل گام قبل، بر زبان آورید، بعد از آن بلافاصله نصف همسایه را هم بیفزایید و حاصل افزودن این نصف را بگویید (برای ۴ ۳ بگویید «۱۳، ۱۱، ۵»)؛ این همان ضرب کردن عددهای فرد در ۷ است:

۱ ۸	۱ ۶	۱ ۲	۱ ۵

(جوابها: ۷, ۸, ۱۵, ۱۱)

۳ ۴	۳ ۸	۳ ۲	۳ ۵
۷ ۲	۷ ۵	۵ ۶	۵ ۵

حالا ببینید با چه سرعتی می‌توانید اعداد را در ۷ ضرب کنید. ابتدا اعداد زیر را ضرب کنید که همگی زوج هستند و لزومی به افزودن ۵ در آنها نیست، فقط باید عدد را دو برابر کنید و با نصف همسایه جمع کنید:

٠٦٠٢ ٠٢٢٢ ٠٢٠٢

٠٨٤٦ ٠٦٤٢ ٠٤٤٤

در پایان به اعدادی می‌پردازیم که ارقام فردی هم دارند و باید ۵ را به آنها افزود:

٠٢٥٤ ٠٣٠٢ ٠٢٢٣

(جوابها: ١٧٧٨, ٢١١٤, ١٥٦١)

۰۱۳۴ ۰۶۱۸ ۰۲۷۴

ضرب اعداد در پنج

دستور ضرب اعداد در پنج شبیه دستورهای مربوط به ٦، ٧ ولی از آنها ساده‌تر است. به جای افزودن به «عدد» که در مورد ٦ داشتیم، یا دو برابر کردن آن در مورد ٧، در اینجا فقط به «عدد» نگاه می کنیم. نگاه می کنیم ببینیم عدد فرد است یا زوج. اگر فرد بود، مثل گذشته ۵ را به آن می‌افزاییم:

نصف همسایه، بعلاوهٔ ۵ اگر عدد فرد است.

فرض کنید می‌خواهیم ٤٢٦ را در ۵ ضرب کنیم:

۰ ۴ ۲ ۶ × ۵

۰

ابتدا به ٦ نگاه می کنیم، زوج است؛ پس لازم نیست ۵ را بیفزاییم؛ همسایه هم وجود ندارد

۰ ۴ ۲ ۶ × ۵

۳ ۰

به ٢ نگاه می کنیم، زوج است؛ نصف ٦ را اختیار می کنیم

۰ ۴ ۲ ۶ × ۵

۱ ۳ ۰

به ٤ نگاه می کنیم، زوج است؛ نصف ٢ را می گیریم

$$\begin{array}{cccc} \dot{۰} & \dot{۴} & ۲ & ۶ \times ۵ \\ \hline ۲ & ۱ & ۳ & ۰ \end{array}$$

به صفرنگاه می‌کنیم، زوج است؛ نصف ٤ رادر زیر می‌نویسیم

حال اگر در مضروب رقم فردی موجود باشد، ۵ را می‌افزاییم:

$$\begin{array}{cccc} ۰ & ۴ & ۳ & \dot{۶} \times ۵ \\ \hline & & & ۰ \end{array}$$

مثل گذشته

$$\begin{array}{cccc} ۰ & ۴ & \dot{۳} & \dot{۶} \times ۵ \\ \hline & & ۸ & ۰ \end{array}$$

۳ فرد است؛ ۵ بعلاوهٔ ۳ را می‌گیریم

$$\begin{array}{cccc} ۰ & ۴ & ۳ & ۶ \times ۵ \\ \hline ۲ & ۱ & ۸ & ۰ \end{array}$$

این کار آسان است. با ارقام خیلی کمتر کار داریم. هر چند اندکی غیر عادی به نظر می‌رسد چون نوعی شگرد ذهنی به میان می‌آید: در موضعی که مشغول کاریم، به جای عدد از همسایه استفاده می‌کنیم. در واقع این تمرین خوبی است که موضع عمل را گم نکنیم. بعدها، برای ضرب عددی طولانی در عدد طولانی دیگر، خواهیم دید که برای به خاطر سپردن موضع خود در مضروب، به میزان معینی تمرکز نیاز داریم. این روش ضرب اعداد در ۵، تا حدی یک تمرین مقدماتی است.

اعداد زیر را با روشی که در بالا گفتیم، در ۵ ضرب کنید:

۱. ۰٤٤٤
۲. ۰٤۲۸
۳. ۰٤۲٤۸۸۲
٤. ۰٤۳٤
۵. ۰٦٤۷
٦. ۰۲۵٦٤۱۳
۷. ۰۱٤۲۸۵۷

جوابها به صورت زیرند:

۱. ۲۲۲۰
۲. ۲۱٤۰
۳. ۲۱۲٤٤۱۰
٤. ۲۱۷۰
۵. ۳۲۳۵
٦. ۱۲۸۲۰٦۵
۷. ۷۱٤۲۸۵

ضرب اعداد در هشت و نه

برای ضرب کردن در ۸ و ۹ یک مرحله ذهنی تازه داریم، که موجب پرورش بیشتر ذهن می‌شود. این مرحلهٔ جدید عبارت است از کم کردن «عدد» از ۹ یا از ۱۰. فرض کنید می‌خواهیم ٤٥٦٧ را در ۸ یا ۹ ضرب کنیم؛ در هر دو مورد، مرحلهٔ اول این است که رقم سمت راست عدد طولانی (یعنی ۷) را از ۱۰ کم کنیم. ابتدا با نگاه کردن به رقم انتهایی سمت راست ٤٥٦٧ می گوییم «۳». برای این کار، عبارت «۷ از ۱۰ می‌شود ۳» را برزبان نمی آوریم و باید واکنش ما فوری باشد. به ۷ نگاه می کنیم و می گوییم «۳». برای آنکه سرعت واکنش خود را بسنجید، به رقمهای زیر نگاه کنید و فوراً نتیجهٔ کاستن آن از ۱۰ را بر زبان آورید:

۷,٦, ۹, ۲, ۸, ۱, ۷, ٤, ۲, ۳, ۹, ٦, ۵, ۳, ۱, ۹

در مواردی لازم می‌شود که عدد را به جای ۱۰ از ۹ کم کنیم. در این حالت، مثلاً به ۷ نگاه می کنیم و فوراً می گوییم «۲». این کار را هر چه سریعتر که می‌توانید برای رقمهای زیرانجام دهید:

۷, ۸, ۲, ٤, ۹, ۵, ۱, ۷, ۲, ۰, ۳, ۸, ٦, ۵, ۱, ۰

اکنون می‌توانید هر عددی را سریع و راحت و بدون استفاده از جدول ضرب، در ۹ ضرب کنید. بهترین راه بیان این روش، ارائه دستوری است که لازم نیست آن را از بر کنید زیرا با اندکی تمرین خود به خود در ذهن شما نقش می‌بندد. دستور مورد نظر، به این صورت است:

ضرب اعداد در نه

۱. رقم انتهایی سمت راست مضروب را از ده کم کنید. نتیجه، رقم سمت راست جواب است.

۲. در مورد یکایک رقمهای بعدی، تا آخرین رقم، به نوبت آنها از نه کم کنید و با همسایه جمع کنید.
۳. در مرحلهٔ آخر، وقتی به صفری که جلوی عدد طولانی قرار گرفته می‌رسید، یکی از همسایه کم کنید و نتیجه را به عنوان رقم سمت چپ جواب بنویسید.

البته در همهٔ این مراحل، اگر نقطه‌ای (به نشانهٔ ده بر یک) وجود داشته باشد، باید آن را مانند همیشه افزود.

اکنون مثالی از کارکرد این دستور را شرح می‌دهیم: ۸۷۶۹ ضرب در ۹.

۰ ۸ ۷ ۶ ۹ × ۹
۷ ۸ ۹ ·۲ ۱

مرحلهٔ اول: در عدد ۸۷۶۹، رقم ۹ را از ۱۰ کم می‌کنیم، و رقم ۱ جواب را به دست می‌آوریم.
مرحلهٔ دوم: رقم ۶ را از ۹ کم می‌کنیم (می‌شود ۳) و همسایه را که ۹ است با آن جمع می‌کنیم؛ نتیجه ۱۲ است، پس ۲ را با یک نقطه می‌نویسیم.
مرحلهٔ سوم: ۷ از ۹ می‌شود ۲، با همسایه (۶) می‌شود ۸، و با نقطهٔ ده بر یک می‌شود ۹.
مرحله چهارم: ۸ از ۹ می‌شود ۱، با همسایه می‌شود ۸.
مرحلهٔ پنجم: این آخرین مرحله است. و به صفر سمت چپ رسیده‌ایم. پس یکی از رقم سمت چپ ۸۷۶۹ کم می‌کنیم، پس رقم سمت چپ جواب ۷ است.

این ضرب را خودتان انجام دهید: ۸۸۸۸ ضرب در ۹.

۰ ۸ ۸ ۸ ۸ × ۹

رقم انتهایی جواب ۲ است، زیرا ۸ از ۱۰ می‌شود ۲. دراین مثال، ده بر یک نداریم و رقم سمت چپ ۷ است یعنی یکی کمتر از رقم ۸ سمت چپ

مضروب. جواب درست ۷۹۹۹۲ در می آید.
چند مثالی برای تمرین در زیر آورده شده که از آسان شروع می‌شود و کم کم به مثالهای سخت‌تر می‌رسد. جوابها را نیز در آخر آنها داده‌ایم.

۱. ۰ ۳ ۳ ۲. ۰ ۹ ۸ ٦ ۵ ٤ ۳. ۰ ۸ ٦ ۷ ۳ ۳

٤. ۰ ٦ ۲ ۲ ٦ ۵. ۰ ۸ ۰ ۵ ٦. ۰ ۷ ۷ ۵ ٤ ۹ ٦ ۵

جوابها:

۱. ۲۹۷ ۲. ۸۸۷۸۸٦ ۳. ۷۸۰۵۹۷

٤. ۵٦۳٤ ۵. ۷۲٤۵ ٦. ٦۹۷۹٤٦۸۵

ضرب اعداد در هشت

۱. رقم اول: از ده بکاهید و دو برابر کنید.
۲. رقمهای میانی: از نه بکاهید و نتیجه را دو برابر کنید، **سپس با همسایه جمع کنید.**
۳. رقم سمت چپ: از رقم سمت چپ مضروب، دو تا **کم کنید.**

ضرب کردن در ۸ مثل ضرب کردن در ۹ است با این تفاوت که اینجا دو برابر کردن هم داریم و اینکه در آخرین مرحله، از رقم سمت چپ مضروب، به جای یکی، ۲ تا کم می کنیم. مثال:

$$\underline{۰\ ۷\ ۸\ \dot{۹}} \times ۸$$
$$۲$$

این ۲، نتیجهٔ کاستن ۹ از ۱۰ و دو برابر کردن حاصل است. حالا در

عدد ۷۸۹ به ۸ می‌رسیم که یک «رقم میانی» به شمار می‌آید، بنابراین آن را از ۹ می‌کاهیم و حاصل را دو برابر می‌کنیم و سپس با همسایه جمع می‌کنیم:

      * *
۰ ۷ ۸ ۹ × ۸
·۱ ۲

سپس ۷ نیز رقم «میانی» است؛ پایان کار وقتی است که به صفر جلوی ۷۸۹ برسیم، پس در مورد ۷، رقم ۲ (حاصل کاستن ۷ از ۹) را دو برابر می‌کنیم و این ٤ را با ۸ و با ده بر یک، جمع می‌کنیم:

   * *
۰ ۷ ۸ ۹ × ۸
·۳ ·۱ ۲

دست آخر، ۲ تا از ۷ می‌کاهیم و با ده بر یک جمع می‌کنیم:

* *
۰ ۷ ۸ ۹ × ۸
۶ ·۳ ·۱ ۲

می‌بینید که پس از آشنا شدن با این روش، چقدر کار ساده‌تر و آسانتر از ضرب معمولی است. در ضرب معمولی نه تنها باید در استفاده از جدول ضرب اشتباه نکنیم (مثلاً بسیار کسان در مورد هشت ۷ تا، هشت ۸ تا و هشت ۹ تا که در اینجا لازم است دچار تردید می‌شوند)، بلکه دوبار هم باید رقم ۷ دهگان را به مرحلهٔ بعد منتقل کنیم که در آن امکان اشتباه پیش می‌آید. اما در روش بدون جدول، تنها ده بر یک‌ها را باید منتقل کنیم.

البته تنها وقتی می‌توانیم بگوییم به این روش تسلط یافته‌ایم که نیازی نداشته باشیم به هیچ «دستور»ی فکر کنیم. برای این منظور باید قدری تمرین کنیم تا این دستور کار، ملکهٔ ذهنمان شود. مسلماً نیم ساعت یا یک ساعت تمرین با این روش، خیلی کمتر از ساعتها تمرین مکرری است که کودکان در مدرسه صرف یاد گرفتن جدول ضرب می‌کنند.

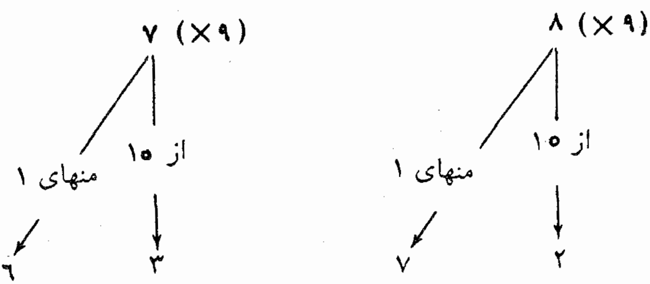
برای تمرین، اعداد زیر را در ۸ ضرب کنید:

۰۴۹ (جواب: ۳۹۲)	۰۷۳ (جواب: ۵۸۴)
۰۹۸	۰۶۹
۰۸۵۸۶	۰۷۷۷۷
۰۳۶۶۹	۰۶۲۸۸

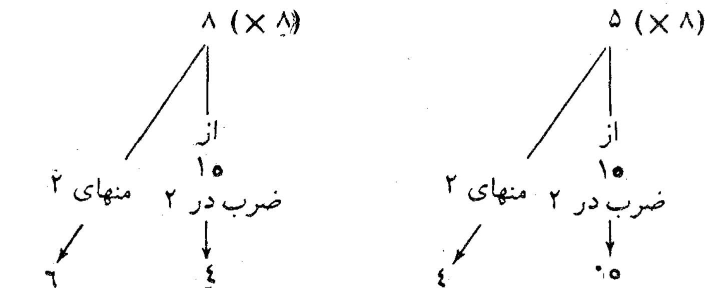
همین روش را می‌توانیم برای اعداد یک رقمی هم به کار ببریم. فرض کنید می‌خواهیم عدد ۷ را در ۹ (که دو برابر کردن ندارد!) ضرب کنیم. در اینجا عدد میانی نداریم. پس مثل همیشه در مرحلهٔ اول ۷ را از ۱۰ می‌کاهیم، سپس مانند همهٔ مراحل آخر یکی را از ۷ کم می‌کنیم. نتیجه به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{array}{cc} ۰ & ۷ \\ \hline ۶ & ۳ \end{array} \times ۹$$

برای این اعداد یک رقمی الگوی ساده‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:



همین موضوع برای ضرب کردن در ۸ هم صادق است، ولی در اینجا داریم «از ۱۰» ضرب در ۲ و «منهای ۲»:



در این روش، هنگام ضرب کردن رقمهای کوچکتر (۱ تا ۵) در ۸، ده بر یک خواهیم داشت. البته معمولاً نیاز به این کار پیش نمی آید زیرا همهٔ ما جدول ضرب را برای این اعداد کوچک، خوب بلدیم. فقط در مورد اعداد بزرگتر (مثل ۷ هشت تا) است که بعضی افراد دچار اشکال می‌شوند . در این گونه موارد ، در نموداری که برای ۸ رسم کردیم، ده بر یک وارد نمی‌شود . در مورد ضرب در ۹ هم هیچ وقت ده بر یک نخواهیم داشت.

اگر کسی در به خاطر سپردن جدول ضرب اشکالی داشته باشد ، می‌تواند از این نمودارها استفاده کند . برای این کار لزومی ندارد هر بار مراحل یاد شده را انجام دهد . با چند بار ترسیم یا حتی تجسم این نمودارها ، زمینه‌ای در ذهن ایجاد می‌شود تا فوراً تشخیص داده شود که ۷ نُه تا می‌شود ۶۳ ، تا آخر. در واقع هم آنچه مورد نظر است، چیزی جز همین زمینه نیست. تنها نکته‌های منفردند که به یاد آوردنشان دشوار است. مثلاً فرض کنید که چند ماه کسی را که دوست نزدیکتان بوده ندیده باشید . شاید شمارهٔ تلفن او را به یاد نیاورید زیرا شمارهٔ تلفن، نکتهٔ منفردی است. اما احتمالاً رقمهای سمت چپ این شماره را به یاد خواهید آورد ، زیرا این رقمها تابع الگوی خاصی هستند : این رقمها بستگی دارند به اینکه دوستتان در کدام منطقهٔ شهر زند گی می کند ، و شما قاعدتاً محل زند گی او را به خاطر دارید . تطبیق دادن یک نکته با هر نوع الگو، موجب تثبیت آن نکته در ذهن می‌شود . در مورد ریاضیات، بهترین الگو،

نحوهٔ استخراج مطلب است. هیچ ریاضیدانی قضیه مورد نظرش را صرفاً به یاری نیروی حافظه و به مثابه واقعیتی منفرد، به یاد نمی آورد. معمولاً طرحی کلی از اثبات یا نحوهٔ به دست آوردن آن قضیه در ذهن او به اندیشهٔ خود قضیه پیوسته است. در مورد کار با این نمودارها هم همین گفته صادق است. وقتی هفت ۹ تا را می‌خواهیم، «۶۳» به لایهٔ جلویی ضمیرمان می آید و برای ظهور آن، نمودار در زمینهٔ ذهن نقش می‌بندد.

ضرب اعداد در چهار

اغلب افراد، حتی آنها که کمتر از همه با ریاضیات سر و کار دارند، نسبت به توانایی خود در ضرب کردن اعداد در ٤ مطمئن هستند. با این حال، برای کامل بودن مطلب، نحوهٔ انجام این کار را با روشی شبیه آنچه تا کنون دیده‌ایم، بیان می کنیم.

برای این کار از ترکیب دو مطلب که قبلاً ذکر شده استفاده می کنیم. اولی، ضرب کردن در ۹ است به صورتی که پیشتر گفتیم و دومی، اختیار کردن «نصف» (در واقع نصف کوچکتر)، و افزودن ۵ برای رقمهای فرد است. به عبارت دقیقتر، ضرب اعداد در ٤، مثل ضرب کردن در ۹ است با این تفاوت که به جای «جمع کردن با همسایه»، که در مورد ۹ داشتیم، در اینجا با «نصف» همسایه جمع می کنیم و طبق معمول برای رقمهای فرد ۵ را هم می‌افزاییم. بیان کامل این دستور به صورت زیر است:

۱. رقم سمت راست عدد داده شده را از ده کم کنید و اگر این رقم فرد بود پنج را به آن بیفزایید.
۲. رقمهای عدد داده شده را به طور متوالی از نُه کم کنید، اگر رقم فرد بود پنج را بیفزایید، و با نصف همسایه جمع کنید.
۳. وقتی به صفر جلوی عدد داده شده رسیدید، از نصف همسایهٔ این صفر، یکی کم کنید.

مثال۱: ۲۰۶۸۴ ضرب در ۴

مرحلهٔ اول: در عدد ۲۰۶۸۴، رقم ۴ را از ۱۰ کم می کنیم:

۰ ۲ ۰ ۶ ۸ ۴ × ۴

۶

مرحلهٔ دوم:

۰ ۲ ۰ ۶ ۸ ۴ × ۴

۳ ۶

۳، حاصل کاستن ۸ از ۹، بعلاوهٔ نصف ۴ است

مرحلهٔ سوم:

۰ ۲ ۰ ۶ ۸ ۴ × ۴

۷ ۳ ۶

۷، حاصل کاستن ۶ از ۹، بعلاوهٔ نصف ۸ است

مرحلهٔ چهارم:

۰ ۲ ۰ ۶ ۸ ۴ × ۴

۰۲ ۷ ۳ ۶

۰۲، حاصل کاستن صفر از ۹، بعلاوهٔ نصف ۶ است

مرحلهٔ پنجم:

۰ ۲ ۰ ۶ ۸ ۴ × ۴

۸ ۰۲ ۷ ۳ ۶

۸، حاصل کاستن ۲ از ۹، بعلاوهٔ ده بر یک است

مرحلهٔ آخر:

۰ ۲ ۰ ۶ ۸ ۴ × ۴

۰ ۸ ۰۲ ۷ ۳ ۶

صفر، نصف ۲ منهای ۱ است

مثال ۲: در مثال ۱، چون همهٔ رقمهای ۲۰۶۸۴ زوج بودند نیازی به «افزودن ۵» پیش نیامد. در این مثال برخی از رقمها فردند. عدد ۳۶۵۱۸۷ را در ۴ ضرب کنید.

مرحلهٔ اول:

۰ ۳ ۶ ۵ ۱ ۸ ۷ × ۴
۸

۷ از ۱۰ می‌شود ۳، چون ۷ فرد است، ۵ را هم می‌افزاییم

مرحلهٔ دوم:

۰ ۳ ۶ ۵ ۱ ۸ ۷ × ۴
۴ ۸

۸ از ۹ می‌شود ۱، بعلاوهٔ نصف ۷

مرحلهٔ سوم:

۰ ۳ ۶ ۵ ۱ ۸ ۷ × ۴
۷ ۴ ۸

این ۷، حاصل کاستن ۱ از ۹ است، بعلاوهٔ ۵ بعلاوهٔ نصف ۸

مرحله های چهارم، پنجم و ششم: مثل مراحل قبل عمل می کنیم. توجه کنید که ۳ و ۵ فردند و برای آنها باید ۵ را افزود:

۰ ۳ ۶ ۵ ۱ ۸ ۷ × ۴
۴ ۶ ۰ ۷ ۴ ۸

مرحلهٔ آخر:

۰ ۳ ۶ ۵ ۱ ۸ ۷ × ۴
۱ ۴ ۶ ۰ ۷ ۴ ۸

این ۱، برابرست با نصف ۳، منهای ۱ بعلاوه ده بر یک

در صورت تمایل می‌توانید ضربهای زیر را با این روش انجام دهید:

۱. ۰ ۲ ۶ ۸ ۸ × ۴

۲. ۰ ۸ ۶ ۰ ۴ ۴ ۲ × ۴

۳. ۰ ۲ ۴ ۷ ۸ ۴ ۷ × ۴

۴. ۰ ۵ ۴ ۶ ۱ ۸ × ۴

جوابها:

۱. ۱۰۷۵۲   ۲. ۳۴۴۱۷۶۸   ۳. ۹۹۱۳۸۸   ۴. ۲۱۸۴۷۲

در مقایسه با تمرینهایی که برای یاد گرفتن جدول ضرب لازم است، با مقدار خیلی کمی تمرین، این کار برایتان آسان خواهد شد. بعد از چند ساعت، این اعمال برای ما به صورت کاملاً طبیعی در می آید.

ضرب اعداد در رقمهای دیگر

ضرب اعداد در سه

ضرب کردن در ۳ مثل ضرب کردن در ۸ است و تنها چند تفاوت با آن دارد. به جای جمع کردن با همسایه که در مورد ۸ داشتیم، در اینجا تنها با «نصف» همسایه جمع می کنیم. این را هم البته به یاد داریم که اگر عدد فرد بود، ۵ اضافی را هم می‌افزاییم. جمع کردن با نصف همسایه همیشه ۵ اضافی برای عددهای فرد را به همراه دارد. می‌خواهیم ۲۵۸۸ را در ۳ ضرب کنیم.

۱. رقم اول: از ده بکاهید و دو برابر کنید برای عددهای فرد، پنج را بیفزایید.

۲. رقمهای میانی: عدد را از نُه بکاهید و حاصل را دو برابر کنید، سپس با نصف همسایه جمع کنید. اگر عدد فرد بود، با پنج هم جمع کنید.

۳. رقم سمت چپ: رقم سمت چپ مضروب را نصف کنید؛ سپس دو تا از آن بکاهید.

مرحلهٔ اول:

$$\underline{0\ 2\ 5\ 8\ \dot{8}} \times 3$$
$$4$$

این ۴ حاصل کاستن ۸ از ۱۰ ضرب در دو است؛ همسایه نداریم

مرحلهٔ دوم:

۰ ۲ ۵ ۸ ۸ × ۳

۶ ۴

این ۶، حاصل کاستن ۸ از ۹، ضرب در دو است،
بعلاوهٔ نصف ۸

مرحلهٔ سوم:

۰ ۲ ۵ ۸ ۸ × ۳

·۷ ۶ ۴

۵ از ۹، ضرب در دو؛ بعلاوهٔ ۵، بعلاوهٔ نصف ۸

مرحلهٔ چهارم:

۰ ۲ ۵ ۸ ۸ × ۳

·۷ ·۷ ۶ ۴

مرحلهٔ آخر:

۰ ۲ ۵ ۸ ۸ × ۳

۰ ۷ ·۷ ۶ ۴

این صفر، نصف ۲ است، بعلاوه ده بر یک، منهای ۲

در آخرین مرحله، مثل همیشه رقم سمت چپ جواب را از رقم انتهایی سمت چپ مضروب به دست می آوریم. هنگام ضرب کردن در ۸، این رقم آخر جواب را با کاستن ۲ از رقم انتهایی سمت چپ مضروب به دست می آوردیم. اکنون برای ضرب کردن در ۳، از نصف آن رقم، ۲ را می کاهیم. گاه همانند مثال اخیر، نصف رقم انتهایی سمت چپ فقط ۱ است و گاه هم صفر. در همهٔ این موارد، عملاً ده بر یک یا بیست بر دو داریم، در نتیجه وقتی ۲ را می کاهیم، صفر باقی می‌ماند. این موضوع در مثال ما دیده شد.

ضرب اعداد در دو

ضرب کردن در ۲، کار پیش پا افتاده‌ای است. در روال دستورالعملهای ما، رقمها به طور متوالی در ۲ ضرب می‌شوند و با همسایه کاری نداریم (برای دو برابر کردن هر عدد می‌توانیم آن را با خودش جمع کنیم، پس لزومی ندارد که حتی قسمت ضرب در ۲ی جدول ضرب را به خاطر بسپریم).

ضرب اعداد در یک

ضرب کردن هر عدد در یک، تغییری در آن نمی‌دهد. عدد، هر قدر هم طولانی باشد وقتی در ۱ ضرب شود خودش نتیجه می‌شود: مثلاً ۱۷۲۰۵ ضرب در ۱ برابرست با ۱۷۲۰۵. پس این دستور را می‌توان بیان کرد: یکایک رقمهای عدد مفروض را عیناً زیرش بنویسید.

چند دستور اخیر، برای ضرب کردن در رقمهای کوچک را تنها به خاطر کامل شدن مطلب ذکر کردیم. با این حال، توجه به این نکته اهمیت دارد که در همهٔ موارد، برای ضرب کردن در هر رقمی، عملهایی که واقعاً لازم‌اند تعدادشان کم است و همه ساده هستند. کاستن از ۹، دو برابر کردن، اختیار کردن «نصف»، و جمع کردن با همسایه - اینها کل عملهایی است که لازم می‌شود. با یکی دو ساعت تمرین، این کارها حالت طبیعی و خودکار پیدا می کنند.

به همین دلیل بود که پروفسور تراختنبرگ اعتقاد داشت، روشهای این فصل خیلی به درد بچه‌ها می‌خورد. آنان مدتها پیش از آنکه بتوانند جدول ضرب را به طور کامل حفظ کنند، براحتی قادر به استفاده از این روشها هستند. البته، با این روشها می‌توانند هر ضربی را با اعدادی هر قدر طولانی، انجام دهند. هر ضرب یک رقمی با استفاده از این دستورها، یک حاصلضرب فرعی مربوط به ضرب معمولی را می‌دهد، و مجموع کلی با جمع کردن ستونها به روش معمولی به دست می آید:

	۳۷۶۵۴ × ۴۹۸
با استفاده از دستور، ۳۷۶۵۴ را در ۸ ضرب کنید	۳۰۱۲۳۲
دستور ضرب اعداد در ۹ را به کار برید	۳۳۸۸۸۶
دستور ضرب در ۴ را به کار برید	۱۵۰۶۱۶
جواب، از جمع ستونها به دست می‌آید	۱۸۷۵۱۶۹۲

پس، کودکی که فقط ساده‌ترین نوع جمع و تفریق کردن را یاد گرفته باشد می‌تواند ضربهای طولانی را بی معطلی انجام دهد.

یادآوری: شیوه‌هایی از روش تراختنبرگ که در این فصل آمده، عموماً به بزرگسالان نیز تدریس می‌شود. در مورد بزرگسالان، هدف چیز دیگری است. آنها قبلاً، در روزگار نوجوانی، صدها ساعت وقت خود را صرف به خاطر سپردن جدول ضرب کرده‌اند و کم و بیش به آن تسلط دارند. این روش تازه، جاهای خالی را پر می‌کند. تأثیر روانی رویارویی با موضوع از دیدگاهی تازه چنان است که موارد تردیدآمیز جدول را به طور قطعی در ذهن آنان تثبیت می‌کند. بعلاوه، همان طور که قبلاً گفته شد، تازگی این روش موجب برانگیختن دوبارهٔ توجه نسبت به موضوع می‌شود و این به نوبهٔ خود نیمی از ماجراست. تجربهٔ مؤسسهٔ تراختنبرگ طی یک دورهٔ سیزده ساله اهمیت این نکات را نشان می‌دهد.

چکیدهٔ مطالب

پس از مقدار معینی تمرین، دیگر نیازی به دستورها نیست. پرداختن به حل مثالها سبب می‌شود که این کار به صورت نیمه خودکار در آید و همین بهترین راه فرا گرفتن دستورهاست. با وجود این، برای رعایت خواستهٔ کسانی که تمایلی به این موضوع دارند، روشهایی را که در این فصل عرضه شده، در اینجا تکرار می‌کنیم. در بیان دستورها قرار بر این است که منظور از «عدد» رقمی از مضروب است که در زیر آن، رقم

بعدی جواب نوشته خواهد شد، و «همسایه» رقمی است که بلافاصله در سمت راست «عدد» قرار دارد. در صورت موجود نبودن همسایه (در انتهای سمت راست عدد مفروض)، همسایه صفر است - یعنی از آن چشمپوشی می‌شود. همچنین، در جلوی مضروب باید صفری گذاشته شود تا فراموش نکنیم که ممکن است رقمی از جواب، زیر آن ظاهر شود.

برای ضرب در	به شیوه زیر عمل می‌شود:
۱۱	با همسایه جمع کنید.
۱۲	عدد را دو برابر کنید و با همسایه جمع کنید.
۶	اگر عدد فرد است ۵ را با آن جمع کنید؛ اگر زوج است چیزی نیفزایید. با «نصف» همسایه جمع کنید (کسرها را در صورت وجود، حذف کنید.)
۷	عدد را دو برابر کنید و اگر عدد فرد است ۵ را به آن بیفزایید و با «نصف» همسایه جمع کنید.
۵	«نصف» همسایه را اختیار کنید، و اگر عدد فرد است با ۵ جمع کنید.
۹	مرحلهٔ اول: از ۱۰ بکاهید. مرحله‌های میانی: از ۹ بکاهید و با همسایه جمع کنید. مرحلهٔ آخر: از رقم سمت چپ مضروب یکی کم کنید.

۸ مرحلهٔ اول: از ۱۰ بکاهید و دو برابر کنید.
مرحلهٔ میانی: از ۹ بکاهید، دو برابر کنید، و با همسایه جمع کنید.
مرحلهٔ آخر: از رقم سمت چپ مضروب ۲ تا کم کنید.

۴ مرحلهٔ اول: از ۱۰ بکاهید، و اگر عدد فرد است با ۵ جمع کنید.
مرحله های میانی: از ۹ بکاهید و با «نصف» همسایه جمع کنید، بعلاوهٔ ۵ اگر عدد فرد است.

مرحلهٔ آخر: «نصف» رقم سمت چپ مضروب را بگیرید و یکی از آن کم کنید.

۳ مرحلهٔ اول: از ۱۰ بکاهید و دو برابر کنید، و اگر عدد فرد است ۵ را بیفزایید.
مرحله های میانی: از ۹ بکاهید و دو برابر کنید، اگر عدد فرد است ۵ را بیفزایید، و با «نصف» همسایه جمع کنید
مرحلهٔ آخر: «نصف» رقم سمت چپ مضروب را بگیرید و ۲ تا از آن کم کنید.

۲ هر یک از رقمهای مضروب را دو برابر کنید و با همسایه کاری نداشته باشید.

۱ همان عدد مضروب را عیناً در زیر بنویسید.

۰ حاصل ضرب صفر در هر عددی همیشه صفر است.

فصل دوم

ضرب سریع به روش مستقیم

در فصل اول دیدیم که چگونه عمل ضرب را می‌توان بدون استفاده از جدول ضرب انجام داد. با استفاده از این مطالب تازه توانستیم تسلط بهتری به جدول ضرب داشته باشیم و اشکالاتی را که احیاناً در به خاطر سپردن بعضی موارد آن داشته‌ایم برطرف کنیم. اکنون دیگر اطمینان بیشتری به خود داریم که هر گاه لازم شود می‌توانیم سریع و دقیق از جدول ضرب استفاده کنیم.

در این روش تازه برای انجام عمل ضرب، یاد گرفته‌ایم که با استفاده از هر جفت رقم در مضروب، رقمی از جواب را به دست آوریم. لابد به یاد دارید که «عدد» یعنی رقمی که درست بالای یک جای خالی که رقم بعدی جواب در آن وارد می‌شود، قرار گرفته است؛ «همسایه» رقمی از مضروب است که بلافاصله در طرف راست «عدد» واقع است. این جفتهای «عدد و همسایه» به صورتی که گفته شد، با اندک تغییراتی در این فصل نیز به کار خواهد رفت.

اکنون در روش خود برای فشرده سازی عمل ضرب، گام بعدی را برمی‌داریم. در اینجا یاد می گیریم هر عدد را در هر عدد دیگر، ولو آنکه هر قدر طولانی باشند ضرب کنیم، و بدون هیچ گونه مراحل میانی،

مستقیماً به جواب برسیم. مثلاً شکل فشردهٔ ضرب ۶۲۵ در ۳۴۶ در ظاهر چنین خواهد بود:

۰ ۰ ۰ ۶ ۲ ۵ × ۳ ۴ ۶
ـــــــــــــــ
۲ ۱ ۶ ۲ ۵ ۰

حالا می‌خواهیم بدانیم که چنین عمل ضربی چگونه انجام می‌شود. جز آنچه در بالا می‌بینید، هیچ چیز دیگری نوشته نمی‌شود. سه ردیف رقمهای میانی که در ضرب معمولی داشتیم، در اینجا به کار نمی‌آید. صورت مسئله را، هر چه باشد، می‌نویسیم و سپس بلافاصله جواب آن را یادداشت می‌کنیم.

برای این کار دو راه وجود دارد. هر یک از این دو راه در برخی موارد برتریهایی دارد، با این حال از هر دوی آنها همیشه می‌توان جواب درست را به دست آورد. خوشبختانه این دو روش وجوه اشتراک زیادی دارند و براحتی می‌توان هر دو را یاد گرفت. در این فصل، به تشریح روشی که آن را روش «مستقیم» ضرب نامیده‌ایم می‌پردازیم. این روش بخصوص برای مواردی که رقمهای مضروب کوچک باشند، مثلاً از تعدادی رقمهای ۱ و ۲ و ۳ تشکیل شده باشند، بسیار مناسب است. در فصل بعد، به شرح روش دیگر که آن را «روش سریع» می‌نامیم، خواهیم پرداخت. روش اخیر، اساساً همان روش مستقیم است که نکات تازه‌ای به آن افزوده شده است. این نکات تازه در واقع تدابیری است برای رفع دشواریهایی که در مورد اعدادی شامل رقمهای بزرگ، مثل ۹۸۷ ضرب در ۶۸۸، پیش می‌آید.

هر یک از این دو روش را در هر مسئله‌ای می‌توان به کار گرفت. از هر دوی این روشها همیشه جواب درست حاصل می‌شود. قدری جلوتر دلیلی برای انتخاب این یا آن روش ذکر کردیم، ولی این تنها به خاطر سهولت کار است، و در هر مورد خاص، بسته به نظر خود شخص، یکی از دو روش می‌تواند به کار رود.

ضمناً، بد نیست یادآوری کنیم، احتمالاً پیش از آنکه روش تراختنبرگ عرضه شود، کسانی که اعمال ریاضی سریع انجام می‌داده‌اند، روشی شبیه به روش مستقیم به کار می‌برده‌اند. این «افسونگران ریاضی» که با استفاده از محاسبات ذهنی تردستیهایی می‌کردند که حیرت ناظران را بر می‌انگیخت، معمولاً اسرار روشهای خود را پیش کسی فاش نمی‌کردند، اما ظاهراً از روشی شبیه روش مستقیم که در اینجا بیان می‌شود، احیاناً با برخی تغییرات، استفاده می‌کردند.

بد نیست موضوع را با مثال ساده‌ای از روش مستقیم آغاز کنیم و بعد به موارد دشوار بپردازیم. پس ابتدا عدد نسبتاً کوچکی را در عدد نسبتاً کوچک دیگری ضرب می‌کنیم.

مضروبهای کوتاه:

ضرب اعداد دو رقمی در دو رقمی

فرض کنید می‌خواهیم ۲۳ را در ۱۴ ضرب کنیم. برای این کار، ضرب را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\underline{0\ 0\ 2\ 3} \times 14$$

(محل نوشتن جواب)

وقتی مضروب فیه عددی دو رقمی باشد، باید مثل حالت بالا، دو صفر جلوی مضروب بگذاریم.

جواب را زیر ۲۳ ۰۰ می‌نویسیم و در هر مرحله یک رقم از آن را با شروع از راست، ثبت می‌کنیم. به عبارت دیگر، آخرین رقم جواب را زیر ۳ می‌نویسیم و بقیهٔ رقمهای جواب را یکی‌یکی به طرف چپ وارد می‌کنیم.

مرحلهٔ اول: رقم سمت راست مضروب، یعنی رقم ۳ از عدد ۲۳ را

در رقم سمت راست مضروب فیه، یعنی رقم ٤ از عدد ١٤ ضرب می کنیم. در محل جواب، رقم ۲ از عدد ۱۲ و ده بر یک را (به صورت یک نقطه•) می‌نویسیم:

$$\underline{0\ \ 0\ \ 2\ \ \overset{*}{3}}\ \times\ 1\ \ \overset{*}{4}$$

·۲

۳ ضرب در ٤ می‌شود ۱۲؛ ۲ را می‌نویسیم
و ده بر یک را کنارش ثبت می‌کنیم

مرحلهٔ دوم: برای یافتن رقم بعدی جواب، یعنی رقمی که باید زیر رقم ۲ از عدد ۲۳ بیاید، دو عدد را (که حاصل ضربهای جزئی) هستند پیدا می کنیم و آنها را به یکدیگر می‌افزاییم. اولین آنها ۸ است که از ضرب ۲ در ٤ حاصل می‌شود:

$$\underline{0\ \ 0\ \ \overset{*}{2}\ \ 3}\ \times\ 1\ \ \overset{*}{4}$$

·۲

دومین حاصل ضرب جزئی از ضرب رقمهای دیگر، یعنی ۳ و ۱ به دست می آید:

$$\underline{0\ \ 0\ \ 2\ \ \overset{*}{3}}\ \times\ \overset{*}{1}\ \ 4$$

·۲

حالا دو حاصل ضرب جزئی را با هم جمع می کنیم: ۸ بعلاوهٔ ۳ می‌شود ۱۱. این همان عددی است که می‌خواستیم. اما ده بر یک را هم باید بیفزاییم، پس رقم بعدی جواب ۱۲ است؛ پس ۲ را می‌نویسیم و ده بر یک هم داریم:

$$\underline{0\ \ 0\ \ 2\ \ 3}\ \times\ 1\ \ 4$$

·۲ ·۲

۲ در ٤ می‌شود ۸؛ ۳ در ۱ می‌شود ۳؛ ۸ بعلاوهٔ ۳ می‌شود ۱۱؛
ده بر یک را هم می‌افزاییم

مرحلهٔ آخر: رقم سمت چپ مضروب، یعنی رقم ۲ از عدد ۲۳ را در رقم سمت چپ مضروب فیه، یعنی رقم ۱ از ١٤، ضرب می کنیم:

۰ ۰ ۲ ۳ × ۱ ۴

۳۰۲۰۲

۲ در ۱ می‌شود ۲ و با افزودن ده بر یک می‌شود ۳

در این مثال لازم نشد از صفر سمت چپ که جلوی مضروب نوشته‌ایم استفاده کنیم. اگر عدد ۱۰ یا بیشتر داشتیم، ده بر یک را در جای خالی زیر این صفر می‌نوشتیم. در این مثال، تنها یک ۳ داشتیم.

در اینجا مرحلهٔ دوم، تازگی داشت. برای به دست آوردن یک رقم از جواب، دو رقم را به کار بردیم. حاصل ضرب جزئی ۸ و حاصل ضرب جزئی ۳ را با هم جمع کردیم و از حاصل که ۱۱ بود در نوشتن جواب استفاده کردیم. اعداد ۸ و ۱۱ از ضرب کردن دو جفت رقم به دست آمد که آنها را «جفت بیرونی» و «جفت درونی» می‌نامیم.

جفت بیرونی

جفت درونی

۰ ۰ ۲ ۳ × ۱ ۴

۰۲

۰۲ ۳ + ۸

۳ بعلاوهٔ ۸ می‌شود ۱۱،
بعلاوهٔ ده بر یک

دستور یافتن این جفتها چنین است: رقمی از مضروب که به آن رسیده‌ایم (یعنی، رقمی که درست بالای رقم بعدی جواب که باید یافته شود قرار دارد) بخشی از «جفت بیرونی» است که در مثال بالا عبارت است از رقم ۲ از عدد ۲۳. رقم دیگر از این «جفت بیرونی» رقم سمت راست مضروب فیه است که در طرف بیرون واقع شده است و در مثال بالا عبارت است از رقم ٤ در عدد ١٤. جفت دیگر که «جفت درونی» متشکل از ۳ و ۱ است از دو رقمی تشکیل می‌شود که بلافاصله درون رقمهایی که هم اکنون به کار بردیم قرار دارند؛ رقم ۳ در عدد ۲۳ و رقم ۱ در عدد ١٤.

«جفت بیرونی» و «جفت درونی» را زیاد به کار خواهیم برد، پس بد نیست در سه مثال زیر آنها را نشان دهیم:

۲۸×۹۲	۷۲×۳۴	۴۶×۸۷
جفت بیرونی ۲ × ۲	جفت بیرونی ۴ × ۷	جفت بیرونی ۷ × ۴
جفت درونی ۹ × ۸	جفت درونی ۳ × ۲	جفت درونی ۸ × ۶
۲۸×۹۲	۷۲×۳۴	۴۶×۸۷

اکنون مثال ۳۸ ضرب در ۱٤ را در نظر بگیرید:

۰ ۰ ۳ ۸ × ۱ ۴

مرحلهٔ اول: نخستین کار این است که ۸ را در ٤ ضرب می کنیم می‌شود ۳۲. رقم ۲ را می‌نویسیم و ۳ را (مثل ده بر یک) نقل می کنیم.

۰ ۰ ۳ ۸ × ۱ ۴

۰۰۰۲

مرحلهٔ دوم: برای یافتن عدد بعدی باید از جفتهای بیرونی و درونی استفاده کنیم، رقمی از ۳۸ که اکنون به آن رسیده‌ایم ۳ است، زیرا ۳ درست بالای محلی است که رقم بعدی جواب را باید در آن نوشت. پس این ۳ بخشی از جفت بیرونی است. رقم دیگر جفت بیرونی چیست؟ یکی از رقمهای ۱٤ که مسلماً همان ٤ باید باشد، یعنی رقم بیرونی ۱٤. جفت درونی درست داخل این دو قرار دارد (یعنی رقمهای ۸ و ۱).

۰ ۰ ۳ ۸ × ۱ ۴

۰۰۰۲

حالا ضرب می کنیم: ۳ در ٤ می‌شود ۱۲، و ۸ در ۱ می‌شود ۸. این دو حاصل ضرب جزئی را که ۱۲ و ۸ هستند با هم جمع می کنیم، حاصل ۲۰ می‌شود. رقم ۳ نقل شده را هم باید افزود، پس نتیجه ۲۳ می‌شود. رقم ۳ را می‌نویسیم و ۲ را (که همان بیست بر دو است) نقل می کنیم.

مرحلهٔ آخر: دو رقمی را که در سمت چپ واقع‌اند، یعنی رقم ۳ از عدد ۳۸ و رقم ۱ در عدد ۱٤ را در هم ضرب می کنیم. حاصل ۳ است. رقم ۲ی نقل شده، حاصل را به ۵ می‌رساند:

۰ ۰ ۳ ۸ × ۱ ۴
۰ ۵ ۳ ۲

در زیر، دو مثال حل شده داریم که به صورت فشرده نشان داده شده‌اند. رقمهایی که زیرشان خط کشیده شده، از ستون قبل نقل شده‌اند. به عنوان تمرین سعی کنید خودتان معلوم کنید که رقمهای سطر «عمل» چگونه به دست آمده‌اند:

۰ ۰ ۳ ۲ × ۲ ۲
جواب : ۷ ۰ ۴
عمل : ۶ ۶ ۴
\+ +
۱ ۴

۰ ۰ ۶ ۶ × ۳ ۴
جواب : ۲ ۲ ۴ ۴
عمل : ۱۸ ۲۴ ۴
\+ +
۴ ۱۸
\+
۲

شاید مایل باشید که چند مثال از این نوع را خودتان حل کنید. در زیر چند عمل ضرب برای تمرین، داده شده که جواب آنها نیز در پایان آورده شده است:

۱. ۰ ۰ ۳ ۱ × ۱ ۵
۲. ۰ ۰ ۱ ۷ × ۲ ۴
۳. ۰ ۰ ۷ ۳ × ۶ ۴
۴. ۰ ۰ ۳ ۴ × ۲ ۱
۵. ۰ ۰ ۴ ۲ × ۲ ۶
۶. ۰ ۰ ۴ ۸ × ۵ ۲

جوابها:

۱. ۴۶۵
۲. ۴۰۸
۳. ۴۶۷۲
۴. ۷۱۴
۵. ۱۰۹۲
۶. ۲۴۹۶

اگر قدری در مورد کاری که اینجا صورت می گیرد تأمل کنید متوجه می‌شوید که این دستور روالی کاملاً طبیعی دارد. می‌خواهیم دو عدد دو رقمی را در یکدیگر ضرب کنیم. برای این منظور، دو رقم واقع در سمت راست را در هم ضرب می کنیم تا رقم سمت راست جواب پیدا شود - چنانکه در مورد ضرب ۲۳ در ۱۴، ابتدا ۳ را در ٤ ضرب کردیم. برای یافتن رقم سمت چپ جواب، دو رقم واقع در سمت چپ را در هم ضرب می کنیم، چنانکه برای ضرب ۲۳ در ۱۴، رقم ۲ را در ۱ ضرب کردیم. ضمناً، برای یافتن رقمهای میانی جواب، از جفتهای بیرونی و درونی استفاده کردیم. هر جفت متشکل از دو رقم است که در یکدیگر ضرب می‌شوند، پس از هر جفت یک عدد به دست می آید و از جمع کردن این دو عدد، بخشی از جواب حاصل می‌شود.

در ادامهٔ مطلب نیز از این جفتهای بیرونی و درونی استفاده خواهیم کرد. در واقع، این جفتها بعداً خیلی بیشتر به کار گرفته خواهند شد. البته وقتی خودتان مسئله‌ای را حل می کنید لزومی ندارد جفتها را با کشیدن خطهای خمیده که به ارقام هر جفت می‌رسد مشخص کنید. در شروع بحث، این کار را فقط به خاطر تفهیم بهتر موضوع، انجام دادیم. در موقع کار، عملاً می‌توان جفت بیرونی را با توجه به این نکته مشخص کرد که این جفت شامل رقمی از مضروب است که درست بالای جای خالی بعدی، یعنی محلی که باید رقم بعدی جواب در آن نوشته شود، قرار

دارد. جفت درونی، چنانکه خطهای خمیده در نمودار نشان می‌دهند، متشکل از دو رقمی است که درست داخل دو رقم جفت بیرونی واقع‌اند.

مضروبهای طولانی

وقتی مضروب عددی طولانی باشد، کافی است مرحلهٔ دوم را، هر چند بار که برای آن عدد لازم است، تکرار کنیم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم ۳۱۲ را در ١٤ ضرب کنیم. البته اینجا عدد طولانی ما به جای دو رقم تنها سه رقم دارد، اما همین برای نشان دادن موضوع کافی است:

مرحلهٔ اول: رقم سمت راست ۳۱۲ را در رقم سمت راست ١٤ ضرب می کنیم:

۰ ۰ ۳ ۱ ۲ × ۱ ۴

۸

مرحلهٔ دوم: حالا از جفتهای بیرونی و درونی استفاده می کنیم. رقم بعدی که با آن کار داریم رقم ۱ در ۳۱۲ است. این رقمی است که درست بالای محلی قرار گرفته که رقم بعدی جواب در آن وارد خواهد شد. پس رقم ۱ در ۳۱۲ بخشی از جفت بیرونی است:

۰ ۰ ۳ ۱ ۲ × ۱ ۴

جواب : ۶ ۸

عمل : ۴ جفت بیرونی، ١ ضرب در ٤ می‌شود ٤

\+ جفت درونی، ٢ ضرب در ١ می‌شود ٢

۲ ٤ بعلاوهٔ ٢ می‌شود ٦

مرحلهٔ سوم: در اینجا همان مرحلهٔ دوم تکرار می‌شود، فقط جای جفتها تغییر می کند. یعنی با جفتهای دیگری از اعداد سرو کار داریم. اما در اینجا نیز همچنان رقم بعدی از عدد ۳۱۲ که با آن کار داریم، رقمی

که درست بالای محل بعدی که باید پر شود قرار گرفته، بخشی از جفت بیرونی است. در این مثال، ۳ بخشی از جفت بیرونی جدید است. پس داریم:

	۰ ۰ ۳ ۱ ۲ × ۱ ۴
جواب :	۰۳ ۶ ۸
عمل :	۱۲ + ۱

جفت بیرونی، ۳ ضرب در ٤، می‌شود ۱۲؛
جفت درونی، ۱ ضرب در ۱، می‌شود ۱؛
۱۲ بعلاوهٔ ۱ می‌شود ۱۳؛ ۳ را می‌نویسیم
و کنارش علامت ده بر یک می‌گذاریم

مرحلهٔ آخر: برای یافتن رقم سمت چپ جواب، دو رقم واقع در سمت چپ را در یکدیگر ضرب می کنیم، ۳ ضرب در ۱، سپس ده بر یک را هم می‌افزاییم:

	۰ ۰ ۳ ۱ ۲ × ۱ ۴
جواب :	۴ ۰۳ ۶ ۸
عمل	۳ × ۱ + ده بر یك

بعدها لازم خواهد شد که خطهای خمیده را روی صفرهای جلوی مضروب هم بکشیم. پس بد نیست، از هم اکنون این کار را بکنیم تا ببینیم چه نتیجه‌ای می‌دهد. به یاد داشته باشید که:

حاصل ضرب هر عددی در صفر، همیشه صفر است

وقتی صفر در ضرب وارد شود، هر عددی را «هیچ می کند». یک میلیون ضرب در صفر، باز همان صفر است. با استفاده از این نکته، مرحلهٔ آخر را به همان شیوهٔ مرحله‌های میانی انجام می‌دهیم:

مرحلهٔ آخر:

۰ ۰ ۳ ۱ ۲ × ۱ ۴

جواب : ۴ ۳ ۶ ۸

عمل : ۰
+
۳
+
ده بر یك

جفت بیرونی، صفر ضرب در ٤، می‌شود صفر. جفت درونی، ۳ ضرب در ۱، می‌شود ۳. صفر بعلاوهٔ ۳ می‌شود ۳. با افزودن ده بر یک، نتیجه می‌شود ٤، یعنی همان جوابی که قبلاً یافتیم - جواب باید هم همین در می آمد، زیرا جواب درست این است. از اینجا معلوم می‌شود که مرحلهٔ آخر را می‌توانیم با همان روش مراحل دوم و سوم انجام دهیم؛ یعنی می‌توانیم به جای استفاده از دستور خاصی برای مرحلهٔ آخر، این مرحله را هم به کمک جفتهای بیرونی و درونی انجام دهیم.

هر وقت ردیفی از اعداد را با عنوان «عمل» نشان می‌دهیم، منظوراین است که در هنگام کار، این عمل باید در ذهن انجام شود. در موارد اخیر، تنها برای تشریح موضوع، عمل را بصراحت بیان کردیم. موقع حل هر مسئله، تنها دو عددی را که باید در هم ضرب شوند و نیز جواب مسئله را می‌نویسیم.

مسئله های اخیر نیز محل قرار گرفتن زوج بیرونی را نشان می‌دادند. این جفت را همیشه می‌توان بر این اساس تعیین کرد که شامل رقمی از مضروب است که درست بالای محل رقم بعدی جواب، که باید یافته شود، قرار گرفته است:

۰ ۰ ۵ ۳ ۲ ۱ ۰ ۴ ۰ ۲ × ۶ ۴

بخشی از جواب : ۶ ۵ ۷ ۲ ۸

سر دیگر خط خمیده به رقم سمت راست عدد دو رقمی می‌رسد، زیرا این رقم، رقم «بیرونی» است. سپس به جفت درونی می‌رسیم که متشکل است از دو رقمی که بلافاصله درون رقمهای جفت بیرونی واقع‌اند.

ضمن کار، احتمالاً متوجه خواهید شد که برای مشخص کردن محل رقمها در جفتهای بیرونی و درونی، یک راه مناسب این است که بخشهایی از اعداد را با انگشتان خود بپوشانید. این کار زحمت چندانی ندارد و از خطاهایی که ممکن است بر اثر گم کردن مقطعی محل عمل رخ دهد جلوگیری می کند. در مورد ضرب اعداد سه رقمی در دو رقمی، مثل ۳۱۲ ضرب در ۱۴، احتمال گم کردن محل، خیلی کم است، ولی بزودی به اعدادی خواهیم رسید که بسیار طولانیترند. در هر حال، اکیداً توصیه می‌شود که رقمها را واضح و با فاصله از یکدیگر بنویسید، و هر رقم از جواب را درست زیر رقمی که به آن مربوط است، ثبت کنید. پاکیزه نوشتن کمک می کند تا به اشتباهات قابل احتراز دچار نشویم. این گفته نه فقط در آنچه اینجا انجام می‌شود، بلکه همچنین برای ضرب معمولی، هر نوع تقسیم، و برای جمع و تفریق نیز صادق است. جا دارد بکوشیم تا به پاکیزه نوشتن عادت کنیم.

حالا برای آنکه میزان درک خود را از این روش بیازمایید، مثالی می آوریم. در صفحهٔ بعد، عمل ضرب ۳۱۱ در ۲۳ را ثبت کرده‌ایم. جواب زیر ۳۱۱ نوشته شده و یک ردیف مربوط به عمل هم زیر جواب آمده است که باید در ذهن انجام شود. اکنون ردیفهای جواب و عمل را با یک برگ کاغذ بپوشانید، و رقم سمت راست جواب را به طور ذهنی محاسبه کنید. حالا کاغذ را قدری کنار بکشید تا اولین رقم جواب را ببینید و معلوم شود جوابتان درست بوده یا نه. سپس رقم بعدی جواب را در ذهن محاسبه کنید، سپس کاغذ را قدری دیگر کنار بکشید تا این رقم بعدی را هم ببینید تا درست یا غلط بودن جوابتان معلوم شود. اگر درست نبود، کاغذ را قدری جابه‌جا کنید تا ردیف «عمل» برای آن رقم دیده شود و در آنجا ببینید که آن رقم چگونه به دست آمده است. در ردیف

«عمل»، رقمهای واقع در زیر یکدیگر، باید با هم جمع شوند تا رقمی از جواب حاصل شود:

۰	۰	۳	۱	۱	×	۲ ۳
	۷	۰۱	۵	۳		
	۰×۳	۳×۳	۱×۳	۱×۳		
	۳×۲	۱×۲	۱×۲			
	(ده بریك)					

صفرهای جلوی مضروب

در مثالهایی که تاکنون داشتیم، دو صفر جلوی مضروب گذاشته می‌شد ولی دیدیم که فقط یکی از آنها مورد استفاده قرار می‌گرفت. اما گاه از هر دو صفر استفاده می‌شود. مثال زیر را در نظر بگیرید:

	۰	۰	۵	۲	۲	×	۳ ۱
: جواب	۱	۰۶	۰۱	۸	۲		
: عمل	۰×۱	۰×۱	۵×۱	۲×۱	۲×۱		
	+	+	+	+			
	۰×۳	۵×۳	۲×۳	۲×۳			
	+	+					
	ده بریك	ده بریك					

در این مثال زیر دومین صفر هم که در منتهاالیه سمت چپ قرار گرفته، رقمی داریم. البته توجه کنید که این رقم همان ده بر یک است. رقمهای عدد ۳۱ در اینجا نقشی ندارند، زیرا هر دو با ضرب شدن در صفر، صفر می‌شوند. تنها ده بر یک باقی می‌ماند.

به این ترتیب روشن می‌شود که چرا در مثالهای قبلی به دومین صفر

نیازی نداشتیم. یک صفر در جلوی مضروب کافی بود، زیرا در آخرین مرحله، ده بر یک نداشتیم.

دستور کلی: وقتی عددی در مضروب فیه با هر طولی ضرب می‌شود، به تعداد رقمهای مضروب فیه، جلوی مضروب صفر می گذاریم.

گاه، چنانکه دیدیم، همه صفرها به کار نمی آیند ولی رعایت این دستورها هیچ گاه ضرری نخواهد داشت. اگر این شیوه را دنبال کنیم و برای آزمایش، وقتی فقط یک صفر لازم است، دو صفر بگذاریم، در آخرین مرحله می‌بینیم که زیر آخرین صفر رقمی نوشته نمی‌شود.

تا کنون تنها با مضروبهای دو رقمی یا سه رقمی کار کرده‌ایم، ولی اعداد طولانی مثل ۲٤۱۳٥٤ هم با همین روش ضرب می‌شوند. در اینجا کافی است عمل ضرب دو جفت رقم و جمع کردن نتایج را تکرار کنیم. فرض کنید می‌خواهیم ۲٤۱۳٥٤ را در ۳۲ ضرب کنیم:

۰ ۰ ۲ ۴ ۱ ۳ ۵ ۴ × ۳ ۲

جواب : ۷ ۰۲ ۸

عمل : ۶ ۵

۵ ۱۲

ده بر یك

تا اینجا همانند مثالهای قبل، سه رقم از مضروب را به کار برده‌ایم. مرحلهٔ بعدی هم به همین صورت انجام می‌شود:

۰ ۰ ۲ ۴ ۱ ۳ ۵ ۴ × ۳ ۲

جواب : ۰۱ ۷ ۲ ۸

عمل : ۲ — ۲ حاصل ضرب ۱ در ۲ است؛

+

۹ — ۹ حاصل ضرب ۳ در ۳ است

طبعاً، ۲ و ۹ را با هم جمع می کنیم، و این ۱۱، رقم بعدی جواب را می دهد. رقم ۱ را به عنوان رقمی از جواب می‌نویسیم و ده بر یک را کنار آن به صورت نقطه ثبت می کنیم. سپس یک مرتبهٔ دیگر به سمت چپ می‌رویم. جفتهای بعدی را دو رقم ٤ و ۱ از مضروب و ۳ و ۲ از مضروب فیه مشخص می کنند که در اینجا ٤ ضرب در ۲، بعلاوهٔ ۱ ضرب در ۳ خواهیم داشت. راه حل کامل به صورت زیر است:

	۰	۰	۲	۴	۱	۳	۰	۴	×	۳	۲
: جواب		۷	·۷	·۲	·۱	۷	·۲	۸			
: عمل		۰	۴	۸	۲	۶	۰	۸			
		۶	۱۲	۳	۹	۰	۱۲				
		(۱)	(۱)	(۱)		(۱)					

صفر واقع در منتهاالیه سمت چپ را به کار نبردیم. در این مثال هم، در آخرین مرحله ده بر یک نداریم و زیر آخرین صفر چیزی نوشته نمی‌شود. این صفر را فقط به خاطر کامل بودن کار آوردیم. طبق دستور، وقتی مضروب فیه دو رقم دارد باید دو صفر بگذاریم. اینجا یک صفر اضافی بود ولی یک صفر چه ارزشی دارد؟ هیچ!

حالا یک «مسئلهٔ فکری» کوچک داریم: جواب آن را باید بدون محاسبهٔ مستقیم بدهید. اکنون که بر اساس یکی از مثالها می‌دانید ۳۱۱ ضرب در ۲۳ می‌شود ۷۱۵۳، حاصل ضرب ۳۱۱۰۰ در ۲۳ چقدر است؟ تنها تفاوت، وجود دو صفر در انتهای مضروب است. حالا جواب چیست؟ پیش از خواندن بند بعدی، پاسخ را بگویید.

جواب، همان طور که حتماً خودتان هم گفته‌اید، ۷۱۵۳۰۰ است. دو صفری که در آخر مضروب وجود داشت، در آخر جواب هم ظاهر شده است. این وضع همیشه صادق است. صفرهای موجود در آخر مضروب ــ هر چند تا که باشند و مضروب هر چه باشد ــ باید عیناً به آخر جواب منتقل شوند.

کدام یک از راههای ممکن زیر را برای معلوم کردن این موضوع در پیش گرفته‌اید؟ شاید هم آن قدر تیز هوش بوده‌اید که بیش از یک راه را به طور همزمان در نظر داشته‌اید. در هر حال، این چهار راه به قرار زیرند:

۱. تکیه به حدس. شاید این نام چندان مناسب نباشد، در این صورت هر معادلی می‌خواهید به جای آن بگذارید. کسانی که اهل ریاضیات نیستند، آن را «برداشت حسی» می‌نامند. ریاضیدانان از آن به عنوان «شهود ریاضی» یاد می کنند. به هر حال، آن را هر چه بنامیم، خیلی وقتها جواب غلط می‌دهد، اما در مواردی هم می‌توان به آن توسل جست.

۲. حافظه. شاید از دوران مدرسه یادتان مانده باشد که در این گونه موارد چه باید کرد. اگر این موضوع در حافظه با قدری ابهام همراه باشد، می‌توانیم بگوییم که نیمی از کار با حافظه و نیمی دیگر با «برداشت حسی» انجام شده است.

۳. ضرب کردن در صفر. می دانیم که صفر ضرب در هر عددی همان صفر را می‌دهد. مسلماً، وقتی کار را با ضرب کردن ۲۳ در دو صفری که آخر ۳۱۱۰۰ قرار دارند آغاز کنیم، مرتباً صفر به دست می آوریم تا وقتی که به رقم ۱ سمت راستی در عدد ۳۱۱۰۰ برسیم. از جمع دو صفر هم، همان صفر حاصل می‌شود. پس تا رسیدن به قسمت ۳۱۱ در عدد ۳۱۱۰۰، چیزی جز صفر نتیجه نمی‌شود، و پس از آن هم همان حاصل ۳۱۱ ضرب در ۲۳ به دست می آید.

۴. تغییر دادن ترتیب عاملها. این روشی است که اشخاص درگیر با ریاضیات ممکن است به کار گیرند. نکتهٔ اصلی در اینجا آن است که وقتی دو یا چند عدد را در یکدیگر ضرب می کنیم، نحوهٔ دسته‌بندی کردن آنها تأثیری بر نتیجه ندارد، و همین قدر کافی است که نهایتاً همهٔ عاملها در ضرب وارد شده باشند. مثلاً، ۲ ضرب در ۳ ضرب در ٤ را در نظر بگیرید. اگر کار را به ترتیب عادی انجام دهیم، می گوییم، ۲ ضرب در ۳ می‌شود ٦، سپس ٦ ضرب در ٤ می‌شود ۲٤، پس حاصل ۲٤ است.

اما در صورت تمایل می‌توانستیم کار را با ضرب کردن ۳ در ٤ شروع کنیم: ۲ ضرب در ۳ ضرب در ٤، برابر است با ۲ ضرب در ۱۲ که باز هم ۲٤ می‌شود. بعلاوه، می‌توانستیم ترتیب عاملها را هم عوض کنیم: ۲ ضرب در ۳ ضرب در ٤ ، برابر است با ۲ ضرب در ٤ ضرب در ۳، یا ۸ ضرب در ۳. باز هم نتیجه ۲٤ در می آید.

حالا همین نکته را برای ضرب ۳۱۱۰۰ در ۲۳ به کار می‌بریم. مضروب را به عنوان ۳۱۱ ضرب در ۱۰۰ ضرب در ۲۳، در نظر می گیریم. جای عددها را تغییر می‌دهیم: نتیجهٔ کار با ۳۱۱ ضرب در ۲۳ ضرب در ۱۰۰، یکی است. پس معلوم می‌شود باید ۳۱۱ را در ۲۳ ضرب کنیم، که قبلاً در مثالی آورده شده، و با توجه به آن می‌دانیم که جوابش ۷۱۵۳ است. حالا باید این عدد را در ۱۰۰ هم ضرب کنیم. اما برای ضرب کردن هر عدد در ۱۰۰، کافی است دو صفر به آخر عدد اضافه کنیم. پس دو صفر در آخر ۷۱۵۳ می گذاریم و نتیجه چنانکه گفته شد ۷۱۵۳۰۰ خواهد بود.

برتری این روش چهارم در آن است که در برخی موارد دیگر هم راه کار را نشان می‌دهد. فرض کنید که این دو صفر در آخر ۲۳ قرار گرفته باشند. می‌خواهیم ۳۱۱ را در ۲۳۰۰ ضرب کنیم. همان استدلال بند ٤ نشان می‌دهد که باید این دو صفر را به آخر جواب ببریم. باز هم جواب ۷۱۵۳۰۰ می‌شود. در واقع، اگر یک صفر درآخر ۳۱۱ و صفر دیگر در آخر ۲۳ بود، یعنی می‌خواستیم ۳۱۱۰ را در ۲۳۰ ضرب کنیم، هر دو صفر به آخر جواب برده می‌شدند و باز همان عدد ۷۱۵۳۰۰ را داشتیم.

دستور: همهٔ صفرهای موجود در آخر مضروب و در آخر مضروب فیه را یکجا به آخر جواب بیفزایید. سپس عمل ضرب را بدون در نظر گرفتن این صفرها انجام دهید.

مثلاً، اولین مثال این فصل، چنین بود:

۰ ۰ ۲ ۳ × ۱ ۲

۳ ۲ ۲

حالا فرض کنید می‌خواهیم ۲۳۰۰۰۰۰ را در ۱۴۰ ضرب کنیم، جواب چه خواهد بود ؟ کافی است مثال را مثل قبل، بدون توجه به صفرها حل کنیم، سپس پنج صفر انتهایی را یکجا به دنبال جواب بیفزاییم:

۰ ۰ ۲ ۳ × ۱ ۴

۳ ۲ ۲ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ جواب ۳۲۲۰۰۰۰۰ است.

ضرب کردن در عددهای سه رقمی

تا کنون اعداد گونا گون را در مضروب فیه‌هایی ضرب کرده‌ایم که تنها دو رقم داشتند. مضروب می‌توانست به هر طولی باشد، مثل ۲٤۱۳۰٤ که در یک مثال داشتیم، ولی عددی که در آن ضرب می‌شد دو رقم داشت که در آن مثال ۳۲ بود. عددهای مختلف را چگونه در یک مضروب فیه سه رقمی ضرب کنیم؟

بد نیست مثالی بیاوریم: ۲۱۳ ضرب در ۱۲۱. مضروب فیه سه رقم دارد، پس سه صفر جلوی مضروب می گذاریم:

۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۳ × ۱ ۲ ۱

این کار مطابقت دارد با دستوری که قبلاً گفتیم در مورد اینکه به تعداد رقمهای مضروب فیه، جلوی عدد سمت چپ یعنی مضروب صفر می گذاریم (گاه چنانکه دیدیم، یکی از این صفرها اضافی در می آید). سپس کار را مرحله به مرحله پیش می‌بریم و در هر مرحله یک رقم از جواب به دست می آوریم:

مرحلهٔ اول:

۰ ۰ ۰ ۲ ۱ <u>۳</u> × ۱ ۲ <u>۱</u>

۳ ضرب در ۱ می‌شود ۳ ۳ :جواب

مرحلهٔ دوم:

۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۳ × ۱ ۲ ۱

جواب: ۷ ۳
عمل: ۱ × ۱
+
۲ × ۳

(رقمهایی که زیرشان یک خط کشیده شده در یکدیگر ضرب می‌شوند؛ رقمهایی هم که زیرشان دو خط کشیده نیز همین طور).

تا اینجا، در این دو مرحلهٔ اولیه، صرفاً همان کارهایی را کردیم که در بخش قبل می کردیم. محاسبه تا این مرحله عیناً مانند وقتی است که به جای ۲۱۳ در ۱۲۱ بخواهیم ۱۳ را در ۲۱ ضرب کنیم.

مرحلهٔ سوم: این کار تازه‌ای است: برای یافتن رقم بعدی، به جای دو جفت رقم، این بار حاصل ضربهای سه جفت رقم را با هم جمع می کنیم:

۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۳ × ۱ ۲ ۱

جواب: ۷ ۷ ۳
عمل: ۱ × ۲
+
۲ × ۱
+
۱ × ۳

نحوهٔ انجام «عمل» تابع چگونگی ثبت اعداد است. برای روشن‌تر شدن موضوع می‌توانیم کمانکهای نشان دهندهٔ جفتهای «بیرونی» و «درونی» را مثل گذشته رسم کنیم، ولی حالا علاوه بر اینها یک جفت «میانی» هم داریم:

۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۳ × ۱ ۲ ۱

بیرونیترین خط بین رقم ۲ از ۲۱۳ و رقم ۱ از ۱۲۱ کشیده شده است. بنابراین به ازای جفت بیرونی در جواب، حاصل ضرب ۲ در ۱ را داریم. قدری به داخل می‌رویم. خط میانی، رقم ۱ از ۲۱۳ را به ۲ از ۱۲۱ وصل می کند و به ازای آن ۱ ضرب در ۲ را داریم. این دومین جزء جواب است. سومین و آخرین جزء جواب از درونی‌ترین خط به دست می آید که به ازای آن ۳ ضرب در ۱ را داریم. با جمع کردن این سه جزء، داریم ۲، بعلاوهٔ ۲، بعلاوه ۳، که می‌شود ۷ و رقم بعدی جواب است. بیرونیترین جفت، که ۲ و ۱ است، با همان دستور قبلی مشخص می‌شود: رقمی از مضروب که درست بالای محل نوشتن رقم بعدی جواب که باید یافته شود، قرار دارد، بخشی از جفت بیرونی است. رقم دیگر این جفت، آخرین رقم ۱۲۱ است. رقمهای بعد از اینها، جفت میانی را تشکیل می‌دهند و رقمهای باقیمانده هم طبعاً جفت درونی هستند.

بقیهٔ کار، تکرار همین مرحله است با سه خط خمیده که قدری به طرف چپ کشیده شده‌اند:

مرحلهٔ چهارم:

۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۳ × ۱ ۲ ۱

۵ ۷ ۷ ۳

عمل: ۰×۱

\+

۲×۲

\+

۱×۱

رقم ۵ جواب حاصل جمع صفر و ۴، ۱ است

مرحلهٔ آخر:

۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۳ × ۱ ۲ ۱

۲ ۵ ۷ ۷ ۳

عمل: ۰ × ۱
+
۰ × ۲
+
۲ × ۱

رقم ۲ی جواب حاصل جمع صفر و صفر و ۲ است

در این مثال خاص، این آخرین مرحله است، زیرا در به دست آوردن ۲ اخیر، ده بر یک نداشتیم. در اینجا صرفاً برای توجه به اینکه در آخرین مرحله ممکن است ده بر یک داشته باشیم، صفری جلو جواب قرار می گیرد ، ولی چون فعلاً ده بر یک نداریم، کار تمام است. جواب ۲۵۷۷۳ در آمده است.

البته این مثال قدری طولانی به نظر می‌رسد ، زیرا با همهٔ جزئیات کار، تشریح شده است. در تمرینهای جدی، کار خیلی سریعتر انجام می شود . مثال زیر را به صورتی که نزدیکتر به شیوهٔ عملی کار است حل می کنیم. در اینجا به جای آنکه رقمها را با انگشت نشان دهیم و برای مشخص کردن جفتهای بیرونی «به سوی داخل» برویم، زیر رقمها خط می کشیم. دو رقم که زیرشان یک خط کشیده شده در یکدیگر ضرب می‌شوند ، آنها که دو خط زیرشان کشیده‌ایم در یکدیگر، و آنها هم که سه خط زیرشان هست در یکدیگر ضرب می‌شوند :

مرحلهٔ اول:

۰ ۰ ۰ ۳ ۰ ۲ × ۱ ۱ ۴

۸

مرحلهٔ دوم:

(البته در یک مسئله واقعی لازم نیست هر بار عددها را مجدداً بنویسیم!)

۰ ۰ ۰ ۳ ۰ ۲ × ۱ ۱ ۴

۲ ۸ صفر بعلاوهٔ ۲ می‌شود ۲

مرحلهٔ سوم:

۰ ۰ ۰ ۳ ۰ ۲ × ۱ ۱ ۴

۰۴ ۲ ۸ ۱۲ بعلاوهٔ صفر بعلاوهٔ ۲ می‌شود ۱۴

مرحلهٔ چهارم:

۰ ۰ ۰ ۳ ۰ ۲ × ۱ ۱ ۴

۴ ۰۴ ۲ ۸ صفر بعلاوهٔ ۳ بعلاوهٔ صفر بعلاوه ده بر یک می‌شود ۴

مرحلهٔ آخر:

۰ ۰ ۰ ۳ ۰ ۲ × ۱ ۱ ۴

۳ ۴ ۰۴ ۲ ۸ صفر بعلاوهٔ صفر بعلاوهٔ ۳ می‌شود ۳

این آخرین مرحله است زیرا ده بر یک (که به صورت نقطه نوشته می‌شود) نداریم. اگر ده بر یک داشتیم زیر صفر سمت چپ رقم ۱ را می‌نوشتیم. اگر دو نقطه (به نشانهٔ بیست بر دو) داشتیم، زیر صفر واقع در منتهی‌الیه سمت چپ، یک رقم ۲ می‌نوشتیم. ولی در این مثال، محاسبه عملاً تمام شده و جواب همان ۳۴۴۲۸ است.

یادتان باشد که حاصل ضرب صفر در هر عددی، صفر است.

سرانجام با حل یک تمرین می‌توانید خودتان ببینید که عملاً کار با این روش چقدر آسان است:

۰ ۰ ۰ ۲ ۰ ۳ × ۲ ۲ ۱

مسلماً اول رقم ۳ از ۲۰۳ را در رقم ۱ از ۲۲۱ ضرب می کنید. سپس ۳ ۰ را در ۱ ۲ از ۲۲۱، با توجه به جفتهای بیرونی و درونی ضرب و نتایج را جمع می کنید؛ و کار دنبال می‌شود. جواب، همان طور که احتمالاً یافته‌اید ۴۴۸۶۳ است.

در صورت تمایل می‌توانید خودتان مثالهایی مطرح کنید و به حل آنها بپردازید. برای سهولت می‌توانید ابتدا با مضروب فیه‌های دو رقمی، مثل ۲۳ یا ۳۱ عمل کنید و سپس مضروب فیه‌های سه رقمی را به کار ببرید. این روش را می‌توانید برای اعدادی با طول دلخواه نیز به کار ببرید اما وقتی عددی طولانی شامل رقمهای بزرگ متعددی باشد، مثل ۹۸۶۹، هنگام استفاده از روش این فصل ناگزیر خواهید بود که (به جای نقل کردن ۱ و ۲ در ده بر یک و بیست بر دو) اعداد نسبتاً بزرگی را به مرتبهٔ بعدی نقل کنید. به همین علت در مثالهایی که تا به حال آوردیم از رقمهای کوچکتر، مثل ۲ و ۳ بیشتر استفاده کردیم. اگر حل یکی دو مسئله با رقمهای بزرگ را امتحان کنید، ارزش «ضرب سریع» فصل بعد را که در آن فقط ده بر یک و بیست بر دو وارد کار می‌شود، بهتر درک خواهید کرد. در عین حال، روش این فصل برای اعدادی با رقمهای کوچک بسیار مناسب است و گذشته از آن، بخشی ضروری از فصل بعد به شمار می‌آید.

ضرب کردن در عددهای به طول دلخواه

برای مضروب فیه‌های طولانیتر هم از همین اصول استفاده می کنیم. در مورد مضروب فیه‌های چهار رقمی، مثل ۳۲۱۴ به این طریق عمل می‌شود: هر رقم از جواب، مجموع چهار جزء است. هر یک از این اجزا از ضرب دو رقم در یکدیگر به دست می آید. این جفت رقمها کدام‌اند؟ رقمهای

واقع در انتهای یک کمانک؛ یا به عبارت دیگر، جفتهای بیرونی و درونی. مثال ۲۱۵۳ ضرب در ۳۲۱٤ را در نظر بگیرید:

۰ ۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۵ ۳ × ۳ ۲ ۱ ۴

در این شکل، چهار جفتی که در یکی از مراحل میانی محاسبه به کار می‌روند مشخص شده است. در این مرحله می گوییم: «۲ ضرب در ٤ می‌شود ۸، بعلاوهٔ ۱ ضرب در ۱ می‌شود ۹، بعلاوهٔ صفر می‌شود ۹، بعلاوهٔ ۹ می‌شود ۱۸». در جلوی مضروب چهار صفر داریم زیرا ۳۲۱٤ شامل چهار رقم است. صفر واقع در منتهی‌الیه سمت چپ به کار نمی آید مگر آنکه در آخرین مرحله ده بر یک (یا بیست بر دو ...) داشته باشیم؛ در اینجا هم همین حالت برقراراست. نحوهٔ انجام عمل ضرب به صورت زیر است:

مرحلهٔ اول:

۰ ۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۵ ۳ × ۳ ۲ ۱ ۴

·۲ سه ٤ تا می‌شود ۱۲

مرحلهٔ دوم:

۰ ۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۵ ۳ × ۳ ۲ ۱ ۴

۴ ·۲ صفر بعلاوهٔ ۳ بعلاوهٔ ده بر یک

مرحلهٔ سوم:

۰ ۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۵ ۳ × ۳ ۲ ۱ ۴

·۵ ۴ ·۲ ٤ بعلاوه صفر بعلاوهٔ ٦

مرحلهٔ چهارم:

۰ ۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۵ ۳ × ۳ ۲ ۱ ۴

·۹ ·۵ ۴ ·۲ ۸ بعلاوهٔ ۱ بعلاوهٔ صفر بعلاوهٔ ۹ بعلاوهٔ ده بر یک

مرحلهٔ پنجم:

۰ ۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۰ ۳ × ۳ ۲ ۱ ۴

صفر بعلاوهٔ ۲ بعلاوهٔ ۲ بعلاوهٔ صفر بعلاوهٔ ده بر یک ۵·۹·۰ ۴·۲

مرحلهٔ ششم:

۰ ۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۰ ۳ × ۳ ۲ ۱ ۴

صفر بعلاوهٔ صفر بعلاوهٔ ٤ بعلاوهٔ ۳ ۷ ۵·۹·۰ ۴·۲

مرحلهٔ هفتم:

۰ ۰ ۰ ۰ ۲ ۱ ۰ ۳ × ۳ ۲ ۱ ۴

صفر بعلاوهٔ صفر بعلاوهٔ صفر بعلاوهٔ ٦ ۶ ۷ ۵·۹·۰ ۴·۲

در مرحلهٔ اخیر ده بر یک (یا بیست بر دو ...) نداشتیم و حاصل جفت رقمها همه صفر می‌شود، پس کار تمام است. جواب ٦٧٥٩٠٤٢ است. در مورد مضروب فیه‌های طولانیتر نیز به همین شیوه عمل می‌شود.

چکیدهٔ مطالب

در این فصل ابتدا در مورد ضرب اعداد دو رقمی در دو رقمی، مثل ۳۱ در ۲۳ صحبت کردیم؛ سپس ضرب کردن عددهای طولانیتر در اعداد دو رقمی، مثل ۳۲٤٥٥ در ٤۲ را بیان کردیم؛ و پس از آن به مواردی پرداختیم که مضروب و مضروب فیه هر دو اعدادی به طول دلخواه باشند مثل ۳۲٤٥٥ ضرب در ٤۲۲. در همهٔ این حالات، رقم سمت راست جواب را از ضرب کردن رقمهای سمت راست دو عدد مورد نظر به دست می آوریم. در همهٔ موارد، رقمهای میانی جواب را با استفاده از جفتهای بیرونی و درونی و جمع کردن نتایج به دست می آوریم. سرانجام، برای یافتن رقمهای سمت چپ جواب صفرهایی جلوی مضروب می گذاریم و روش

استفاده از جفتهای بیرونی و درونی را در مورد این صفرها اعمال می کنیم؛ برای این کار به تعداد رقمهای مضروب فیه، صفر می گذاریم.

در صورت تمایل، برای خود آزمایی و فراگیری بهتر این روش، می‌توانید تمرینهای زیر را انجام دهید:

۱. ۳۱ × ۲۳
۲. ۳۳ × ۴۱
۳. ۶۳ × ۵۲
۴. ۴۱۳ × ۲۴
۵. ۲۲۴ × ۳۲
۶. ۷۰۵ × ۲۵
۷. ۵۱۱ × ۶۱
۸. ۳۴۱ × ۶۳
۹. ۴۱۳۳ × ۲۱۲
۱۰. ۳۱۵۲۲ × ۳۱۳۱

جوابها:

۱. ۷۱۳ ۲. ۱۳۵۳ ۳. ۳۲۷۶ ۴. ۹۹۱۲ ۵. ۷۱۶۸
۶. ۱۷۶۲۵ ۷. ۳۱۱۷۱ ۸. ۲۱۴۸۳ ۹. ۸۷۶۱۹۶
۱۰. ۹۸۶۹۵۳۸۲

امتحان کردن جواب

روش زیر برای امتحان کردن جواب را پروفسور تراختنبرگ ابداع نکرده است ولی این قاعده به علت سادگی و سهولتش وارد مجموعهٔ روشهای او شده است. ریاضیدانان از صدها سال پیش با این روش آشنا بوده‌اند ولی مردم عادی اطلاع زیادی از آن نداشتند و ظاهراً در موارد روزمره استفادهٔ چندانی از آن نمی‌شده است. از این رو روش مذکور را تحت عنوان «روش مجموع ارقام»[1] شرح می دهیم. اساس این روش چنانکه خواهیم دید، جمع زدن رقمهای هر عدد است.

هر یک از عددهای تک پیکری ۱ تا ۹ یک رقم خوانده می‌شوند. صفر هم یک رقم است. پس هر عدد کلاً از تعدادی رقم تشکیل می‌شود.

---

1. digit - sum method — در ریاضیات این روش را «طرح نُه نُه» نامیده‌اند - م.

«مجموع ارقام» حاصل جمع رقمهای موجود در هر عدد است، مثلاً:

۳ ۱ ٤ : عدد

۸ = ۳ + ۱ + ٤ : مجموع ارقام

اما از این پس همیشه مجموع ارقام را عددی یک رقمی در نظر می گیریم و برای این منظور هر وقت لازم باشد مجدداً رقمها را جمع می کنیم. مثلاً فرض کنید عدد ٦۳۲٤ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

٤ ۲ ۳ ٦ : عدد

۱ ۵ = ٤ + ۲ + ۳ + ٦ : مجموع ارقام

٦ = ۵ + ۱ : از ۱۵ نتیجه می‌شود

پس مجموع ارقام ٦۳۲٤ همان ٦ است. به عبارت دیگر در اینجا با مجموع ارقام تقلیل یافته سر و کار داریم. با این کار، مرحلهٔ بعدی آسانتر انجام خواهد شد.

برای امتحان عمل ضرب باید سه مجموع ارقام را پیدا کنیم: مجموع ارقام مضروب، مجموع ارقام مضروب فیه، و مجموع ارقام حاصل ضرب. مثلاً فرض کنید ضرب زیر را انجام داده‌ایم و می‌خواهیم آن را امتحان کنیم:

۱ ۳ × ۴ ۰ ۲ ۰ ۰

۴ ۲ ۳ ۶

اینجا سه عدد داریم، دو عددی که در هم ضرب می‌شوند و جواب. مجموع ارقام هر یک را پیدا می کنیم:

		عدد	مجموع ارقام
مضروب	:	۴ ۰ ۲	۶
مضروب فیه	:	۱ ۳	۴
حاصل‌ضرب	:	۴ ۲ ۳ ۶	۶

زیرا ۱۵ تبدیل می‌شود به ۱ بعلاوهٔ ۵ یعنی ٦

دستور امتحان عمل چنین است:

مجموع ارقام حاصل ضرب باید مساوی باشد با مجموع ارقام حاصل ضرب دو مجموع ارقام مضروب و مضروب فیه.

اگر این دو مساوی نباشند، غلطی در کار است. در مثال بالا، مجموع ارقام حاصل ضرب، ٦٣٢٤، برابر با ٦ است. این عدد باید مساوی باشد با مجموع ارقام حاصل ضرب دو مجموع ارقام دیگر. آیا چنین است؟ باید ضرب کرد تا معلوم شود: ٦ ضرب در ٤ می‌شود ٢٤، که به ٦ تبدیل می‌شود. دوباره نتیجه ٦ شده، پس نتیجهٔ امتحان مثبت است.

ضرب کردن این دو مجموع ارقام همیشه خیلی آسان است زیرا این اعداد یک رقمی‌اند. در واقع دو رقم که متناظر با دو عدد اولیه هستند در هم ضرب می‌شوند:

عددها: ۲۰۴ × ۳۱ = ۶۳۲۴

مجموع ارقام: ۶ × ۴ = ۲۴ (یعنی ۲+۴)=۶

راههایی وجود دارد برای اینکه یافتن مجموع ارقام موجود در هر عدد ساده‌تر شود. این موضوع بویژه در یافتن مجموع ارقام عددهای خیلی بزرگ اهمیت خاصی پیدا می کند. این راهها برای صرفه‌جویی در وقت به قرار زیرند:

۱. ضمن کار، نتیجه را یک رقمی کنید و این کار را به آخر موکول نکنید. فرض کنید می خواهیم مجموع ارقام ۲۵۲۳۱۱ را پیدا کنیم. از سمت چپ آغاز و رقمها را پی در پی جمع می کنیم: ۲ بعلاوهٔ ۵ بعلاوهٔ ۲ تا آخر. نزد خود فقط مجموعها را بگویید که مرتباً زیاد می‌شوند: ۲، ۷، ۹، ۱۲ .... و اکنون «ضمن کار، نتیجه را یک رقمی کنید». این ۱۲ تبدیل به ۳ (یعنی ۱ بعلاوهٔ ۲) می‌شود. با این ۳ ادامه دهید و دو رقم باقیمانده در مثال بالا رابا آن جمع کنید: ۳، ٤، ۵. مجموع ارقام ۵ است. این کار راحت‌تر است از محاسبهٔ ۲ بعلاوهٔ ۵ بعلاوهٔ ۲ بعلاوهٔ ۳ بعلاوهٔ ۱ بعلاوهٔ ۱ که می‌شود ١٤، سپس ۱ بعلاوهٔ ٤ که می‌شود ۵. در

عددهای خیلی طولانی به این طریق صرفه‌جویی زیادی در وقت می‌شود. مثلاً مجموع ارقام ٦٨٨٩٥٦٧ برابر با ٤ است. با یک رقمی کردن ضمن کار، نزد خود می گوییم: «٦، ١٤، می‌شود ۵، ۱۳، می‌شود ٤، ۱۳ می‌شود ٤، ۹، ۱۵، می‌شود ٦، ۱۳، می‌شود ٤.» در غیر این صورت، مجبور خواهیم بود همهٔ ارقام را تا رسیدن به مجموع ٤۹ با یکدیگر جمع کنیم.

۲. رقمهای ۹ را نادیده بگیرید. اگر عددی که رقمهایش را جمع می کنید شامل یک یا چند ۹ است، توجهی به آنها نکنید و آنها را در هنگام جمع کنار بگذارید. نتیجهٔ کار با وقتی که آنها را هم در جمع وارد کرده باشید فرقی ندارد. شاید این موضوع قدری عجیب جلوه کند، ولی همیشه درست است. مجموع ارقام ۹۳۹۹ برابر با ۳ است؛ در اینجا ۹ها را نادیده می گیریم. اگر آنها را هم در جمع به حساب بیاوریم، مجموع ۳۰ می‌شود، سپس آن را تقلیل می‌دهیم: ۳ بعلاوهٔ صفر می‌شود ۳. بعلاوه، اگر به دو رقم بر خوردید که مجموعشان ۹ است، می‌توانید هر دوی آنها را نادیده بگیرید: مجموع ارقام ۸۱۹۹٤ برابر با ٤ است، زیرا ۸ بعلاوهٔ ۱ می‌شود ۹، و ۹ها هم به حساب نمی آیند. البته برای اطمینان بهتر است فقط وقتی این کار را بکنیم که دو رقمی که مجموعشان ۹ است کنار یکدیگر، یا اقلاً نزدیک به هم باشند. در غیر این صورت ممکن است فراموش کنید که می‌خواهید آنها را کنار بگذارید و یکی از آنها را در جمع وارد کنید.

این روش امتحان کردن در فصل بعد به کار گرفته می‌شود. افزون بر این، در هر تمرین دیگری که خودتان برای روش این فصل طرح می کنید، می‌توان از آن استفاده کرد. در محاسبات دیگری غیر از ضرب نیز، این روش کارایی دارد.

فصل سوم

ضرب سریع -
روش «دو انگشتی»

چنانکه در فصل پیش دیدیم، امتیاز مهم روش تراختنبرگ آن است که به کمک آن می‌توانیم هر عددی را در هر عدد دیگر ضرب کنیم و جواب را مستقیماً بنویسیم. در اینجا بر خلاف روش معمولی ضرب اعداد، هیچ رقمی به عنوان مرحلهٔ واسطه نوشته نمی‌شود. روش مستقیم که در فصل قبل تشریح شد کاربرد عام دارد، یعنی از آن می‌توانیم برای ضرب هر دو عدد دلخواهی استفاده کنیم. اما در بسیاری موارد، لازم است اصلاحاتی در آن انجام بگیرد، که در این فصل به این موضوع می‌پردازیم. وقتی اعدادی داریم که عمدتاً از رقمهای بزرگتر تشکیل شده‌اند، مثل ۹۷۸ ضرب در ٦٤٧، احتمالاً باید اعداد بزرگی را به طور ذهنی جمع کنیم و اعداد بزرگی را به مرتبه‌های بعدی نقل دهیم. اصلاحی که در این روش انجام می‌شود عبارت است از حذف این اعداد بزرگ که انجام اعمال ذهنی با آنها راحت نیست. برای منظور شیوهٔ جدیدی را در این روش به کار می گیریم که پروفسور تراختنبرگ آن را روش «دو انگشتی» نامیده است. نام «یکان و دهگان» را نیز می‌توانیم برای آن به کار بریم. ضمن تشریح این روش به علت این نامگذاریها که بیان کنندهٔ شیوهٔ کار هستند، پی خواهید برد.

بهتر است اول ببینیم خود این شیوه چیست، سپس از آن در انجام عملهای ضرب کامل استفاده کنیم. پس فعلاً موضوع عمل ضرب را که در این فصل با آن سرو کار داریم کنار می گذاریم و توجه خود را روی نکات زیر متمرکز می کنیم:

۱. هر رقم یک عدد تک پیکری است مثل ۵ یا ۷. صفر هم یک رقم است.

۲. وقتی رقمی را در رقم دیگر ضرب می کنیم، عددی یک رقمی یا دو رقمی، نه طولانیتر، به دست می آید. اثبات: بزرگترین عدد حاصل از ضرب کردن دو رقم، ۹ ضرب در ۹، یا ۸۱ است که فقط دو رقم دارد.

۳. گاه حاصل ضرب دو رقم در یکدیگر، عددی یک رقمی در می آید، مثل ۲ ضرب در ۳. در این موارد، این حاصل ۶، یا هر عددی که هست، در این روش با گذاشتن صفری جلوی آن، عددی دو رقمی به شمار می آید. در واقع در این روش مثلاً می گوییم و می‌نویسیم ۲ ضرب در ۳ می‌شود ۰۶. حُسن این کار ساده شدن دستورها و نحوهٔ عمل، از طریق یکدست شدن همهٔ حاصل ضربهای ارقام، به صورت عددهایی دو رقمی است. گذاشتن صفری جلوی یک عدد، مثلاً در ۰۶، طبعاً هیچ اثری روی ارزش واقعی آن عدد ندارد.

۴. در هر عدد دو رقمی، رقم سمت چپ، رقم «دهگان» و رقم سمت راست رقم «یکان» است. مثلاً در عدد ۳۷، رقم دهگان ۳ و رقم یکان ۷ است. این موضوع با کاربردهای روزمره وفق می‌دهد، زیرا ۳۷ تومان معادل ۳ ده تومانی و ۷ یک تومانی است.

۵. در استفاده از این روش جدید، خیلی وقتها تنها از رقم یکان اعداد استفاده می کنیم. مثلاً با رسیدن به ۲۴ فقط می گوییم «۴» و از ۲ که رقم دهگان است چشم‌پوشی می کنیم. به نظر می‌رسد که با کنار گذاشتن یک رقم و نادیده گرفتن آن باید خطایی در محاسبه وارد شود. اما اشکالی پیش نمی آید، زیرا رقم دهگان نادیده گرفته شده به نوبهٔ خود درجای دیگری وارد کار می‌شود. موارد دیگری هم هست که در آنها

فقط از رقم دهگان استفاده می کنیم و رقم یکان را نادیده می گیریم. در چنین موردی با نگاه کردن به ۲۴ می گوییم «۲».

۶. نکتهٔ مهم. در این روش جدید، خیلی وقتها ناگزیر می‌شویم موضوع نکتهٔ ۲ را با موضوع نکتهٔ ۵ ترکیب کنیم. به عبارت دیگر، هنگام ضرب کردن دو رقم در یکدیگر (مثل ۳ ضرب در ۸) تنها رقم یکان حاصل (رقم ۴ از ۲۴ که حاصل ۳ ضرب در ۸ است) یا در موارد دیگری، فقط رقم دهگان را، به کار می‌بریم. مثلاً ممکن است داشته باشیم ۵ ضرب در ۷ و فقط ۳ را که رقم دهگان ۳۵ است به کار ببریم.

این یک عمل ذهنی نامتعارف است. در عمل ضرب معمولی چنین چیزی نداریم. و نخستین دفعاتی که این کار را می کنیم برایمان قدری عجیب جلوه می کند. حالا به‌عنوان تمرین به مثالهای زیر نگاه کنید و نزد خود تنها رقم یکان حاصل ضرب را بگویید:

(۱) ۴×۳ (۲) ۳×۶ (۳) ۵×۴ (۴) ۸×۲

جوابها ۲، ۸، ۵، ۶ است. اکنون دوباره به همین مثالها برگردید و این بار رقم دهگان هر حاصل ضرب را نزد خود بگویید. جوابها بی شک ۱، ۱، ۲ و ۱ است.

۷. اینجاست که پای «یکان و دهگان» عملاً به میان می آید. دو رقم را کنار هم می گذاریم، مثلاً ۳ و ۸ را.هر یک از آنها را در یک رقم دیگر، مثلاً در ۴ ضرب می کنیم و همان طور که در بند ۵ گفته شد فقط رقم یکان یا رقم دهگان را اختیار می کنیم. اما این کار را به طریق خاصی انجام می‌دهیم. رقم یکان را فقط موقع ضرب کردن رقم سمت چپ (یعنی ۳) و رقم دهگان را فقط هنگام ضرب کردن رقم سمت راست (یعنی ۸) به کار می‌بریم. در این کار، حرف ی نشانهٔ به کارگیری رقم یکان و حرف د نشانهٔ استفاده از رقم دهگان حاصل است. نتیجهٔ عمل، که در آن اعداد کنار گذاشته شده را داخل پرانتز آورده‌ایم، چنین است:

$$\begin{array}{cccc} \text{ی} & \text{د} & & \\ ۳ & ۸ & \times & ۴ \\ \hline (۱)۲ & ۳(۲) & & \end{array}$$

از این پس، همیشه ی و د را با همین ترتیب خواهیم داشت. برای رقم سمت چپ جفت ارقامی که کنار هم هستند، مثل ۳ در ۸ ۳، فقط رقم یکان حاصل ضرب را اختیار می کنیم. در مورد رقم سمت راست این جفت ارقام، یعنی رقم ۸ در ۸ ۳، تنها از رقم دهگان حاصل ضرب استفاده می کنیم.

۸. سرانجام، یک کار دیگر هم باقی مانده است: دو رقمی را که در بند ۷ پیدا کردیم، با هم جمع می کنیم. در این مثال ۲ و ۳ را به دست آوردیم. حالا آنها را جمع می کنیم، می‌شود ۵. این نتیجه‌ای است که موقع ضرب عملاً به کار گرفته می‌شود.

توجه کنید که از جفت ارقام ۸ ۳ تنها یک رقم ۵ را به دست آوردیم. اینجا ۸ ۳ را در ٤ «ضرب» کردیم ولی این همان عمل ضرب معمولی نبود. این یکی از ویژگیهای روش «یکان و دهگان» است: یک جفت رقم در رقم سومی ضرب می‌شود و حاصل کار تنها یک رقم است، مثل رقم ۵ در مثال بالا. علت این امر آن است که ما تنها رقم یکان یکی از نتیجه ها را گرفتیم و دهگان آن را نادیده گرفتیم و در مورد نتیجهٔ دیگر هم عکس این کار را کردیم.

چون این کار بخش اصلی «روش دو انگشتی» است، جزئیات آن را به طور کامل بیان می کنیم. بار دیگر ۸ ۳ ضرب در ٤ را پیدا می کنیم (البته در اینجا «ضرب» به معنای معمولی نیست!)، و جزئیات عمل را در نمودار زیر نشان می دهیم:

$$\begin{array}{rcccc} & \text{ی} & \text{د} & & \\ \text{مسئله :} & ۳ & ۸ & \times & ۴ \\ \hline \text{عمل :} & ۱\underline{۲} & \underline{۳}۲ & & \\ & ۲ & + & ۳ & \\ \hline & & ۵ & & \end{array}$$

بی درنگ باید این نکته را هم بیفزاییم که بعد از آشنا شدن با این روش لزومی ندارد همهٔ این کارها را به طور کامل انجام دهیم. در واقع، تنها چیزی که می‌نویسیم، اعدادی است که می‌خواهیم با آنها کار کنیم، یعنی ۸ ۳ و ٤ ، و نتیجهٔ نهایی یعنی ۵. از این گذشته: پس از یاد گرفتن روش باید سعی کنیم در مورد اعدادی که برای توضیح عمل در نمودار بالا می بینید ، حتی فکر هم نکنیم. این کار ذهنی باید به طور نیمه خودکار و عمدتاً در زیر لایهٔ کاملاً آگاهانه، انجام بگیرد . به ۸ ۳ و ٤ نگاه می کنیم و به طور نیمه آگاهانه به ۲ و ۳ می‌رسیم (در ۱۲ و ۳۲) و تقریباً بی‌درنگ نزد خود می گوییم «۵». در اینجا هم مثل هر کار دیگری، تمرین کافی موجب آسان شدن کار می‌شود .

برای تأکید بر اهمیت این کار، نتیجهٔ آن را با اصطلاح خاص «حاصل ضرب جفتی» می‌نامیم. در مثال بالا عدد ۵ به دست آمده، حاصل ضرب جفتی ٤ × ۸ ۳ است.

> **تعریف. حاصل ضرب جفتی، عددی است که از ضرب کردن یک جفت رقم در یک رقم دیگر (مضروب‌فیه) به‌طریقی خاص به دست می آید: هر یک از دو رقم را جداگانه در رقم مضروب‌فیه ضرب می کنیم، آن گاه رقم یکان حاصل ضرب رقم سمت چپ جفت و رقم دهگان حاصل ضرب رقم سمت راست جفت را با هم جمع می کنیم.**

عددی که از این راه به دست می آید و حاصل ضرب جفتی خوانده می‌شود برای ما کاربرد دارد زیرا به کمک آن می‌توانیم عمل ضرب سریع را بدون نقل عددهای بزرگ به مرتبهٔ بالاتر، یا حتی بدون درگیر شدن با عددهای بزرگ انجام دهیم. بزودی خواهیم دید که این کار چگونه صورت می گیرد . ابتدا به ذکر مثالهایی می پردازیم که چند نکتهٔ ریز در آن قابل توجه است:

ی د

۸ ۲ × ۵

جواب، چنانکه احتمالاً خود نیز یافته‌اید، ۱ است؛ اگر شما به عدد دیگری رسیده‌اید، طرز یافتن آن را در زیر ببینید:

ی د

مسئله : ۸ ۲ × ۵

عمل : ۴۰ ۱۰ — هشت ۵ تا می‌شود ۴۰؛ دو ۵ تا می‌شود ۱۰

۰ + ۱

حاصل‌ضرب جفتی : ۱

ی د

مسئله : ۴ ۱ × ۳

عمل : ۱۲ ۰۳ — چهار ۳ تا می‌شود ۱۲؛ یک ۳ تا می‌شود ۳ یا ۰۳

۲ + ۰

حاصل‌ضرب جفتی : ۲

ی د

مسئله : ۱ ۴ × ۳

عمل : ۰۳ ۱۲ — یک ۳ تا می‌شود ۰۳؛ چهار ۳ تا می‌شود ۱۲

۳ + ۱

حاصل‌ضرب جفتی : ۴

ی د

مسئله : ۲ ۸ × ۴

عمل : ۰۸ ۳۲ — دو ۴ تا می‌شود ۰۸؛ هشت ۴ تا می‌شود ۳۲

۸ + ۳

حاصل‌ضرب جفتی : ۱ یا ۱۱

برای به دست آوردن حاصل ضرب جفتی، دو رقم را با یکدیگر جمع می کنیم. ممکن است، مثل نتیجهٔ ۱۱ در مثال اخیر، به نتیجه‌ای بیشتر از ۱۵ برسیم. اما توجه کنید که این مجموع بیش از ۱۸ نخواهد شد، در نتیجه با بیش از ده بر یک سر و کار نخواهیم داشت. نکاتی که در مثالهای بالا وجود داشت، به قرار زیر است:

۱. حاصل ضربهای یک رقمی را با فرض وجود صفری جلوی آنها دو رقمی در نظر می گیریم. مثلاً ۲ ضرب در ۲ می‌شود ۰۴، و ۶ ضرب در ۱ می‌شود ۰۶. هدف از این کار مقابله با اشتباهی است که ممکن است پیش بیاید. وقتی می‌خواهیم رقم دهگان ۲ ضرب در ۲ را سریعاً پیدا کنیم ممکن است رقم ۴ که فوراً به ذهنمان می آید ما را دچار اشتباه کند.

۲. وقتی دو حاصل ضرب جزئی، یعنی رقم دهگان یکی و رقم یکان دیگری، را جمع می کنیم، ممکن است حاصل جمع بیشتر از ۱۵ شود؛ یعنی ممکن است مجموع آنها دو رقمی در آید. در این مورد، طبق معمول، رقم یکان (مثلاً رقم ۳ از ۱۳) را می‌نویسیم و رقم دهگان (رقم ۱ از ۱۳) را به صورت نقطه‌ای نشان می‌دهیم. این کار به منزلهٔ نقل کردن یک (ده بر یک) است. اما نقل کردن رقم یک، کار ساده‌ای است. در اینجا هیچ وقت لازم نمی‌شود ۱۵ را نقل کنیم. حال آنکه در بعضی دیگر از روشهای ضرب، وقتی برای یکی از رقمهای جواب به مجموع ۱۵۳ برسیم باید ۱۵ را به مرتبهٔ بعد نقل کنیم. کوچک بودن رقم نقل شده مهم است زیرا نشان می‌دهد که رقمهایی که با آنها سروکار داشته‌ایم کوچک بوده‌اند.

۳. همیشه به یاد داشته باشیم که حاصل ضرب صفر در هر عددی صفر است، ولی هر عددی اگر در یک ضرب شود تغییری نمی کند.

۴. تنها یک یا دو بار باید محاسبهٔ حاصل ضرب جفتی به طور کامل، چنانکه در صفحات قبل برای ۸ ۳ ضرب در ۴ نشان دادیم، نوشته شود. بعد از یکی دو بار نوشتن، باید آن قدر فکر خود را متمرکز کنیم تا دو عدد ـــ مثل ۱۲ و ۳۲ ـــ در ذهنمان مجسم شود و رقمهای داخلی را

به یکدیگر بیفزاییم (و ۵ حاصل شود). تجسم کردن این کار در ذهن، حتی بدون تمرین داشتن، کار آسانی است. مهم این است که عمل بدون معطلی انجام شود. در واقع می‌خواهیم خود را به حدی برسانیم که احساس کنیم بعضی از مرحله‌ها را کنار گذاشته‌ایم ـ که در واقع به معنای آن است که بعضی از مراحل محاسبه را بدون تمرکز یا توجه به آنها انجام می‌دهیم. این مهارت بر اثر تمرین به دست می‌آید.

با در نظر داشتن نکاتی که در بالا گفته شد، بد نیست چند مسئله دیگر را حل کنید:

د ی	د ی
۳ × ۶ ۲	۳ × ۴ ۶
د ی	د ی
۵ × ۲ ۷	۷ × ۵ ۳
د ی	د ی
۳ × ۴ ۹	۵ × ۳ ۶
د ی	د ی
۸ × ۱ ۴	۷ × ۵ ۷
د ی	د ی
۶ × ۶ ۱	۵ × ۶ ۶

خوب، حالا صبر کنید. آیا تا اینجا همه چیز به طور کامل برایتان روشن است؟ اگر نیست، جا دارد که برگردید و آنچه را لازم است دوباره بخوانید. مطالبی که در چند صفحهٔ اخیر مطرح شد پیچیده نیست ولی خیلی اهمیت دارد که کاملاً درک کرده باشید. این مطالب در واقع هستهٔ اصلی روش این فصل را تشکیل می‌دهند.

ضرب کردن در اعداد یک رقمی

برای انجام ضربهای ساده می‌توانیم از حاصل ضربهای جفتی که قبلاً ذکر شده استفاده کنیم. فرض کنید می‌خواهیم ۳۱۱۲ را در ٦ ضرب کنیم. البته، این مثال ساده‌ای است، ولی ما از مثالهای ساده شروع می کنیم و کم کم به مثالهای مشکلتر می‌پردازیم. برای انجام این ضرب با استفاده از حاصل ضربهای جفتی به شیوهٔ تازه‌ای عمل می کنیم. در این شیوه، نکتهٔ اساسی این است که:

هر حاصل ضرب جفتی، یک رقم از جواب مطلوب است.

بد نیست یک مثال را به طور کامل حل کنیم. مانند روال فصل گذشته، صفری جلو مضروب می گذاریم. ضمناً از دو حرف «د ی» حرف ی را بالای محلی می گذاریم که رقم بعدی جواب ــ که فعلاً اولین رقم است ــ در آن نوشته خواهد شد:

د ی
۰ ۳ ۱ ۱ ۲ × ۶

حرف «د» فعلاً کاری نمی کند زیرا بالای هیچ رقمی نیست. تنها رقم یکان ۲ ضرب در ٦ را اختیار می کنیم.

مرحلهٔ اول:

د ی
۰ ۳ ۱ ۱ ۲ × ۶
۲

این ۲ رقم یکان ۱۲ است

مرحلهٔ دوم:

د ی
۰ ۳ ۱ ۱ ۲ × ۶
۷ ۲

دو حرف «د ی» به سمت چپ جابه‌جا شده‌اند. علت آن است که حرف ی در «د ی» همیشه بالای محلی قرار می گیرد که رقم بعدی جواب، یعنی ۷، در آن ظاهر خواهد شد. در این مثال، ۷ حاصل ضرب جفتی به دست آمده از رقم یکان ٦ ٥ (که حاصل ضرب ۱ در ٦ است) بعلاوهٔ رقم دهگان ۲ ١ (۲ ضرب در ٦) است.

در مرحلهٔ اول، رقم ۲ از ۳۱۱۲ به عنوان «ی» به کار رفت. در مرحلهٔ دوم دوباره از آن استفاده شد ولی این بار به عنوان «د». همیشه همین طور است. هر رقم از مضروب دو بار وارد کار می‌شود، یک بار زیر «ی» از «د ی» و یک بار زیر «د».

مرحلهٔ سوم: «د ی» را به رقم بعدی مضروب منتقل می کنیم.

د ی
۰ ۳ ۱ ۱ ۲ × ۶
۶ ۷ ۲

این ٦ حاصل ضرب جفتی حاصل از رقم یکان ٦ ٥ (۱ ضرب در ٦ می‌شود ٥٦)، بعلاوهٔ رقم دهگان ٥٦ (باز هم ۱ ضرب در ٦ می‌شود ٥٦) است.

مرحلهٔ چهارم: به سراغ رقم بعدی مضروب می‌رویم.

د ی
۰ ۳ ۱ ۱ ۲ × ۶
۸ ۶ ۷ ۲

این ۸ حاصل ضرب جفتی حاصل از رقم یکان ۱۸ (۳ ضرب در ٦)، بعلاوهٔ رقم دهگان ٥٦ (۱ ضرب در ٦ می‌شود ٥٦) است.

مرحلهٔ پنجم: به رقم آخر می رویم که همان صفر واقع در جلوی مضروب است.

د ی

۰ ۳ ۱ ۱ ۲ × ۶

ــــــــــــــــ

۱ ۸ ۶ ۷ ۲

این عدد حاصل ضرب جفتی حاصل از رقم دهگان ۱۸ (سه ۶ تا)، بعلاوهٔ رقم یکان ۰۰ (صفر ضرب در ۶ می‌شود صفر) است.

مسلماً وقتی در مضروب به رقم صفر می‌رسیم، دیگر لزومی ندارد راجع به رقم یکان یا رقم دهگان فکر کنیم. وقتی ۶ در صفر ضرب شود، حاصل چیزی جز صفر نیست.

در این روش، بر خلاف آنچه درروش مستقیم گفته شد، دلیلی برای پرهیز از رقمهای بزرگ وجود ندارد. بد نیست به جای مثالهای ساده‌ای که صرفاً شامل رقمهای ۱، ۲، ۳، بود، اکنون مسئله‌ای با رقمهای بزرگ‌تر مطرح کنیم. اکنون که با مفهوم حروف «د ی» در بالا جفتهای ارقام آشنا شدیم، می‌توانیم آنها را ننویسیم. از طرف دیگر هنوز این خطر هست که محل عمل را گم کنیم و رقمی را نابجا اختیار کنیم. به عنوان چارهٔ موقت، خط خمیده‌ای رسم می‌کنیم که یک سرش دو شاخه است و به کمک آن، هر دو رقم جفت ارقام را نشان می‌دهیم:

مرحلهٔ اول:

۰ ۷ ۵ ۸ — × ۷

۶

رقم یکان ۵۶، خط تیره چیزی پدید نمی‌آورد و دهگانی ندارد

مرحلهٔ دوم:

۰ ۷ ۵ ۸ — × ۷

·۰ ۶

این ۰(۱۰) حاصل جمع رقم یکان ۳۵ (پنج ۷ تا) و رقم دهگان ۵۶ (هشت ۷ تا) است

مرحلهٔ سوم:

۰ ۷ ۵ ۸ — × ۷

۰۳ ۰۵ ۶

این ۳ یا ۱۳ حاصل جمع رقم یکان ۴۹ (هفت ۷ تا) و رقم دهگان ۳۵ (پنج ۷ تا) و ده بر یک ۵ است

مرحلهٔ چهارم:

۰ ۷ ۵ ۸ — × ۷

۵ ۰۳ ۰۵ ۶

این ۵ حاصل جمع رقم دهگان ۴۹ (هفت ۷ تا) و ده بر یک ۳ است؛ صفر حاصل از صفر ۷ تا، تأثیری در نتیجه ندارد

پس جواب ۵۳۰۶ است.

در این مثال از همهٔ مزایای روش یکان و دهگان استفاده نکردیم. این مسئله راحتی با روش ضرب معمولی براحتی می‌شد حل کرد. نکتهٔ مهم این است که این گفته تنها در مورد ساده‌ترین مثالها صادق است. در اغلب مواردی که لازم می‌شود عمل ضربی انجام دهیم، اعدادی که با آنها سرو کار داریم عمداً طوری انتخاب نشده‌اند که کار با آنها راحت باشد. روش یکان و دهگان برای هر نوع ضربی قابل استفاده است.

وقتی از مرحلهٔ ضرب کردن در رقمهای ساده‌ای چون ۶ و ۷ بگذریم و به مضروب فیه‌های طولانیتر برسیم، مزایای روش یکان و دهگان را خواهیم دید. در عین حال، این عمل ضرب در اعداد یک رقمی، تمرین بسیار خوبی است زیرا هر مضروب فیه طولانی از تعدادی رقم تشکیل یافته و محاسبه برای آن عملاً تعمیم کاری است که تاکنون کرده‌ایم.

ضمناً اگر به مسئلهٔ اخیری که حل کردیم برگردیم و به طرز حرکت خط دو شاخه در طول مضروب و به سمت چپ توجه کنیم، پی می‌بریم که چرا این روش را روش «دو انگشتی» نامیده‌اند. کسی که تازه با این

روش آشنا می‌شود ممکن است در حفظ کردن محل عمل، یعنی در به خاطر سپردن جفت ارقامی که در حال ضرب کردن آنهاست، و اینکه کدام یک دارای نشانهٔ یکان است، دچار اشکال شود. برای آنکه محل عمل ضمن پیش بردن ضرب از دست نرود، شخص می‌تواند دو انگشت سبابه و میانی دست چپ خود را به سوی دو رقم جفت ارقام نگاه دارد. انگشت میانی دست چپ را «انگشت یکان» و انگشت سبابه را «انگشت دهگان» می‌نامیم. به این ترتیب، شخص تازه کار با مشخص کردن انگشتهایش، همیشه می‌تواند محل انجام عمل را با گذاشتن انگشتهایش به سوی جفت ارقام، حفظ کند. در این کار انگشت میانی نقش حرف «ی» را دارد که در بالای اعداد می‌نوشتیم و انگشت سبابه نیز به منزلهٔ حرف «د» است. اگر شما هم احساس می کنید که این شیوه کمکتان می کند، چه بهتر که از آن استفاده کنید. در هر صورت، خیلی زود متوجه خواهید شد که می‌توانید از گذاشتن انگشت چشم‌پوشی کنید زیرا محل عمل را گم نمی کنید.

از سوی دیگر، حتی پس از آنکه دیدید که می‌توانید کار را بدون گذاشتن انگشت یا کشیدن خطهای خمیده پیش ببرید، همچنان باید عادت کنید که عمل رابه صورتی پاکیزه و مرتب انجام دهید. رعایت نظم و ترتیب در انجام کار ابزار ساده‌ای برای پیشگیری از خطای احتمالی ناشی از بی‌دقتی شخص است، بخصوص وقتی که کسی عمل را با سرعت انجام می‌دهد. البته درستی این نکته چنان بدیهی است که ظاهراً نیازی به یادآوری ندارد. متأسفانه، تجربه نشان می‌دهد که اغلب مردم، حتی اکثریت افراد کاملاً دانش آموخته، عملیات را به صورتی در هم و نامنظم می‌نویسند.

یک یا چند تا از این مثالها را حل کنید و در این کار برای حفظ کردن محل عمل، از دست خود یا از هر شیوهٔ دیگری کمک بگیرید:

۱. ۵ ۶ × ۸
۲. ۵ ۶ ۷ × ۹
۳. ۸ ۵ ۴ × ۴
۴. ۸ ۴ ۵ ۶ ۴ × ۶

جوابها :

۱. ۴۴۸ ۲. ۵۱۰۳ ۳. ۳۴۱۶ ۴. ۵۰۷۳۷۸

حالا خودتان مثالهایی طرح و آنها را حل کنید. هر چه بیشتر از این مثالهای ساده حل کنید، ضربهای طولانی و دشوار را سریعتر و راحت‌تر انجام خواهید داد. این عمل ضرب در اعداد یک رقمی زیر بنای روش ضرب سریع است.

ضرب کردن در عددهای دو رقمی

تا اینجا اعدادی به طول دلخواه را در عددهای یک رقمی مثل ٦ یا ٧ ضرب می کردیم. اما چطور می‌توانیم عددی طولانی را، مثلاً در ۳۷، ضرب کنیم؟ یا در ۲۲۳۷؟ روش خود را نخست برای مضروب فیه‌های دو رقمی تعمیم می‌دهیم.

مطلب کلی آن است که اکنون روش فصل پیش را با آنچه در این فصل انجام داده‌ایم ترکیب می کنیم. این موضوع نه فقط برای مضروب فیه‌های دو رقمی بلکه برای هر مضروب فیهی صادق است. اگر به یاد بیاورید که با جفتهای بیرونی و درونی چگونه کار می کردیم و در طول اعداد پیش می‌رفتیم، خواهید دید که اینجا هم همان کار را می کنیم. تنها تفاوت در این است که اکنون از موضوع یکان و دهگان هم استفاده می کنیم.

مسئله ۷۳ ضرب در ۵٤ را در نظر بگیرید. در فصل پیش چنین مسائلی را با جفتهای بیرونی و درونی حل می کردیم. البته بهتر است فعلاً به عمل ضرب طبق روش فصل گذشته کاری نداشته باشیم، اما به منظور

مقایسه، نحوه جفت شدن رقمها را با یکدیگر نشان خواهیم داد. محل رقمی از جواب را که در هر مرحله به دست می‌آید با علامت X نشان می‌دهیم:

مرحلهٔ اول:

۰ ۰ ۷ ۳ × ۵ ۴

X لازم نیست عمل کنید! فقط به محل خطهای خمیده توجه کنید

مرحلهٔ دوم:

۰ ۰ ۷ ۳ × ۵ ۴

X

مرحلهٔ سوم:

۰ ۰ ۷ ۳ × ۵ ۴

X

مرحلهٔ چهارم:

۰ ۰ ۷ ۳ × ۵ ۴

X این آخرین ده بر یک است

این کاری است که در فصل قبل می کردیم. اکنون این کار را مقایسه کنید با نمودارهایی که برای روش این فصل داشتیم. دراینجا هم هنوز نمی‌خواهیم مسئله را حل کنیم بلکه صرفاً قصد داریم ببینیم خطهای جفتی چطور جابه‌جا می‌شوند:

مرحلهٔ اول:

۰ ۰ ۷ ۳ _ × ۵ ۴

X

خطهای نقطه چین بعداً لازم می‌شود؛ ولی فعلاً به کار نمی‌آیند

آیا توجه کرده‌اید که رقمی از مضروب واقع در بالای محلی که رقم بعدی جواب باید در آن وارد شود، همچنان بخشی از جفت بیرونی است؟

مرحلهٔ دوم:

۰ ۰ ۷ ۳ _ × ۵ ۴

اینجاست که پای یکان و دهگان به میان می‌آید. هر رقم از مضروب فیه روی دو رقم از مضروب اثر می‌کند. در این مثال، رقم ٤ از مضروب فیه روی دو رقم مجاور ۳ ۷ از مضروب عمل می‌کند تا حاصل ضرب جفتی به دست آید. خط واصل توپر نشان دهندهٔ رقم یکان و خط واصل نقطه‌چین نشان دهندهٔ رقم دهگان است. یعنی رقم یکان حاصل ضرب ۷ در ٤ و رقم دهگان حاصل ضرب ۳ در ٤ را اختیار می‌کنیم:

ی د

۰ ۰ ۷ ۳ × ۵ ۴

۲<u>۸</u>+<u>۱</u>۲

پیش از اتمام محاسبه، توجه کنید که خطها در بالای مضروب درست همان طوری جابه‌جا می‌شوند که در روش فصل قبل می‌شدند:

مرحلهٔ سوم:

۰ ۰ ۷ ۳ × ۵ ۴

X

اکنون رقم ٤ از ٥٤ هم به صفر وصل است هم به ٤۷؛ بعلاوه، رقم ٥ به ۷ و ۳ وصل است

مرحلهٔ چهارم:

$$\begin{array}{l}\text{۰ ۰ ۷ ۳} \times \text{۵ ۴}\\ \hline \text{X}\end{array}$$

نکتهٔ مهم: در این روش، محل خطها بیشترین اهمیت را داراست. راز اصلی دسترسی به جواب درست همین است. بقیهٔ کار، یعنی ضرب کردن رقمها در یکدیگر و اختیار کردن رقم یکان یا دهگان حاصل ضرب آنها کار آسانی است. بعلاوه، قبلاً در این کارها مهارت یافته‌اید. برای انجام ضربهای دشوار با عددهای طولانی، دشواری کار تماماً در به کار گرفتن دو رقم بجاست که با یکدیگر جفت و در هم ضرب شوند. با استفاده از جفت مناسب رقمها در موقع درست، رقم بعدی جواب حاصل می‌شود.

اینجا هم مثل روش فصل گذشته، رقمی از مضروب که درست بالای محلی واقع است که رقم بعدی جواب باید در آن وارد شود، بخشی از جفت بیرونی است؛ بویژه در روش فعلی این محل جای رقم یکان جفت بیرونی را مشخص می کند؛ رقم دهگان رقمی است که بلافاصله در طرف راست آن واقع است. از اینجا کار را به سمت داخل ادامه می‌دهیم و محل رقمهای یکان و دهگان جفت درونی را تعیین می کنیم.

برای یافتن رقم بعدی جواب، می‌توانید خط واقع در منتهی‌الیه سمت چپ الگوی کوچکی از خطها را که درنمودار بالا دیدیم رسم کنید یا رسم شده بینگارید. این خط درست بالای رقم بعدی جواب که باید محاسبه شود قرار می گیرد. در این صورت اگر نمودار را خوب دیده باشید و چگونگی آن را دریافته باشید، براحتی می‌توانید بقیهٔ آن الگو را نزد خود مجسم کنید. حل کامل این مثال به قرار زیر است:

مرحلهٔ اول:

۰ ۰ ۷ ۳ — × ۵ ۴

۲

رقم یکان ۳ ضرب در ۴، ۲ است؛ خطهای دیگر تماس کامل ندارند

مرحلهٔ دوم:

د ی

د ی

۰ ۰ ۷ ۳ — × ۵ ۴

۰۴ ۲

از رقم ۴ در ۵۴ داریم ۲۸ بعلاوهٔ ۱۲ که می‌شود ۹؛
از رقم ۵ داریم ۱۵ بعلاوهٔ صفر که می‌شود ۵؛
مجموع ۱۴ است

شاید اگر شکل را ساده‌تر کنیم، نکتهٔ اصلی آشکارتر دیده شود، مثل شکل زیر:

د ی

د ی

۰ ۰ ۷ ۳ — × ۵ ۴

جواب : ۰۴ ۲

از ۴ داریم : ۲<u>۸</u>+<u>۱</u>۲

از ۵ داریم : ۱<u>۵</u>+۰

حاصل جمع رقمهای یکان و دهگان که زیرشان خط کشیده شده، ۸ بعلاوهٔ ۱ بعلاوهٔ ۵ بعلاوهٔ صفر می‌شود ۱۴

معنای نمودار آن است که ما رقم ۴ از ۵۴ را به صورت زیر، در جفت ارقام ۷۳ ضرب می‌کنیم:

د ی

۷ ۳ × ۴

سپس رقم ۵ از ٤ ۵ را روی جفت ۳ و هیچ اثر می‌دهیم:

د ی

۳ — × ۵

بر اساس همان روش معمولی یکان و دهگان که قبلاً به آن پرداختیم، حاصل ٤× ۳ ۷ می‌شود ۹ (زیرا ۲۸ بعلاوهٔ ۱۲ می‌شود ۹) و حاصل ۵× ۳ می‌شود ۵ (۱۵ بعلاوهٔ هیچ). این دو حاصل را جمع می کنیم؛ ۹ بعلاوهٔ ۵ می‌شود ۱٤، که ٤ را می‌نویسیم و به جای رقم ۱ از ۱٤، نقطه‌ای می گذاریم.

عملاً موقع کار همهٔ اینها باید در ذهن انجام شود. در اینجا صرفاً به منظور توضیح دادن همهٔ جزئیات را می‌نویسیم. پس از آنکه مدتی با روش یکان و دهگان تمرین کردیم، انجام این کارها به طور ذهنی راحت خواهد بود. به همین علت بود که پیشتر گفتیم که تمرین کردن عمل ضرب در اعداد یک رقمی به عنوان مقدمهٔ فراگیری کل این روش، بسیار مفید است.

مرحلهٔ سوم:

د ی

د ی

۰ ۰ ۷ ۳ × ۵ ۴

جواب : ۹ ۰۴ ۲

از ۴ داریم : ۰ + ۲۸

از ۵ داریم : ۳۵ + ۱۵

با افزودن رقمهای یکان و دهگان مشخص شده داریم ۰ بعلاوهٔ ۲ بعلاوهٔ ۵ بعلاوهٔ ۱ می‌شود ۸، با افزودن ده بر یک، حاصل ۹ می‌شود.

مرحلهٔ چهارم:

د ی

د ی

۰ ۰ ۷ ۳ × ۵ ۴

جواب : ۳ ۹ ۴ ۲

از۴داریم : ۰ ۰

از۵داریم : ۰ ۳۵

وقتی در صفر ضرب می‌کنیم لزومی ندارد نتیجهٔ ۰۰ را بنویسیم، معلوم است که چیزی: ۰ بعلاوهٔ ۰ بعلاوهٔ ۰ بعلاوهٔ ۳ می‌شود ۳

پس جواب ۳۹٤۲ است.

ضرب اعداد طولانی در عددهای دو رقمی

با همین روش می‌توانیم عددی به هر طول را در عددی دو رقمی ضرب کنیم. در مثال قبل، ۷۳ را در ٥٤ ضرب کردیم. فرض کنید اکنون می‌خواهیم ۵۲۷۳ را در ٥٤ ضرب کنیم. دو مرحلهٔ اول عیناً مانند مثال قبل است:

مرحلهٔ اول:

د ی

۰ ۰ ۵ ۲ ۷ ۳ × ۵ ۴

۲

از ٤ داریم ۱۲ بعلاوهٔ صفر

مرحلهٔ دوم:

د ی

د ی

۰ ۰ ۵ ۲ ۷ ۳ × ۵ ۴

۴ ۲

از ٤ داریم ۲۸ بعلاوهٔ ۱۲؛ از ٥ داریم ۱۵ بعلاوه صفر؛

مجموع رقمهای مشخص شده می‌شود ۱٤

حالا همین شیوه را ادامه می‌دهیم:

مرحلهٔ سوم:

د ی
د ی
۰ ۰ ۵ ۲ ۷ ۳ × ۵ ۴
۰۷ ۰۴ ۲
از ۴ داریم: ۰۸ + ۲۸
از ۵ داریم: ۳۵ + ۱۵

مجموع رقمهای مشخص شده ۱۶ است که با ده بر یک می‌شود ۱۷

مرحلهٔ چهارم:

د ی
د ی
۰ ۰ ۵ ۲ ۷ ۳ × ۵ ۴
۴ ۰۷ ۰۴ ۲
از ۴ داریم: ۲۰ + ۰۸
از ۵ داریم: ۱۰ + ۳۵

مجموع رقمهای مشخص شده ۳ است که با ده بر یک نقل شده از ۱۷ می‌شود ٤

مرحلهٔ پنجم:

د ی
د ی
۰ ۰ ۵ ۲ ۷ ۳ × ۵ ۴
۸ ۴ ۰۷ ۰۴ ۲

این یکی را خودتان حساب کنید

آخرین مرحله:

د ی
د ی
۰ ۰ ۵ ۲ ۷ ۳ × ۵ ۴
۲ ۸ ۴·۷·۴ ۲
۰+۰
۰+۲۵

پس جواب ۲۸۴۷۴۲ است.

مسلماً در موارد عملی همهٔ این رقمها را در هر مرحله مجدداً نمی‌نویسیم ــ همان یک بار کافی است! ــ و هیچ یک از رقمهای نشان‌دهندهٔ «عمل» را یادداشت نمی‌کنیم. همهٔ این کارها را می‌توانیم براحتی درذهن خود انجام دهیم. اگر در مورد حاصل ضربهای جفتی تمرین کافی داشته باشیم، محاسبه سریع و راحت انجام می‌شود. مثلاً با دیدن ۳ ۷ ضرب در رقم ٤، مثلاً از ٤ ۵، تقریباً بلافاصله می گوییم «۹». پس از آنکه به قدر کافی تمرین کردیم بی هیچ تلاش ذهنی می‌توانیم ۱۲ + ۲۸ را تجسم کنیم. در واقع، چنانکه قبلاً نیز گفتیم این کار به صورت عملی نیمه خودکار در می آید و بدون نیاز به تمرکز تمامی توجه شخص، انجام می‌شود. هدف ما هم رسیدن به این جایگاه است.

ضرب در عددهای سه رقمی

برای ضرب کردن عددی به طول دلخواه، در یک مضروب فیه سه رقمی، مثل ۲۷۳ ضرب در ۱۵٤، یا ۵۲۷۳ ضرب در ۱۵٤، یا ۲۳۵۲۷۳ ضرب در ۱۵٤ همان اصول کلی به کار می آید. اما در این حالت، هر رقم از

جواب مجموع سه جزء است. قبلاً هر رقم از جواب، مجموع دو جزء بود. چنانکه خواهیم دید، هر یک از این سه جزء، از یک جفت ارقام جداگانه، با استفاده از موضوع آشنای یکان و دهگان، به دست می آید. بد نیست مثالی حل کنیم، ۲۷۳ ضرب در ۱۵۴ را به دست می آوریم. ابتدا ۳ صفر جلوی مضروب می گذاریم (۱۵٤ عددی ۳ رقمی است!).

مرحلهٔ اول:

د ی

۰۰۰۲۷۳ × ۱۵۴

۲

۰ + ۱۲ : از رقم ۴ در عدد ۱۵۴ داریم

رقمهای ۵ و ۱ در ۱۵٤ با چیزی جفت نمی‌شوند، پس در جواب اثر ندارند

مرحلهٔ دوم:

د ی

د ی

د ی

۰۰۰۲۷۳ × ۱۵۴

۰۴ ۲

۹ = ۱۲ + ۲۸ : از ۴ داریم

۵ = ۰ + ۱۵ : از ۵ داریم

از ۱ چیزی حاصل نمی‌شود زیرا این رقم با چیزی جفت نمی‌شود

در واقع، اگر این کار را با مثال قبل مقایسه کنید، در می‌یابید که تا اینجای کار هیچ تفاوتی با آن ندارد. علت آن است که هنوز از رقم ۱ در ۱۵٤ برای یافتن جواب استفاده نشده است؛ به عبارت دیگر هنوز این ۱ با هیچ جزئی از ۲۷۳ جفت نشده است. حالا کار را ادامه می‌دهیم:

مرحلهٔ سوم:

ی د
ی د
ی د

۰ ۰ ۰ ۲ ۷ ۳ × ۱ ۵ ۴

۰۰۵ ۰۴ ۲

مجموع رقمهای مشخص شده می‌شود ۱۹ که با ده بر یک می‌شود ۲۰

۰۸ + ۲۸ : از ۴ داریم

۳۵ + ۱۵ : از ۵ داریم

۰۳ + ۰ : از ۱ داریم

مرحلهٔ چهارم:

ی د
ی د
ی د

۰ ۰ ۰ ۲ ۷ ۳ × ۱ ۵ ۴

۰۲ ۰۰۵ ۰۴ ۲

رقم ٤ هنوز نقشی دارد؛ رقم دهگان ۲ ضرب در ٤ از آن گرفته می‌شود. اما این رقم صفر است، زیراحاصل ۲ ضرب در ٤ می‌شود ۰۸. در این مرحله نقش واقعی فقط مربوط است به ۵ که به ازای آن: ۱۰ بعلاوهٔ ۳۵، و ۱ که به ازای آن: ۰۷ بعلاوهٔ ۰۳ را داریم.

مرحلهٔ پنجم:

ی د
ی د
ی د

۰ ۰ ۰ ۲ ۷ ۳ × ۱ ۵ ۴

۴ ۰۲ ۰۰۵ ۰۴ ۲

در این مرحله رقم ٤ نقشی ندارد و «د ی» آن فقط شامل صفر است

۰ + ۰ : از ۴ داریم

۰ + ۱۰ : از ۵ داریم

۰۲ + ۰۷ : از ۱ داریم

مرحلهٔ آخر:

د ی

۰ ۰ ۰ ۲ ۷ ۳ × ۱ ۵ ۴

۰ ۴ ۲ ۰ ۴ ۲

جواب ٤٢٠٤٢ است. از این مثال روشن می‌شود که اگر مضروب فیه دارای چهار رقم یا بیشتر باشد چه باید کرد.

در این مبحث مضروب فیه‌هایی را که رفته رفته طولانیتر می‌شدند در نظر گرفتیم، اول یک رقمی، بعد دو رقمی، سپس سه رقمی و البته این کار موجب شد که برخی مطالب چند بار تکرار شود. این نحوهٔ بیان مرحله به مرحله در وهلهٔ نخست به این منظور اختیار شد که مطمئن شویم موضوع بروشنی عرضه شده و خواسته‌ایم که خواننده آن را بخوبی درک کند. باید بیفزاییم که در این شیوهٔ مرحله به مرحله منظور دیگری هم داشته‌ایم. این نحوهٔ بیان، تأکید می کند روش درست تمرین کردن این روش به همین صورت است. وقتی دهها عمل ضرب در اعداد یک رقمی انجام شود، کار با مضروب فیه‌های دو رقمی به همان آسانی که واقعاً هم هست به نظر خواهد رسید. تمرین کردن با مضروب فیه‌های دو رقمی به حدی که مهارتی در آن حاصل شود، ضربهای طولانیتر را آسان خواهد کرد. روی هم رفته، مقدار تمرین لازم برای تسلط یافتن به کل این روش مجموعاً چیزی در حدود چند ساعت است. در پایان این تمرینها، مجهز به روشی تازه و جالب و سرعت جدیدی در محاسبه خواهیم بود. میزان سرعت به دست آمده بستگی به مقدار تمرینی دارد که صرف آن می کنیم؛ با تمرین کافی می‌توانیم به سرعتهای شگفت انگیز برسیم.

چکیدهٔ مطالب

به طور خلاصه، روش دو انگشتی شامل سه ویژگی زیر است:

۱. در اینجا با تشکیل حاصل ضرب جفتی سر و کار داریم، که مثلاً حاصل ضرب جفتی ۷ را برای ۳ ۵ ضرب در ۷ می‌دهد:

```
 ی   د
 ۵   ۳   ×   ۷
۳۵ + ۲۱
 ۵ + ۲
   ۷
```

حاصل ضرب جفتی

۲. در این روش، شیوه‌ای برای ضرب کردن هر عدد در یک رقم داریم که به کمک حاصل ضربهای جفتی انجام می‌شود:

```
      ی د
۰ ۳ ۲ ۵ ۳   × ۷
        ۱
```

رقم یکان ۳ ضرب در ۷ که ۲۱ است، ۱ است

```
      ی د
۰ ۳ ۲ ۵ ۳ × ۷
      ۷ ۱
```

این ۷ حاصل ضرب جفتی ۷ در ۵۳ است

این کار را ادامه می‌دهیم تا مرحلهٔ آخر:

```
ی د
۰ ۳ ۲ ۵ ۳ × ۷
۲ ۲ ۷ ۷ ۱
```

۳. این روش ضرب در اعداد یک رقمی را می‌توانیم برای ضرب در اعدادی به هر طول تعمیم دهیم. در این مورد برای یافتن هر رقم از جواب، چند حاصل ضرب جفتی تشکیل و حاصل آنها با یکدیگر جمع می‌شود. این چند حاصل ضرب جفتی همان جفتهای «بیرونی» و «درونی» هستند که با حرکت از دو انتها به طرف داخل و به سوی فضای بین دو عددی که در هم ضرب می‌شوند، اختیار می‌شوند:

```
  د ی
    د ی
۰ ۰ ۷ ۳      × ۵ ۴
-------
      ۲
```

سپس

```
  د ی
    د ی
۰ ۰ ۷ ۳   × ۵ ۴
-------
   ·۴ ۲
```

این ۱۴ مجموع ۸ و ۱ و ۵ است که از ۲<u>۸</u>، <u>۱</u>۲ و <u>۱۵</u> گرفته شده‌اند.

این کار را ادامه می‌دهیم تا مرحلهٔ آخر:

```
د ی
  د ی
۰ ۰ ۷ ۳ × ۵ ۴
-------
۳ ۹·۴ ۲
```

به یاد داشته باشید که در هر مسئله‌ای، اولین «ی» در الگوی «د ی» ـ یعنی «ی» واقع در منتهی الیه سمت چپ ـ همیشه درست بالای محلی قرار می‌گیرد که رقم بعدی جواب در آن نوشته خواهد شد.

مسائلی برای تمرین

حاصل ضرب جفتی جفت ارقام زیر را به صدای بلند بگویید (جواب در پایان تمرینها داده شده است):

۱. ۶۷ × ۸
۲. ۵۶ × ۴
۳. ۹۴ × ۲
۴. ۷۷ × ۶
۵. ۶۶ × ۷
۶. ۵۹ × ۷

ضربهای زیر در اعداد یک رقمی را با استفاده از یک حاصل ضرب جفتی برای هر رقم از جواب انجام دهید :

۷. ۵۶ × ۴
۸. ۸۲ × ۸
۹. ۳۹۴۵ × ۶

ضربهای زیر را با استفاده از حاصل ضربهای جفتی و جفتهای درونی و بیرونی انجام دهید (دو حاصل ضرب جفتی برای هر رقم از جواب):

۱۰. ۹۵ × ۶۲
۱۱. ۳۸ × ۶۶
۱۲. ۸۳ × ۴۵
۱۳. ۳۴۵۶ × ۸۶
۱۴. ۴۳۵۴۶ × ۶۲

جوابها:

۱.	۱۳	۵.	۶	۹.	۲۳۶۷۰	۱۳.	۲۹۷۲۱۶
۲.	۲	۶.	۱۱	۱۰.	۵۸۹۰	۱۴.	۲۶۹۹۸۵۲
۳.	۸	۷.	۲۲۴	۱۱.	۲۵۰۸		
۴.	۶	۸.	۶۵۶	۱۲.	۳۷۳۵		

فصل چهارم

عمل جمع و یافتن جواب درست

در فصلهای گذشته روشهایی برای عمل ضرب با تأکید بر سرعت کار بیان کردیم. در عین حال، به لزوم دقت نیز توجه داشتیم و اهمیت امتحان کردن نتایج را نشان دادیم.

در مورد جمع نیز با این دو عامل، یعنی سرعت و دقت، سرو کار داریم. در این فصل روشی برای عمل جمع بیان می کنیم که سریعتر از روش مورد استفادهٔ اغلب مردم است، و شیوه‌ای برای امتحان کردن و امتحان مجدد نتایج مطرح می کنیم. اما اینجا بر جنبه‌های دیگری تأکید می‌شود. در استفاده از روش جمع معمولی، فرد عادی همیشه نمی‌تواند ستون نسبتاً بلندی از ارقام را بدون مرتکب شدن اشتباه، جمع بزند. فرض کنیم چنین کسی می‌خواهد ستونی از اعداد پنج رقمی را با یکدیگر جمع کند. طبعاً باید پنج ستون جداگانه را جمع بزند و احتمال دارد با استفاده از روش جمع معمولی، در یکی از این پنج مورد اشتباهی بکند.

اینجا یاد می گیریم که کار خود را با امتحان کردن یکایک ستونها بررسی کنیم، بی آنکه لزومی به تکرار عمل جمع باشد. این کار چند فایده دارد:

۱. از انجام دوبارهٔ کار صرفه‌جویی می‌کنیم، و در عین حال

۲. محل اشتباه را، در صورت وجود، در ستونی که رخ داده پیدا می‌کنیم (که با این کار تصحیح آن راحت می‌شود)، و

۳. مطمئن هستیم که اشتباه را پیدا می‌کنیم، در حالی که در صورت تکرار کل عمل، این اطمینان وجود ندارد.

این نکتهٔ اخیر چیزی است که اغلب اشخاص آن را درک نمی‌کنند. هر یک از ما ضعفهای خاص خود و اشتباهات از نوع خاص خود را داریم. این وضع در مورد املای واژه‌ها هم وجود دارد: شخصی که سایر واژه‌ها را درست می‌نویسد ممکن است کلمهٔ «وهله» را به غلط «وحله» بنویسد، و شخص دیگری ممکن است به جای «زغال» به غلط «ذغال» بنویسد[1]. در حساب هم همین وضع پیش می‌آید، هر چند ممکن است کمتر به آن توجه کرده باشیم. ممکن است کسی به غلط گرایش داشته باشد به اینکه بگوید هشت ۷ تا می‌شود ۵۴ تا. اگر مستقیماً از او بپرسید خواهد گفت «۵۶ تا» ولی در ضمن محاسبه‌ای طولانی بر اثر لغزش «۵۴ تا» را به کار می‌برد. اشخاص دیگر، گیرهای دیگری دارند. این خود دلیلی است بر اینکه تکرار یک محاسبه شیوهٔ کارامدی برای امتحان کردن آن نیست. همیشه این احتمال وجود دارد که خطایی که محاسبه کننده در نخستین بار مرتکب شده، خطایی باشد که او بدان گرایش دارد، و هنگام امتحان کردن به وسیلهٔ تکرار محاسبه، به احتمال زیاد آن خطا را تکرار خواهد کرد.

اگر کسی را راضی کنیم که عمل محاسبهٔ ما را امتحان کند، ممکن است خطاهای «طبیعی» رهایمان نکند. اینها اشتباهاتی هستند که هر کسی در اوضاع مشابه دچارشان می‌شود. بدخطی اشخاص یکی از عوامل بروز این نوع خطاهاست. اگر کسی عادت داشته باشد که رقم ۵ را به

---

۱. در متن اصلی دو کلمهٔ انگلیسی parallel و harass مثال آورده شده که گاه به غلط paralell و harrass نوشته می‌شوند - م.

صورت ۵ بنویسد، هنگام تند نوشتن ممکن است دندانهٔ پایین را خوب شکل ندهد و آن را خیلی شبیه به رقم ٥ (صفر) بنویسد. در این صورت، هر کس دیگری هم که کار را امتحان می کند، درست مثل نفر اول که مرتکب اشتباه اصلی شده، آن را ٥ خواهد خواند[۱].

خیلی اشتباهات طبیعی دیگر هم هست که در موارد مختلفی پیش می آید: چند بار تکرار کردن کاری که یک بار باید تکرار شود، جابه‌جا شدن محل دو کار و انواع دیگری در این ردیف. اما در زندگی روزمره، این خطاهای طبیعی که برای هر کسی طبیعی‌اند، از خطاهای شخصی ما کم اهمیت‌ترند، چرا که بندرت می‌توانیم کسی را پیدا کنیم که به درخواست ما کارمان را امتحان کند.

با توجه به تمامی آنچه گفته شد، این حکم کلی را می‌توان کرد که عملاً هر نوع روش دیگری برای امتحان کردن، بهتر از تکرار عمل است. در روش تراختنبرگ، شیوهٔ خاصی برای امتحان کردن وجود دارد. بعلاوه، در این روش به مرزهای تازه‌ای از سرعت می‌رسیم که برای بسیاری از افراد یا شاید برای اغلب اشخاص، تازگی دارد.

یافتن مجموع

اینجا هم مثل روش معمولی جمع، اعدادی را که باید با هم جمع شوند، در یک ستون می‌نویسیم و زیر عدد پایینی خطی می کشیم، تا مجموع در زیر ستون ثبت شود. موقع نوشتن اعداد به یاد داریم که قاعدهٔ ریاضی برای محل نوشتن اعداد آن است که ممیزها درست زیر هم واقع شوند، یعنی همه در یک ستون قرار گیرند.

---

۱. در متن اصلی به اشتباه کسی اشاره شده که رقم 4 انگلیسی را به هنگام تند نوشتن به گونه‌ای بنویسد که ممکن است با 9 اشتباه شود - م.

برای جمع کردن ۱۲/۵، ۲۷۱/٦۵ و ۳/۵۱، می‌نویسیم:

۱۲/۵
۲۷۱/٦۵
۳/۰۱

خیلی وقتها ممیزی در میان نیست، مثلاً در عدد ۷۳، ولی در این موارد جای ممیز بلافاصله پس از عدد است؛ شکل کامل این عدد /۷۳ است که البته کسی آن را به این صورت نمی‌نویسد. بنابراین وقتی اعداد داده شده ممیز ندارند، آنها را بر اساس آخرین رقمشان که جای ممیزهای نانوشته کنار آنهاست ردیف می کنند. این کاری است که در روش معمولی جمع انجام می‌دادیم، و در این روش جدید هم اعداد را به همین شیوه مرتب می کنیم. نمونه‌ای از اعداد مرتب شده برای عمل جمع را در زیر می‌بینید:

۳ ٦ ۸ ۹
۷ ۵ ۸
۹ ٦ ٦ ۷
۱ ۰ ٦ ٤
٦ ٤ ۹ ۸
۷ ٤ ۵
۹ ۹ ٦ ۸
۵ ۸ ۸ ۷
۹ ۹ ۸ ۸
۷ ٦ ۱ ۵
۸ ۷ ٤ ۹

در روش جمع معمولی در این مرحله باید رقمهای ستون دست را با هم جمع کنیم: ۹ بعلاوهٔ ۸ بعلاوهٔ ۷، الی آخر. در صورت تمایل در روش

جدید هم می‌توانید همین کار را بکنید ولی این کار اجباری نیست: کار را می‌توانید از هر ستونی آغاز کنید. برای تنوع، از ستون دست چپ شروع می‌کنیم. رقمها را از بالا به پایین جمع می‌زنیم ولی این دستور تراختنبرگ را به کار می‌بندیم که:

در شمارش از یازده بالاتر نروید

یعنی وقتی مجموع فرعی بیش از ۱۱ شد، ۱۱ تا از آن کم می‌کنیم و کار را با باقیمانده کاهش ادامه می‌دهیم. ضمن این کار یک علامت یا نشانه هم کنار عددی که مجموع را از ۱۱ بیشتر کرده است، می‌گذاریم. در این مثال، روی ستون دست چپ، که آن را مجدداً در زیر آورده‌ایم پایین می‌رویم و محاسبات ذهنی را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

۳

۹ ۳ بعلاوهٔ ۹، ۱۲: این عدد بیش از ۱۱ است، پس ۱۱ را از ۱۲ کم می‌کنیم. نشانه‌ای کنار ۹ می‌گذاریم و کار جمع را با ۱ ادامه می‌دهیم.

۱ ۱ بعلاوهٔ ۱، ۲

۶ ۲ بعلاوهٔ ۶، ۸

۹ ۸ بعلاوهٔ ۹، ۱۷: نشانه‌ای می‌گذاریم و از ۱۷، ۱۱ تا کم می‌کنیم. می‌گوییم «۶» و ادامه می‌دهیم.

۵ ۶ بعلاوهٔ ۵، ۱۱: نشانه می‌گذاریم، می‌گوییم «صفر»، و ادامه می‌دهیم.

۹

۷ ۹ بعلاوهٔ ۷، ۱۶: نشانه می‌گذاریم، می‌گوییم «۵»، و ادامه می‌دهیم.

۸ ۵ بعلاوهٔ ۸، ۱۳: نشانه می‌گذاریم و می‌نویسیم ۲.

رقم نهایی را که ۲ است به عنوان «مجموع فرعی»، زیر ستون می‌نویسیم.

سپس تعداد نشانه‌هایی را که هنگام کاستن ۱۱ ها گذاشته‌ایم، می‌شماریم. در این مثال چند تا داشتیم؟ پنج تا. پس ۵ را زیر ستون به عنوان «رقم نشانه» می‌نویسیم. حالا مثال به شکل زیر در آمده است:

۳ ۶ ۸ ۹

۷ ۵ ۸

۹′ ۶ ۶ ۷

۱ ۰ ۶ ۴

۶ ۴ ۹ ۸

۷ ۴ ۵

۹′ ۹ ۶ ۸

۵′ ۸ ۸ ۷

۹ ۹ ۸ ۸

۷′ ۶ ۱ ۵

۸′ ۷ ۴ ۹

۲: مجموعهای فرعی

۵: نشانه ها

جواب مورد نظر به کمک مجموعهای فرعی و عدد نشانه‌ها به دست می آید . اما ابتدا باید همین کار را در ستونهای دیگر نیز انجام دهیم. نتیجه به صورت صفحهٔ بعد خواهد بود:

۳ ۶ ۸ ۹
۷′ ۵′ ۸′
۹′ ۶ ۶ ۷′
۱ ۰ ۶′ ۴
۶ ۲′ ۹′ ۸′
۷ ۴ ۵
۹′ ۹′ ۶′ ۸′
۵′ ۸′ ۸ ۷′
۹ ۹′ ۸′ ۸
۷′ ۶ ۱ ۵′
۸′ ۷′ ۴ ۹′

مجموعهای فرعی : ۲ ۳ ۱۰ ۱
نشانه‌ها : ۵ ۶ ۵ ۷

اکنون برای رسیدن به نتیجهٔ نهایی، مجموعهای فرعی و نشانه‌ها را به این طریق جمع می کنیم: همسایهٔ سمت راست واقع در ردیف پایینی را هم که مربوط به نشانه‌هاست، می‌افزاییم. مثلاً به این صورت:

- ۳ - -
- ٦ ۵ -

۱٤ ۳ بعلاوهٔ ٦ بعلاوهٔ ۵

در این مثال داریم:

۰ ۲ ۳ ۱۰ ۱
۰ ۵ ۶ ۵ ۷

۱ بعلاوهٔ ۷ می‌شود هشت ۸
۱۰ بعلاوهٔ ۵ بعلاوهٔ ۷ می‌شود ۲۲ ۰۰۲
۳ بعلاوهٔ ٦ بعلاوهٔ ۵ بعلاوهٔ بیست بر دو می‌شود ۱٦ ۰۶
۲ بعلاوهٔ ۵ بعلاوهٔ ٦ بعلاوهٔ ده بر یک می‌شود ۱٤ ۰۴
صفر بعلاوهٔ صفر بعلاوهٔ ۵ بعلاوهٔ ده بر یک می‌شود ٦ ۶

این نوع خاص از عمل جمع، یعنی افزودن همسایهٔ سمت راست رقم پایینی، در این روش جنبهٔ عمومی دارد و همیشه به کار خواهد رفت.

اگر عملاً بخواهیم مثال بالا را حل کنیم، جواب به صورت زیر نوشته می‌شود:

(ستونهای ارقام)

۰	۲	۳	۱۰	۱
۰	۵	۶	۵	۷
۶	۰۴	۰۶	۰۰۲	۸

برای جمع کردن این دو ردیف، مثل آنچه در جمع عادی انجام می گیرد، از منتهی الیه سمت راست شروع می کنیم. در آخرین مرحله، باید فرض کنیم دو صفر به صورت بالا، یکی بالای دیگری وجود دارند، مگر اینکه واقعاً آنها را نوشته باشیم. علت آن است که اینجا چیزی برای جمع کردن وجود دارد، یعنی رقم انتهایی سمت چپ در ردیف نشانه‌ها که در این مورد ۵ است. این وضع از آن رو پیش می آید که رقمها را نه به صورت عادی بلکه «به شکل L» جمع می‌زنیم. در آخرین مرحله به رقمهای زیر می‌رسیم:

۰		
۰	۵·	
۰	۶	۵ بعلاوهٔ ده بر یک می‌شود ٦

در همهٔ موارد به همین شیوه عمل می‌شود.

یک میانبر ساده

برای آسانتر کردن این عمل جمع، توجه کنید که وقتی از «دستور کاستن یازده» استفاده می کنیم ضمن پایین آمدن در هر ستون هر گز به مجموعی بیشتر از ۱۹ نمی‌رسیم. پس هر وقت از ۱۱ بالاتر می‌رویم، اولین

رقم یا رقم سمت چپ حتماً ۱ است. پس برای «کاستن ۱۱» نیازی به انجام یک عمل کاهش واقعی نیست. کافی است نخستین رقم را نادیده بگیریم و از رقم دیگر یکی کم کنیم: اگر ۱۶ داریم، فقط ٦ را در ذهن می آوریم و آن را به ۵ کاهش می‌دهیم. پس ضمن گذاشتن نشانه، ۱٦ به ۵ تبدیل می شود. شاید این موضوع بدیهی به نظر برسد ولی چنین نیست. عملاً ضمن حل مسائل، نحوهٔ در ذهن آوردن می‌تواند کار را دو برابر دشوارتر یا دو برابر آسانتر کند.

در مثال ساده و کوتاه زیر، اعدادی با دو رقم اعشاری را با یکدیگر جمع کنید:

۰/۸۹	
۰/۲۳	
۰/۹۶	با رسیدن به ۱۱ توقف
۱/۰۴	کنید و نشانه‌ای بگذارید!
۰/۳۹	
۰/۲۵	

یادتان مانده بود که موقع جمع کردن دو ردیف پایین، همسایهٔ سمت راست پایینی را هم بیفزایید؟ اگر این کار را کرده باشید باید به جواب درست که ۳/۷٦ است رسیده باشید. برای روشن‌تر شدن موضوع، ردیفهای پایینی را می‌نویسیم که به صورت زیرند:

۱/۲۳
۰/۲۳

و اگر هنگام جمع، رقمهای همسایهٔ سمت راست پایینی در ردیف پایینی یعنی رقمهای ۰/۲۳ را نیز بیفزایید، حاصل جمع ۳/۷٦ می شود.

مثال ۱:

۵ ۴ ۷ ۷
۹ ۶ ۶ ۵
۲ ۷ ۴ ۶
۸ ۳ ۵ ۶
۷ ۴ ۹ ۹
۵ ۱ ۶ ۲
۶ ۸ ۷ ۵

مجموعهای فرعی: ۹ ۰′ ۰ ۷
نشانه‌ها: ۳ ۳ ۴ ۳

جمع کل: ۴ ·۵ ۷ ۸ ·۰

مثال ۲:

۱ ۶ / ۳ ۹
۵ ۰ ۷ / ۲ ۶
۱ ۹ ۵ / ۰ ۰
۷ ۸ / ۳ ۷
۶ ۴ / ۲ ۷
۴ / ۷ ۵
۸ ۸ / ۴ ۷
۲ ۸ ۶ / ۵ ۵

مجموعهای فرعی: ۸ ۶ ۴ / ۴ ۲
نشانه‌ها: ۰ ۳ ۴ / ۲ ۴

جمع کل: ۱ ·۲ ·۴ ·۱ / ·۰ ۶

چند مسئله برای تمرین عرضه می کنیم که جوابهای درست نیز به دنبال

آنها داده شده است. شما هم براحتی می‌توانید مسائل مشابهی برای‌خودتان مطرح کنید:

مسئلهٔ ۱:

٤٦٩
٧٤٢
٣٢٥
٩٦٢
٥٢٧
٦٢٣
٢١٣
———

مسئلهٔ ۲:

٦١٥٩٨
٥٠٤٢٣
٧٢٤٦
٧٤٤
٤٢
٩٣٥٧
٢١
———

مسئلهٔ ۳:

١/٢٥
٣/٠٦
٧/٥٨
٠/٩٨
٣٨/٥٠
٥٩/٥٠
٩/٧٥
٢/٩٨
١٢/٢٥
١٤/٨٥
٤٥/٠٠
٢٥/٧٥
———

مسئلهٔ ٤:

١٦٦/١٥
٣٥/٩٤
٣٤/١٣
٧٠٥/٧٥
٤٢٢/٥٠
٢/٩٩
١٦/٧٧
٥٢٢/٣٥
٨٧٥/٨٨
٢٧/٦٦
٥٥/١٨
١٤٩/٧٥
———

جوابهای زیر از به کار بردن عمل جمع به صورت L برای مجموعهای فرعی رقمهای کاهش یافته و اعداد نشانهٔ مذکور به دست آمده‌اند:

(۱)
۰ ۳ ۱ ۹
۰ ۳ ۲ ۲
۳ ۸ ۶˙ ۱

(۲)
۰ ۰ ٦ ۱ ۰ ۸ ۹
۰ ۱ ۱ ۱ ۲ ۲
۱ ۲ ۹˙ ٤˙ ۳˙ ۱

(۳)
۰ ۵ ۰ ٤ ۰
۰ ۱ ۵ ۵ ۵
۲˙ ۲˙ ۱˙ ٤ ۵

(٤)
۰ ٤ ۲ ۳ ۹ ۱ ۰
۰ ۲ ۳ ۵ ۵ ۵
۳˙ ۰˙ ۱˙ ۵¨ ۰˙ ۵

نکتهٔ مهم. گاه کسانی دیگر روشی مشابه «دستور کاهش یازده» را که در بالا گفته شد به کار برده‌اند. آنها هر بار که مجموع فرعی از ۱۰ بیشتر شود ۱۰ تا از آن کاسته و نشانه‌ای گذاشته‌اند. البته این هم به نوبهٔ خود تدبیر خوبی است. ولی ما همان «دستور کاهش یازده» را ترجیح می‌دهیم زیرا کارایی بیشتری دارد و به کمک آن می‌توانیم یک امتحان ویژه و امتحان دوباره که در ادامهٔ این فصل بیان می‌شود، انجام دهیم.

امتحان کردن جواب

برای آنکه کارهای انجام شده را در چند کلمه خلاصه کنیم، بد نیست نگاه دوباره‌ای به یکی از مثالها بیندازیم، اما اکنون اغلب رقمها را با نقطه نشان داده‌ایم:

ستون عددها :		۳	۶	۸	۹
		۰	۰	۰	۰
		۰	۰	۰	۰
		۸	۷	۴	۹
ردیفهای عمل :		۲	۳	۱۰	۱
		۵	۶	۵	۷
جواب :	۶	۴	۶	۲	۸

در بیانی خلاصه، از ستون عددها برای تشکیل ردیفهای عمل و از ردیفهای عمل برای پیدا کردن جواب استفاده کردیم. ردیفهای عمل چنانکه می بینید شامل مجموعهای فرعی و اعداد نشانه است که در همهٔ مثالها آنها را به کار برده‌ایم.

اکنون برای امتحان کردن عمل از این سه چیز استفاده می کنیم: ستون عددها، ردیفهای عمل، و جواب. از هر کدام اینها یک میزان (عدد امتحان) به دست می آوریم و این میزانها را با یکدیگر مقایسه می کنیم تا معلوم شود با یکدیگر تطبیق می کنند یا نه. اگر تطبیق کردند، عمل درست است. در غیر این صورت یک جای کار غلط است. با این روش امتحان کردن می‌توانیم بفهمیم «کجا»ی کار غلط بوده است. در این امتحان، بدون تکرار عمل جمع می‌توانیم معلوم کنیم کدام یک از ستونهای ارقام غلط جمع شده است.

چون سه چیز را باید امتحان کنیم، عمل امتحان شامل سه مرحله است. ابتدا هر یک از این سه مرحله را بیان می کنیم، سپس هر یک از آنها را بتفصیل در مورد مثال بالا انجام می‌دهیم:

مرحلهٔ اول: برای هر یک از ستونهای ارقام، یک میزان پیدا می کنیم.
مرحلهٔ دوم: برای ردیفهای عمل، یک میزان پیدا می کنیم.
مرحلهٔ سوم: برای جواب (یا جمع کل) هم یک میزان پیدا می کنیم.

مرحلهٔ اول: برای یکایک ستونها باقیماندهٔ تقسیم بر نُه را محاسبه می کنیم. این همان مجموع ارقام تقلیل یافته است که در فصل دوم، در بخش امتحان کردن جواب بیان شد. برای یافتن باقیماندهٔ تقسیم بر نُه، زیر یا روی همهٔ ۹ ها و همهٔ ترکیبهایی از ارقام که مجموعشان ۹ یا مضربی از ۹ است خط می کشیم؛ سپس فقط رقمهای باقیمانده را با

یکدیگر جمع می کنیم. این مجموع اغلب عددی دو رقمی در می آید. در این صورت، آن را با جمع کردن دو رقمش به عدد یک رقمی تبدیل می کنیم. عدد یک رقمی به دست آمده، میزان آن ستون ارقام است. مثلاً میزان را برای ستون سمت چپ ارقام در یکی از مثالهای قبلی به این صورت به دست می آوریم:

~~٣~~٦٨٩
٧٥٨
~~٩~~٦٦٧
~~١~~٥٦٤
~~٦~~٤٩٨
٧٤٥
~~٩~~٩٦٨
٥٨٨٧
~~٩~~٩٨٨
٧٦١٥
~~٨~~٧٤٩
———
۱۲
۳

افزون بر ۹ های موجود در ستون اول، رقمهای ۳ و ٦ را هم خط زده‌ایم زیرا مجموعشان ۹ است. به همین ترتیب رقمهای ۱ و ۸ را نیز خط زده‌ایم.

رقمهای باقیمانده را جمع می‌کنیم: ۵ بعلاوهٔ ۷ می‌شود ۱۲. برای آنکه از این عدد در امتحان کردن استفاده کنیم دو رقمش را با هم جمع می کنیم تا عددی یک رقمی حاصل شود. در این کار داریم ۱ بعلاوهٔ ۲ می‌شود ۳. پس تا اینجا میزان فرعی برای ستون اول ۳ است.

همین کار را برای سه ستون دیگر هم انجام می‌دهیم. اگر جایی دیدیم که مجموع سه رقم در یک ستون ۹ می‌شود، هر سه تای آنها را

خط می‌زنیم. اما اگر هم متوجه وجود چنین مجموعه‌ای از سه رقم نشدیم، اشکالی پیش نخواهد آمد. در واقع هر طور عمل کنیم نهایتاً به همان عدد یک رقمی خواهیم رسید که از جمع کردن ۱ و ۲ به دست آوردیم و در این میان اهمیتی ندارد که چه موقعیتهایی برای خط زدن رقمها را از دست داده‌ایم. جمع کردن رقمهای مجموع به دست آمده، از دست رفتن موقعیتها را جبران می‌کند و تنها چیزی که از دست می‌رود مقدار اندکی انرژی ذهنی است.

بد نیست خودتان این کار را برای سه ستون دیگر انجام دهید. در پایان کار نتیجه باید به صورت زیر باشد. اکنون به جای خط زدن رقمها، زیرشان خط کشیده‌ایم:

		۳	۶	۸	۹
			۷′	۵′	۸′
		۹′	۶	۶	۷′
		۱	۰	۶′	۴
		۶	۴′	۹′	۸′
			۷	۴	۵
		۹′	۹′	۶′	۸′
		۵′	۸′	۸	۷′
		۹	۹′	۸′	۸
		۷′	۶	۱	۵′
		۸′	۷′	۴	۹′
مجموعهای فرعی:		۲	۳	۱۰	۱
نشانه‌ها:		۵	۶	۵	۷
جمع کل:	۶	۴	۶	۲	۸

امتحان:

باقیمانده‌های تقسیم بر نه	۳	۶	۲	۶

در این کار لزومی ندارد که تبدیل به عدد یک رقمی را به پایان کار موکول کنیم. بهتر است این کار ضمن عمل صورت بگیرد (در ستونهای دوم و سوم از سمت چپ، می‌بینید که مجموع سه رقم ٦ کنار گذاشته شده، ۱۸ یعنی مضربی از ۹ است. در ستون دوم از سمت چپ، در صورت تمایل می‌توانید رقمهایی را که زیرشان خطی کشیده نشده با هم جمع کنید تا به عدد ۳۳ برسید سپس این ۳۳ را چنانکه در عمل هم نشان داده شده به ٦ تبدیل کنید. اما بهتر است این کار را در ضمن عمل انجام دهید زیرا این شیوه آسانتر است. اگر ستون را از بالا به پایین بپیماییم و ارقامی را که زیرشان خط کشیده شده نادیده بگیریم، داریم ۷ بعلاوهٔ ٤، ۱۱، «می‌شود ۲» (زیرا ۱ بعلاوهٔ ۱ می‌شود ۲)، بعلاوهٔ ۷ می‌شود ۹، بعلاوهٔ ۸، ۱۷، «می‌شود ۸» (زیرا ۱ بعلاوهٔ ۷ می‌شود ۸)، بعلاوهٔ ۷، ۱۵، «می‌شود ٦» (زیرا ۱ بعلاوهٔ ۵ می‌شود ٦). این ٦ همان میزان است و البته با آنچه قبلاً یافته‌ایم مطابقت دارد. نکته صرفاً در این است که اگر ضمن کار مجموعها را کاهش دهیم (به جای آنکه تا ۳۳ جمع کنیم و سپس ۳۳ را به ٦ تبدیل کنیم) کار کردن با عددهای کوچکتر راحت‌تر خواهد بود. قدری بعدتر دوباره به این موضوع بر می‌گردیم.

مرحلهٔ دوم: در این مرحله می‌خواهیم ردیفهای عمل را که در مثال ما به صورت زیر بود، بررسی کنیم:

مجموعهای فرعی:	۲ ۳ ۱۰ ۱
نشانه‌ها:	۵ ۶ ۵ ۷

برای یافتن میزانهای این قسمت، ردیف دوم را مجدداً می‌نویسیم، سپس جمع می‌کنیم:

مجموعه‌های فرعی :	۱	۱۰	۳	۲
نشانه‌ها :	۷	۵	۶	۵
نشانه‌های مجدد :	۷	۵	۶	۵
حاصل جمع کردن :	۱۵	۲۰	۱۵	۱۲
تبدیل به اعداد یك رقمی :	۶	۲	۶	۳

رقمهای اخیر را با آنچه در مرحلهٔ اول یافته‌ایم مقایسه می کنیم. در آنجا چهار رقم ٦ و ٢ و ٦ و ٣ را به ازای چهار ستون عمل جمع به دست آوردیم. در مرحلهٔ دوم هم عیناً همان چهار رقم ٦ و ٢ و ٦ و ٣ را یافته‌ایم. این میزانها با میزانهای یافته شده در مرحلهٔ اول کاملاً مطابقت دارد، پس عمل درست بوده است.

فرض کنید که در موردی این دو مجموعهٔ ارقام با هم مطابقت نداشته باشند. مثلاً فرض کنید که در مرحلهٔ اول رقمهای ٦ و ٧ و ٦ و ٣ و در مرحلهٔ دوم ٦ و ٢ و ٦ و ٣ به دست آید. در سومین رقم از سمت چپ، اختلاف وجود دارد. پس معلوم می‌شود که سومین ستون از سمت چپ غلط جمع شده است، ولی سه ستون دیگر درست‌اند. برای پیدا کردن اشتباه فقط ستون سوم بررسی می‌شود.

مرحلهٔ سوم: در یک مرحله رقمی به عنوان میزان از جواب به دست می آید. در مثال بالا، جواب یا جمع کل ٦٤٦٢٨ بود. میزان عبارت است از مجموع ارقام آن: ٦ بعلاوهٔ ٤ بعلاوهٔ ٦ بعلاوهٔ ٢ بعلاوهٔ ٨ می شود ٢٦، که تبدیل به ٨ می‌شود.

برای امتحان عمل، این میزان را با چه باید مقایسه کنیم؟ آن را با دو مجموعهٔ اعداد یک رقمی که در مراحل اول و دوم یافتیم مقایسه می کنیم: رقمهای ٦ و ٢ و ٦ و ٣. مجموع این ارقام ١٧ است که به ٨ تبدیل می‌شود. مجموع ارقام تقلیل یافته برای جمع کل هم که ٦٤٦٢٨ درآمده است، ٨ می‌شود. چون هر دو نتیجه ٨ شده و یکسان است پس عمل جمع درست صورت گرفته است.

این شیوهٔ کار را برای هر عمل جمعی می‌توانیم به کار بریم. البته عملاً لزومی ندارد که همهٔ رقمهایی را که در توضیح وارد شدند بنویسیم. بخصوص در امتحان کردن ردیفهای عمل نیازی به نوشتن مجدد این ردیفها و تکرار ردیف پایینی نیست. تکرار ردیف پایینی را می‌توانیم به طور ذهنی انجام دهیم. برای این کار کافی است رقم پایینی دوبار افزوده شود. به این ترتیب مثالی که برای توضیح چگونگی این روش بیان شد عملاً به صورت زیر در می‌آید:

	۳	۶	۸	۹
		۷′	۵′	۸′
	۹′	۶	۶	۷′
	۱	۰	۶′	۴
	۶	۴′	۹′	۸′
		۷	۴	۵
	۹′	۹′	۶′	۸′
	۵′	۸′	۸	۷′
	۹	۹′	۸′	۸
	۷′	۶	۱	۵′
	۸′	۷′	۴	۹′
مجموعه‌های فرعی :	۲	۳	۱۰	۱
نشانه‌ها :	۵	۶	۵	۷

جمع کل ۸ ۲ ۶ ۴ ۶ : جواب

امتحان عمل:

(باقیمانده‌های تقسیم بر نه) ۶ ۲ ۶ ۳ : ستونها

۸ = ۶ ۲ ۶ ۳ : ردیفهای عمل

۸ = ۸ ۲ ۶ ۴ ۶ : جواب

در موارد عملی علاوه براین، همهٔ کلمات را هم حذف می کنیم و تنها رقمها را می‌نویسیم. وقتی خودمان عمل جمع را انجام می‌دهیم متوجه هستیم که ردیف ۱ و ۱۰ و ۳ و ۲ مربوط به مجموعهای فرعی است، تا آخر. در اینجا فقط برای آنکه اشکالی در درک موضوع پیش نیاید اسم هر ردیف را جلویش نوشته‌ایم.

اکنون مثال دیگری می آوریم که نحوهٔ نوشتن آن قدری متفاوت است و احیاناً آن را راحت‌تر خواهید یافت. تفاوت موجود این است که ردیف نشانه‌ها از ردیفهای عمل دوبار نوشته شده ولی ردیف دیگر آن مجدداً نوشته نشده است. ردیف نشانه‌ها را بار دوم زیر جواب نوشته‌ایم. به این ترتیب برای جمع کردن اعداد ردیفهای عمل که ردیف دیگری هم به آن افزوده شده، باید از روی جواب رد شویم:

	۰ / ۸ ۹	
	۰ / ۲ ۳′	
	۰ / ۹′ ۶	
	۱ / ۰ ۴′	
	۰ / ۳′ ۹	
	۰ / ۲ ۵′	
	۱ / ۲ ۳	: مجموعهای فرعی
	۰ / ۲ ۳	: نشانه‌ها
جواب ۳/۷۶ است	۳ / ۷ ۶	: جمع کل
	۰ / ۲ ۳	: تکرار ردیف نشانه‌ها
	۱ / ۶ ۹	: رقمهای امتحان
	۱ / ۶ ۰	: میزان ستونها (باقیمانده تقسیم بر نه)

معلوم می‌شود که عمل درست بوده است. در محاسبهٔ میزان، ۹ و صفر هم‌ارزند. عدد ۹ ٦ / ۱ از جمع کردن سه عدد به طور عمودی به دست آمد: ۱ بعلاوهٔ صفر بعلاوهٔ صفر شد ۱؛ ۲ بعلاوهٔ ۲ بعلاوهٔ ۲ شد ٦؛ ۳ بعلاوهٔ ۳ بعلاوهٔ ۳ شد ۹.

قسمت آخر امتحان: جواب را که ٦ ۳/۷ است با یافتن مجموع ارقام تقلیل یافتهٔ آن، امتحان می کنیم. این عدد ۷ در می آید. مجموع ارقام ۹ ٦/۱ هم ۷ است، پس اینجا هم امتحان درست درآمد. بنابراین اشتباهی در کار نبوده است.

روش کلی برای امتحان کردن

در همهٔ انواع محاسبه، داشتن روشی برای امتحان کردن عمل بدون تکرار آن، موضوع مهمی است. برای هر محاسبه‌ای اعم از جمع، تفریق، تقسیم، مجذور کردن، جذر گرفتن یا هر ترکیبی از این اعمال، به روش مناسبی برای امتحان کردن نیاز داریم. چنین روشی وجود دارد و در همهٔ انواع محاسبه کارایی دارد. در واقع دو روش برای این منظور وجود دارد که تفاوت اندکی با یکدیگر دارند و برای کامل بودن موضوع، هر دوی آنها را بیان می کنیم. ابتدا روش مجموع ارقام را، به عنوان روش اصلی، شرح می دهیم. سپس روش «طرح یازده‌ها» را به عنوان روش دوم یا روش اختیاری عرضه می کنیم.

روش مجموع ارقام

این روش که آن را به نام روش طرح نُه نُه نیز می‌خوانند، از قدیم وجود داشته و در روش تراختنبرگ پذیرفته شده است. این روش را در بخشی از امتحان عمل جمع دیدید. لابد به خاطر دارید که روش مجموع ارقام شامل مراحل زیر بود:

۱. مجموع ارقام هر عدد را با «جمع زدن ارقام» آن پیدا می کنیم.

مثلاً، مجموع ارقام عدد ۵۰۱۲ عبارت است از ۵ بعلاوۀ ۰ بعلاوۀ ۱ بعلاوۀ ۲ که می‌شود ۸.

۲. همیشه نتیجه را به عدد یک رقمی تبدیل می‌کنیم، مگر آنکه خودش یک رقمی باشد. مثلاً مجموع ارقام ۵۰۱۲۴۳۱ می‌شود ۵ بعلاوۀ ۰ بعلاوۀ ۱ بعلاوۀ ۲ بعلاوۀ ۴ بعلاوۀ ۳ بعلاوۀ ۱ که می‌شود ۷ (که مجموع ارقام ۱ و ۶ در ۱۶ است).

۳. در جمع زدن رقمهای هر عدد، ۹ها را کنار می گذاریم. در واقع اگر هم متوجه دو رقم شویم که مجموعشان ۹ است، مثل ۱ و ۸، هر دوی آنها را نادیده می گیریم. پس مجموع ارقام ۹۵۰۹۹۹۹۱ در یک نگاه ۱ است. دیگر لازم نیست ۹ها را هم در جمع وارد کنیم. (اما اگر هم وارد کردیم، نهایتاً باز هم پس از تبدیل به عدد یک رقمی به همان ۱ می‌رسیم. اگر باور ندارید، امتحان کنید!)

۴. چون در این روش، چنانکه در بالا دیدیم، «نُه‌ها به حساب نمی آیند»، مجموع ارقام ۹ همان مجموع ارقام صفر است. مثلاً مجموع ارقام ۵۱۳ صفر است. به خاطر داشتن این موضوع در برخی موارد باعث صرفه‌جویی در کار می‌شود.

برای مثال، بگویید که مجموع ارقام ۹۱۸۲۷۳٦٤۵ چند است؟ قاعدتاً باید بدون فکر زیاد، ظرف حدود سه ثانیه جواب بدهید. نتیجه صفر است. علت آن است که ۹ها را نادیده می گیریم؛ پس جفت رقمهایی را هم که مجموعشان ۹ است نادیده می گیریم و در این مثال هر جفت عدد مجاور بعد از اولین ۹، مجموعشان ۹ است. همه چیز کنار گذاشته می‌شود و نهایتاً به صفر می‌رسیم.

مجموع ارقام ۲۳٤۱٦۲ چند است؟ (راهنمایی: هر سه رقمی را که مجموعشان ۹ است، کنار می‌گذاریم.) باز هم به صفر می‌رسیم.

البته معمولاً عددی که با آن سرو کار داریم شامل رقمهایی هم هست که مجموعشان ۹ نمی‌شود. حاصل جمع آنها هر قدر بشود، مجموع ارقام همان است، البته پس از آنکه به صورت یک رقمی در آید.

پس مجموع ارقام ۹۵۳۶۱۷ می‌شود ۸. رقم ۹ و رقم صفر را کنار می گذاریم، ۳ بعلاوهٔ ٦ می‌شود ۹، باقی می‌ماند ۱ و ۷ که مجموعشان ۸ می‌شود.

صرفه‌جویی در کار: ضمن «جمع زدن» رقمهای یک عدد، هرگاه مجموع فرعی دو رقمی شد، این دو رقم را با هم جمع می کنیم، و با این عدد یک رقمی به عنوان مجموع فرعی جدید، کار را ادامه می‌دهیم.

مثلاً می‌خواهیم مجموع ارقام ۷۲۸۸٤۷٦۵٦۸ را پیدا کنیم. می گوییم ۷ بعلاوهٔ ۲ می‌شود ۹؛ آن را نادیده می گیریم. سپس ۸ بعلاوهٔ ۸ می‌شود ۱٦ که عددی دو رقمی است. این ۱٦ را به یک رقم تبدیل می کنیم: ۱ بعلاوهٔ ٦ می‌شود ۷. با این ۷ کار را ادامه می‌دهیم: ۷ بعلاوهٔ ٤ می‌شود ۱۱، که دو رقمی است، پس آن را به یک رقم تبدیل می کنیم، ۱ بعلاوهٔ ۱ می‌شود ۲. کار را با ۲ دنبال می کنیم: ۲ بعلاوهٔ ۷ می‌شود ۹، «می‌شود صفر»، و به سراغ رقمهای بعدی می‌رویم. اکنون ٦ بعلاوهٔ ۵ می‌شود ۱۱، «می‌شود ۲» و ۲ بعلاوهٔ ٦ می‌شود ۸. سپس ۸ بعلاوهٔ ۸ می‌شود ۱٦، «می‌شود ۷». پس مجموع ارقام این عدد طولانی ۷ است.

در مورد اعداد شامل کسر اعشاری هم عیناً به همین صورت عمل می‌شود. کافی است وجود ممیز را نادیده بگیریم. مثلاً، مجموع ارقام ۵/۱۱۱ برابر با ۸ است.

توضیح: گرچه از لحاظ عملی ضرورتی ندارد که بدانیم چرا این روش قابل استفاده است، ولی احتمالاً توضیح آن برایتان جالب خواهد بود. نکتهٔ اصلی این است: اعدادی که محاسبه می کنیم، و آنها را مجموع ارقام می‌نامیم، دقیقاً باقیمانده‌هایی هستند که از تقسیم هر عدد بر ۹ به دست می آیند. مثلاً ۳۲ را در نظر بگیرید. آن را بر ۹ تقسیم می کنیم: ۹ ضرب در ۳ می‌شود ۲۷ و باقیمانده ۵ خواهد بود. عدد طولانیتری می گیریم، مثلاً ۲۸۱، و آن را بر ۹ تقسیم می کنیم؛ خارج قسمت ۳۱ می‌شود و باقیمانده ۲ در می آید. اما همان طور که لابد توجه کرده‌اید،

در مورد اول مجموع ارقام ۳۲ می‌شود ۵ که با باقیماندهٔ ۵ برابر است، و در مورد دوم مجموع ارقام ۲۸۱ می‌شود ۱۱، که به ۲ تبدیل می‌شود. در هر موردی، مجموع ارقام پس از تبدیل به یک رقم، با باقیماندهٔ تقسیم بر نُه برابر خواهد بود.

کاربرد مجموع ارقام در امتحان کردن محاسبات

حالا از این مجموع ارقام چگونه در امتحان کردن محاسبات استفاده کنیم؟ ظاهراً در موارد مختلف به شیوه‌های مختلفی عمل می‌شود، ولی در واقع کافی است یک اصل اساسی را به خاطر بسپریم:

> **دستور اساسی:** هر کاری که با اعداد می کنیم، همان کار را هم با مجموع ارقام آنها می کنیم؛ در این صورت نتیجه‌ای که از این مجموعهای ارقام عددها به دست می آید باید با مجموع ارقام جواب برابر باشد.

به عنوان مثال: فرض کنید با عمل ضرب سرو کار داریم و عدد ۹۲ را در ۱۲ ضرب می کنیم. حاصل ضرب ۱۱۰۴ است. می‌توانیم در ردیفهای موازی چنین بنویسیم:

عددها:	۹۲	×	۱۲	=	۱۱۰۴
مجموعهای ارقام:	۲	×	۳	=	۶
	(۱+۱)	×	(۱+۲)		(۱+۱+۰+۴)

مجموع ارقام ۲ از عدد ۹۲ به دست آمده که به ازای آن داریم ۹ بعلاوهٔ ۲ می‌شود ۱۱. آن را به یک رقم تبدیل می کنیم: ۱ بعلاوهٔ ۱ می‌شود ۲ (یا کافی است ۹ را نادیده بگیریم). موضوع اصلی این است که رقم ۶ را در

طرف راست از دو راه به دست می آوریم یک راه آن از طرف چپ تساوی است: ۲ ضرب در ۳ می‌شود ٦. راه دیگر از جواب، یعنی ۱۱۰٤ است: ۱ بعلاوۀ ۱ بعلاوۀ صفر بعلاوۀ ٤ می‌شود ٦. طبعاً می گوییم ٦ با ٦ برابر است و امتحان، جواب مثبت داده. به عبارت دیگر، نتیجۀ ۱۱۰٤ درست است.

این روش را به همین صورت می‌توانیم در جمع هم به کار گیریم:

عددها: ۱۵ + ۱۲ + ۲۰ = ۴۷

مجموعهای ارقام: ۶ + ۳ + ۲ = ۱۱ (۴+۷=۱۱)

که تبدیل می‌شود به: ۲ = ۲

در مثال اول دو عدد ۹۲ و ۱۲ در یکدیگر ضرب می‌شدند، بنابراین مجموعهای ارقام ۲ و ۳ را در یکدیگر ضرب کردیم. در مثال دوم وضع فرق می کرد. در اینجا سه عدد مفروض ۱۵ و ۱۲ و ۲۰ را جمع می کردیم، پس مجموعهای ارقام آنها را هم که ٦ و ۳ و ۲ بودند جمع کردیم. برای این کار همیشه یک محاسبۀ موازی انجام می‌دهیم که در آن به جای خود اعداد مجموع ارقام آنها گذاشته شده است.

البته، اعداد مفروض اغلب خیلی بزرگند. و گاه سر به چند میلیون می‌زنند. اما مجموع ارقام آنها همیشه کوچک است و در واقع به یک رقم تبدیل می‌شود. در نتیجه، برای انجام این امتحان مقدار محاسبۀ کمی لازم است و از این راه ابزار با ارزشی برای بررسی اعمال خواهیم داشت.

ضرب دوگانۀ زیر را امتحان کنید:

۳۲۲ × ۲۸/۱ × ۱۲/٤ = ۱۱۲۱۹۷/٦۸

ممیزها را در امتحان کردن نادیده می گیریم. در سمت چپ علامت تساوی، مجموعهای ارقام زیر را داریم:

	۷ × ۲ × ۷	
ذهنی انجام دهید - ننویسید	(۱۴)	
ذهنی انجام دهید - ننویسید	(۵ × ۷)	
باز هم ذهنی!	(۳۵)	
مجموع ارقام	۸	

در طرف راست تساوی، جواب را داریم که ۱۱۲۱۹۷/۶۸ است. مجموع ارقام این عدد با جمع کردن رقمهایش ۸ به دست می آید. پس ۸ با ۸ برابر و عمل درست بوده است.

در موارد ساده‌ای، این خاصیت برای تقسیم هم وجود دارد. مثلاً، در مثال زیر:

عددها: ۱۲ = ۱۱ ÷ ۱۳۲

مجموعهای ارقام: ۳ = ۲ ÷ ۶

یعنی مجموع ارقام جواب ۳ است (۱ بعلاوهٔ ۲) و از تقسیم ۶ بر ۲ هم ۳ حاصل می‌شود. بنابراین نتیجهٔ امتحان مثبت است.

اما در اغلب موارد، کار در مورد تقسیم قدری پیچیده‌تر است زیرا اغلب تقسیمها «باقیمانده دارند». در این مورد، بعداً در فصل مربوط به تقسیم توضیح خواهیم داد. فعلاً کافی است به این نکته توجه کنید که:

برای امتحان عمل تقسیم می‌توانیم مجموعهای ارقام مناسب را در همدیگر ضرب کنیم.

مثلا در مثال بالا، می‌توانیم مجموع ارقام خارج قسمت را در مجموع ارقام مقسوم علیه ضرب کنیم یعنی ۳ ضرب در ۲ که می‌شود ۶. مجموع ارقام مقسوم هم ۶ است پس نیتجهٔ امتحان عمل، مثبت است.

روش طرح یازده‌ها

به جای استفاده از روش مجموع ارقام می‌توانیم این روش را به کار ببریم. این روش را در صورت تمایل می‌توانیم به عنوان امتحان دوگانه یا صرفاً به خاطر تنوع به کار ببریم. در این روش باقیمانده‌های تقسیم بر یازده مطرح می‌شود. ولی در اینجا چیزی را بر ۱۱ تقسیم نمی‌کنیم. درست همان طور که مجموع ارقام همان باقیمانده‌ای است که در صورت تقسیم کردن بر ۹ به دست می‌آمد، اکنون باقیمانده‌ای را پیدا می‌کنیم که در صورت تقسیم کردن بر ۱۱ حاصل می‌شود و خواهیم دید که تا حدی شبیه مجموع ارقام است. روش به صورت زیر است:

حالت اول: اعداد دو رقمی

برای یافتن باقیماندهٔ طرح یازده‌ها در عددهای دو رقمی، مثل ۴۸، رقم دهگان را از رقم یکان کم می‌کنیم: در مورد ۴۸ داریم، ۸ منهای ۴ می‌شود ۴. باقیماندهٔ طرح یازده‌ها برای ۴۸، عدد ۴ است. اگر هم واقعاً ۴۸ را بر ۱۱ تقسیم می‌کردیم، همین عدد حاصل می‌شد.

گاه رقم دهگان از رقم یکان بزرگتر است، در نتیجه این کاهش ممکن نیست، مثلاً وقتی عدد ۸۶ را داریم. در این حالت، رقم یکان را با افزودن ۱۱ به آن، به اندازهٔ کافی بزرگ می‌کنیم. در مورد ۸۶ داریم ۶ بعلاوهٔ ۱۱ می‌شود ۱۷، منهای ۸ می‌شود ۹. درمورد ۵۲ باقیماندهٔ طرح یازده‌ها ۲ منهای ۵ خواهد بود؛ می‌گوییم ۲ بعلاوهٔ ۱۱ منهای ۵ می‌شود ۸.

حالت دوم: اعداد با بیش از دو رقم

در اینجا شیوهٔ کار یک در میان گرفتن رقمهاست. به عبارت دیگر، از

آخرین عدد سمت راست شروع می کنیم و به سمت چپ رقمها را یک در میان جمع می‌زنیم، سپس رقمهایی را که از رویشان رد شده‌ایم جمع می‌زنیم و دو مجموع از همدیگر تفریق می کنیم. عدد ۹۴۳۰۲۱۷۵۸ را در نظر بگیرید. از آخرین عدد سمت راست، یعنی ۸ شروع می کنیم و به سمت چپ رقمها را یک در میان جمع می‌زنیم:

۸ +۷ +۲ +۳ +۹ =۲۹

سپس به عدد ما قبل آخر بر می گردیم یعنی رقم ۵ از عدد مفروض و دوباره رقمها را یک در میان به یکدیگر می‌افزاییم:

۵ +۱ +۰ +۴ =۱۰

حالا تفریق را انجام می‌دهیم:

۲۹ - ۱۰ = ۱۹

این ۱۹ هم باید تقلیل پیدا کند، همان طور که قبلاً مجموعهای ارقام را برای تبدیل کردن به یک رقم، تقلیل می‌دادیم. در این روش برای تقلیل دادن آن، رقم دهگان را از رقم یکان کم می کنیم:

۹ - ۱ = ۸

در این مثال ۱۰ را از ۲۹ کم کردیم. فرض کنید در حالت دیگری مثلاً به ۲۹ منهای ۳۵ برسیم که این تفریق امکانپذیر نیست؛ در این صورت چه باید کرد؟ به عدد کوچکتر ۱۱ را می‌افزاییم تا به اندازهٔ کافی زیاد شود که بتوانیم تفریق را انجام دهیم؛ در اینجا ۲۹ منهای ۳۵ می‌شود ۴۰ منهای ۳۵ که برابر با ۵ است.

آیا این ۲۹ و ۳۵ اعداد بزرگی‌اند و کار کردن با آنها دشوار است؟ البته برای حل این مشکل راههای میانبری وجود دارد. یکی از این راهها شبیه همان شیوه‌ای است که قبلاً به کار می‌بستیم: پس از آنکه نخستین عدد را یافتیم و مثلاً همان ۲۹ درآمد، آن را کنار نمی گذاریم که به سراغ پیدا کردن ۳۵ برویم. به جای این کار، شروع می کنیم به کم کردن از ۲۹، یا هر عدد دیگری که هست. یعنی، پس از آنکه مجموع رقمها را یک در میان به دست آوردیم، به رقم ما قبل آخر باز می گردیم

و آن را از مجموع کم می کنیم. این کار را به طرف چپ در طول عدد ادامه می‌دهیم و رقمها را یک در میان از این نقطهٔ شروع جدید، تفریق می کنیم. (اینها همان رقمهایی‌اند که برای رسیدن به نخستین مجموع از رویشان رد شدیم.) در واقع این کار به منزلهٔ آن است که مجموع دوم را خرده خرده تفریق کنیم. مثلاً عدد ۲۳۶۸۵۹۴ را در نظر بگیرید. از انتهای عدد، با رقم ۴ شروع می کنیم و رقمهایی را که زیرشان خط کشیده شده، جمع می‌زنیم:

۲ ۳ ۶ ۸ ۵ ۹ ۴

پس ۴ بعلاوهٔ صفر می‌شود ۴، بعلاوهٔ ۶ می‌شود ۱۰، بعلاوهٔ ۲ می شود ۱۲. حالا دوباره برمی گردیم و رقمهای دیگر را به کار می‌بریم،

۲ ۳ ۶ ۸ ۵ ۹ ۴

و آنها را یکی یکی از عدد ۱۲ که در بالا به دست آمد کم می کنیم: ۱۲ منهای ۹ می‌شود ۳؛ اما اکنون ۸ را نمی‌توانیم تفریق کنیم زیرا از ۳ بزرگتر است، پس ۱۱ تا به ۳ می‌افزاییم و می گوییم: ۳ بعلاوهٔ ۱۱ می شود ۱۴، منهای ۸ می‌شود ۶، منهای ۳ می‌شود ۳. باقیماندهٔ طرح یازده‌ها ۳ است. در صورت تمایل می‌توانستیم بعد از رسیدن به مجموع ۱۲، به عقب برگردیم ورقهای دیگر را از چپ به راست تفریق کنیم: ۱۲ منهای ۳ می‌شود ۹، منهای ۸ می‌شود ۱؛ حالا ۱ بعلاوهٔ ۱۱ می‌شود ۱۲؛ و ۱۲ منهای ۹ می شود ۳. باقیماندهٔ طرح یازده‌ها برای این عدد، بی‌توجه به نوع میانبری که به کار رود، همیشه ۳ در می آید.

یک میانبر دیگر که کارایی زیادی دارد، به کار گیری جفت رقمهای مجاور در طول عدد است. در هر جفت یکی از رقمها را از دیگری کم می کنیم زیرا یکی از آنها رقم «زوج» و دیگری رقم «فرد» است (البته، از لحاظ ترتیب قرار گرفتن). مثلاً عدد ۴۶۹۳۲۶۵۸۱۷ را در نظر می گیریم. عدد را یک بار می‌نویسیم و رقمهایش را جفت جفت با کشیدن خطی زیر آنها جدا می کنیم:

و تفریقها را انجام می‌دهیم:

٤٦	٩٣	٢٦	٥٨	١٧
٢	٥	٤	٨	٦

توضیح: ردیف بالا همان عدد مفروض است که جفت رقمها رویش مشخص شده‌اند، و ردیف پایین شامل باقیمانده‌های طرح یازده‌هاست که از این جفتها به دست می آید. هر یک از این باقیمانده‌ها را از جفت مربوط به آن به روال عادی به دست می آوریم. برای این کار رقم دهگان را از رقم یکان کم می کنیم. البته این رقمها موقتاً رقمهای یکان و دهگان قلمداد می‌شوند؛ مثلاً در ابتدا برای انجام این محاسبهٔ کوچک فرض می کنیم ٤٦ همان عدد ٤٦ است. ضمن جلو رفتن در عدد، از چپ به راست، از ٤٦ نتیجه می‌شود ٦ منهای ٤ که ٢ است، سپس ٣ منهای ٩ می‌شود ٣ بعلاوهٔ ١١ که ١٤ است؛ حالا ١٤ منهای ٩ می‌شود ٥؛ سپس ٦ منهای ٢ می‌شود ٤؛ و ٨ منهای صفر می‌شود ٨؛ و در آخر، ٧ منهای ١ می‌شود ٦. به این ترتیب رقمهای ردیف پایینی را که هر کدام مربوط به یک جفت هستند، به دست می آوریم.

حالا رقمهایی را که هم اکنون به دست آوردیم جمع می‌زنیم: ٢ بعلاوهٔ ٥ می‌شود ٧، بعلاوهٔ ٤ می‌شود ١١، که می گوییم «می‌شود صفر»، زیرا در باقیماندهٔ طرح یازده‌ها، یک ١١ با صفر هم ارز است؛ سپس ٨ بعلاوهٔ ٦ می‌شود ١٤، که می گوییم «می‌شود ٣» که طبق معمول در روش طرح یازده‌ها، ١١ تا از آن کم کرده‌ایم. حاصل ٣ است.

کاربردها: همان طور که پیشتر از باقیمانده‌های نُه نُه (میزانها) استفاده کردیم، باقیمانده‌های طرح یازده‌ها را نیز برای امتحان کردن محاسبات به کار می‌بریم. اصلی که در این مورد حاکم است، همانند آن است که قبلاً گفتیم:

> **هر عملی که با اعداد مفروض انجام می‌دهیم، همان عمل را با باقیمانده‌های طرح یازده‌ها نیز انجام می‌دهیم. در این صورت حاصل عمل با باقیمانده‌های**

طرح یازده‌ها باید همان باقیماندهٔ طرح یازده‌ها برای جواب باشد، تا جواب را درست بدانیم.

مثلاً فرض کنید می‌خواهیم ضربی را که در فصل پیش انجام دادیم امتحان کنیم. دیدیم که حاصل ضرب ۳۵۲ در ۱۱۴ می‌شود ۳۴۴۲۸. حالا این عددها را دوباره یادداشت می‌کنیم و باقیماندهٔ طرح یازده‌ها برای هر عدد را زیرش می‌نویسیم:

۳ ۵ ۲ × ۱ ۱ ۴ = ۳ ۴ ۴ ۲ ۸

(۵) (۴) (۹)

اکنون ۵ را در ۴ ضرب می‌کنیم: اگر ضرب درست باشد، نتیجه باید همان ۹ طرف راست تساوی در آید. البته، منظور این است که باقیمانده‌های این دو مقدار پس از آنکه در صورت لزوم یازده تا کم کردیم تا حتی‌المقدور کوچک شوند باید مساوی باشند. آیا اینجا هم این حالت را داریم؟ بله. چون ۵ ضرب در ۴ می‌شود ۲۰؛ با کم کردن ۱۱، عدد ۲۰ به ۹ کاهش می‌یابد. پس به موازات ضرب اصلی، تساوی باقیمانده‌های تقسیم بر یازده را داریم که هر دو ۹ هستند.

دو مثال دیگر می‌آوریم. ببینید آیا خودتان می‌توانید با این روش آنها را امتحان کنید:

(۱) ۵ ۲ ۷ ۳ × ۵ ۴ = ۲ ۸ ۴ ۷ ۴ ۲

(۲) ۲ ۷ ۳ × ۱ ۵ ۴ = ۴ ۲ ۰ ۴ ۲

باید دریافته باشید که هر دو ضرب درست‌اند. در (۱) برای ردیف باقیمانده‌های طرح یازده‌ها داریم ۴ ضرب در ۱۰ که با ۷ مساوی گرفته شده است: یعنی باقیماندهٔ طرح یازده‌ها برای ۴۰ و ۷ یکسان است. برای تبدیل کردن ۴۰، رقم ۴ را از ۰ (که ۱۱ را به آن می‌افزاییم) تفریق می‌کنیم و می‌بینیم که تساوی برقرار است.

در (۲) برای ردیف باقیمانده‌های طرح یازده‌ها در طرف چپ ۹ ضرب در صفر، و در طرف راست صفر داریم؛ ۹ ضرب در صفر می‌شود صفر، پس نتیجهٔ امتحان مثبت است.

فصل پنجم

عمل تقسیم با سرعت و دقت بیشتر

نخستین روز درس در یکی از دانشگاههای بزرگ امریکا بود. در یکی از کلاسها، سی نفر از دانشجویان در جلسهٔ جبر سال اول برای شنیدن سخنرانی سرپرست گروه ریاضی گرد آمده بودند. استاد خود به دلیل خاصی ترتیب این کار را داده بود: می‌خواست ببیند آیا دانشجویان برای ادامهٔ کارشان پایهٔ قوی دارند یا نه. بدیهی است که بر پایهٔ ضعیف چیزی نمی‌توان بنا کرد و این روزها اغلب این مشکل پیش می‌آید که اشخاص پایهٔ قوی ندارند.

بنابراین وی همان کاری را کرد که برای یاد دادن مقدمات باید انجام شود. به دانشجویان ثابت کرد که اعتماد به نفس بیجایی دارند و باید تحت آموزش قرار بگیرند. برای اثبات این موضوع چنین عمل کرد: یک مسئلهٔ تقسیم خیلی طولانی به آنها داد که حل کنند. روی تخته سیاه عددی طولانی، مثل ۷۵۳۱۲٦٤ نوشت و از آنها خواست که آن را بر عددی مثل ۹۷۹۸ تقسیم کنند. همه فوراً دست به کار شدند و پس از مدتی حتی کندترین آنها کار را تمام کرده بود.

استاد اوراق دانشجویان را جمع کرد و به جوابها خیره شد: سی دانشجو، بیست و پنج جواب مختلف داده بودند که فقط یکی درست بود

و بیست و چهار تا غلط. شش تن از این سی نفر راه درست رفته بودند ولی بیست و چهار تای آنها اقلاً در یک جای کار اشتباه کرده بودند.

علت چه بود؟ به یاد داشته باشید که این افراد وارد دانشگاه شده بودند. همهٔ آنها روش کار را در دبستان یاد گرفته بودند و در دبیرستان باز هم ریاضیات خوانده بودند و درسهایشان را با موفقیت پشت سر گذاشته بودند. انجام این آزمایش در مورد اشخاص عادی لابد نتایجی بمراتب ناجورتر به بار می آورد. علت این وضع آن است که به ما یاد نداده‌اند که درستی جواب را تحقیق کنیم. ما را طوری بار نیاورده‌اند که دریابیم کار مسئله تنها با یافتن جواب درست، و نه هر جوابی، به پایان می‌رسد. در واقع، مسئله وقتی واقعاً به آخر می‌رسد که ثابت کنیم جواب درست را یافته‌ایم.

در فصل اخیر بر اهمیت شیوهٔ اصولی و منظمی برای امتحان کردن تأکید کردیم. اکنون که به عمل تقسیم رسیده‌ایم، عادت داشتن به این کار بمراتب مهمتر از قبل است که پای ضرب و جمع در میان بود.

برای این منظور، دو شیوهٔ هم ارز برای انجام عمل تقسیم عرضه می کنیم. هر دوی اینها با روش تقسیم معمولی فرق دارد.

اولی روش «ساده» است و بیشتر به کار کسانی می آید که کم و بیش «غیر ریاضی»اند، یعنی کارشان طوری است که زیاد به ریاضیات نیاز ندارند یا علاقهٔ چندانی ندارند که به ریاضیات صرف بپردازند. برای چنین اشخاصی یک روش تقسیم مناسب، روشی است که راحت به خاطر سپرده شود و حتی‌المقدور امکان اشتباه در یافتن جواب درست با آن ناچیز باشد.

دیگری روش «سریع» است. همهٔ کسانی که به مبحث اعداد دلبستگی دارند از این روش خوششان خواهد آمد. این روش چنان گیراست که برای هر کسی که ذوق ریاضی دارد تکان دهنده خواهد بود و پس از فراگرفتن این روش، کار کردن با آن بمراتب آسانتر از روش معمولی است. بعلاوه، پس از کسب مهارت کامل در این

روش، تماشای آن واقعاً جالب است. جواب مربوط به تقسیمهای طولانی بی‌درنگ و بی هیچ محاسبهٔ بینابینی نوشته می‌شود.

روش سادهٔ تقسیم

این روش به هیچ گونه استعداد ریاضی نیاز ندارد. کافی است بتوانیم دو عدد را با هم جمع کنیم و عمل تفریق معمولی را انجام دهیم.

می‌خواهیم ۲۷۴۸۳۶۲۴ را بر ۶۲ تقسیم کنیم. در این کار عدد ۶۲ طبق معمول «مقسوم‌علیه» خوانده می‌شود. ضمن انجام عمل، این ۶۲ بالای ستونی از اعداد قرار می‌گیرد. این ستون با جمع کردن پیاپی عدد ۶۲ که ده بار انجام می‌شود به دست می‌آید:

محل جواب	۲ ۷ ۴ ۸ ۳ ۶ ۲ ۴	۶۲
		۶۲
		۱۲۴
		۶۲
		۱۸۶

تا آخر.

می‌خواهیم در طرف چپ ستون مقسوم‌علیه، یک ستون میزان از عددهایی که هر کدام یک مجموع ارقامند تشکیل دهیم. این ستون به صورت صفحهٔ بعد خواهد بود:

ستون میزان	ستون مقسوم علیه
۸	۶۲
۸	۶۲
۷ ← (۱۶)	۱۲۴
۸	۶۲
۶ ← (۱۵)	۱۸۶

تا آخر.

اکنون ببینیم این میزانها را چگونه می‌شود یافت. چون در هر مرحله یک بار عدد ٦٢ در ستون مقسوم علیه افزوده می‌شود، در ستون میزان هم یک بار عدد ۸ اضافه می‌شود، که مجموع ارقام عدد ٦٢ است (٦ بعلاوهٔ ۲ می‌شود ۸). هر وقت به عدد دو رقمی رسیدیم (چنانکه در این مثال مجموع ۸ و ۸، عدد ۱٦ شد) بی‌درنگ آن را تقلیل می‌دهیم به عددی یک رقمی، و برای این کار کافی است رقمهایش را با هم جمع کنیم. عدد ۱٦ را داشتیم بنابراین آن را به ۷ تبدیل کردیم (۱ بعلاوهٔ ٦ می‌شود ۷). سپس کار را با ۷ دنبال می کنیم. در مرحلهٔ بعد، یک بار دیگر ۸ را می‌افزاییم. پس ۷ بعلاوهٔ ۸ می‌شود ۱۵. اما این عدد دو رقمی است، پس آن را به ٦ تقلیل می‌دهیم (۱ بعلاوهٔ ۵). این کار را هر بار تکرار می کنیم.

این میزانها به چه کار می آیند؟ هر یک از آنها بلافاصله پس از یافته شدن مورد استفاده قرار می گیرند. پس از نخستین جمع به عدد ۱٦ می‌رسیم که تبدیل به ۷ می‌شود. توجه کنید که این عدد درست در طرف چپ نخستین مجموع اصلی، یعنی ۱۲٤، قرار دارد. پس این ۷ را با ۱۲٤ مقایسه می کنیم. با جمع زدن رقمهای ۱۲٤، داریم ۱ بعلاوهٔ ۲ بعلاوهٔ ٤ می‌شود ۷. این نتیجه با عدد ۷ که قبلاً به دست آمده تطبیق می کند. پس این ردیف درست است. حالا یک بار دیگر ٦۲ را به ۱۲٤ می‌افزاییم، نتیجه ۱۸٦ می‌شود. در طرف چپ، در ستون میزان یک ۸ دیگر می‌افزاییم و چنانکه در بالا دیدیم حاصل می‌شود ۱۵. این ۱۵ به ٦ تبدیل

می‌شود که میزان عدد ۱۸۶ است. آیا واقعاً همین عدد در می آید؟ رقمهای ۱۸۶ را جمع می‌زنیم: ۱ بعلاوهٔ ۸ می‌شود ۹، که آن را کنار می گذاریم و نادیده می گیریم (در امتحان به کمک مجموع ارقام همیشه نُه‌ها را کنار می‌گذاریم!) و تنها ۶ باقی می‌ماند. پس ۶ با ۶ برابر است و نتیجهٔ امتحان ردیف ۱۸۶ مثبت است. در هر مرحله مجدداً عدد ۶۲ را در ستون مقسوم علیه و ۸ را در ستون میزان می‌افزاییم. با هر بار انجام این کار، عدد جدید ستون مقسوم علیه را با عدد جدید ستون میزان مقایسه می کنیم. منظور از «مقایسه» این است که رقمهای مجموع جدید در ستون مقسوم علیه را جمع می‌زنیم و نگاه می کنیم ببینیم آیا با عدد جدید ستون میزان همخوانی دارد یا نه.

بی‌شک اگر ضمن کار در هر مرحله این امتحان را انجام دهیم، به محض بروز اشتباهی در عمل جمع، متوجه آن خواهیم شد. به این ترتیب در تمام عمل از اشتباه جلوگیری می‌شود.

این کار را چقدر باید تکرار کرد؟ ده بار. به عبارت دقیقتر، عدد ۶۲ باید ده بار در ستون نوشته شود، پس باید نُه بار افزوده شود. و دهمین مجموع باید ۶۲۰ باشد. این همان مقسوم علیه اولیه است (که ۶۲ است، ولی کلاً هر عددی می‌تواند باشد) با صفری که به آخرش افزوده‌ایم. گذاشتن صفری در آخر هر عدد، آن را ۱۰ برابر می کند. پس این عدد دهم باید همان مقسوم علیه اولیه باشد که صفری به دنبالش آمده است. ستون کامل، همراه با همهٔ میزانها را در صفحهٔ بعد می‌بینید:

جواب	«مقسوم»		ستون مقسوم‌علیه	ستون میزان
دراینجا وارد می‌شود	۴ ۲ ۶ ۳ ۸ ۴ ۷ ۲	(۱)	۶۲	۸
			۶۲	۸
		(۲)	۱۲۴	(۱۶) → ۷
			۶۲	۸
		(۳)	۱۸۶	۶ ← (۱۵)
			۶۲	۸
		(۴)	۲۴۸	(۱۴) → ۵
			۶۲	۸
		(۵)	۳۱۰	۴ ← (۱۳)
			۶۲	۸
		(۶)	۳۷۲	(۱۲) → ۳
			۶۲	۸
		(۷)	۴۳۴	۲ ← (۱۱)
			۶۲	۸
		(۸)	۴۹۶	(۱۰) → ۱
			۶۲	۸
		(۹)	۵۵۸	۰ ← (۹)
			۶۲	۸
			۶۲۰	۸

این ۶۲۰ با ۶۲ ضرب در ۱۰ برابر است. پس عمل درست است.

بعد از تشکیل ستون میزان و استفاده از آن در امتحان درستی عمل با اعداد مجموع ارقام، دیگر نیازی به ستون میزان نخواهد بود و آن را می‌توانیم پاک کنیم.

توجه کنید که در حین عمل، مرحله‌ها را با اعداد پر رنگتری داخل پرانتز، شماره گذاری کرده‌ایم. هر یک از این شماره‌ها نشان می‌دهند که ٦٢ در چه عددی ضرب شده است. مثلاً کنار ١٢٤ شمارهٔ **(٢)** آمده است. پس ١٢٤ برابر است با ٦٢ ضرب در ٢. این شماره‌ها به مضربهای مختلف ٦٢ مربوط می‌شوند. مثلاً ٤٣٤ مضربی از ٦٢ است، زیرا ٤٣٤ برابر است با ٧ ضرب در ٦٢. بر این اساس در ستون مقسوم علیه ٤٣٤ دیده می‌شود و در کنار آن شمارهٔ **(٧)** قرار دارد که نشان می‌دهد این عدد حاصل ضرب ٧ در ٦٢ است.

با داشتن این ستون مقسوم علیه، دیگر لازم نیست عمل ضربی انجام دهیم و اتفاقاً بیشتر اشتباهات هم در همین عمل ضرب پیش می آید. بقیهٔ این روش، طبق دستور زیر است:

از مقسوم به طور پیاپی، بزرگترین عددی را که می‌توانیم از ستون مقسوم علیه اختیار کنیم، می کاهیم.

اینجا هم مثل روش معمولی تقسیم، عمل کاهش را از کنارهٔ چپ مقسوم می آغازیم. در هر مرحله به ستون مقسوم علیه می‌نگریم و بزرگترین عددی را می‌یابیم که بیش از حد بزرگ نباشد، یعنی آن قدر بزرگ نباشد که کاهش ناممکن شود. به مثال بالا بر می گردیم: ٢٧٤٨٣٦٢٤. اگر بخواهیم تنها دو رقم اول را به کار ببریم، ٢٧ را داریم. حالا به ستون مقسوم علیه بر می گردیم. آنجا هیچ عددی نیست که از ٢٧ کوچکتر باشد. پس سه رقم اول مقسوم را می گیریم که ٢٧٤ می‌شود. حالا به ستون مقسوم علیه می‌نگریم. چه عددی کوچکتر از ٢٧٤ آنجا هست؟ (باید کوچکتر باشد، چون می‌خواهیم آن را از ٢٧٤ کم کنیم.) خوب، ٦٢ از ٢٧٤ کوچکتر است، ١٢٤ هم همین طور، ١٨٦ و ٢٤٨ هم همین طورند. بقیه از ٢٧٤ بزرگترند. پس بزرگترین عددی که می‌توانیم آن را کم کنیم ٢٤٨ است. با داشتن این عدد به دستور بعدی می‌رسیم:

شمارهٔ مرحله، یا عدد مضرب، مربوط به عددی که آن را کم می کنیم، رقم بعدی جواب است.

شمارهٔ مرحله برای ۲٤۸، عدد (٤) است. پس اولین رقم جواب ٤ است:

جواب	مقسوم	ستون مقسوم‌علیه
۴	۲۷۴۸۳۶۲۴	۶۲ (۱)
	۲۴۸	۱۲۴ (۲)
	۲۶۸	۱۸۶ (۳)
		۲۴۸ (۴)
		تا آخر.

بعد از نوشتن این رقم از جواب، عددی را که باید کاسته شود، زیر مقسوم می‌نویسیم و عمل کاهش را چنانکه در بالا دیده می‌شود، انجام می‌دهیم. حاصل این کاهش ۲٦ است. سپس رقم بعدی مقسوم را پایین می آوریم. این کار را در عمل تقسیم به روش معمولی هم می کردیم.

اکنون همین کار را با عدد جدیدی که زیر مقسوم داریم، تکرار می کنیم. عدد ما ۲٦۸ است. به ستون مقسوم علیه می‌نگریم و بزرگترین عددی را پیدا می کنیم که بیش از حد بزرگ نباشد. در این مورد عددی که در ستون مقسوم علیه پیدا می‌شود ۲٤۸ است. شمارهٔ مرحلهٔ آن را که (٤) است به عنوان رقمی از جواب می‌نویسیم و خود آن را تفریق می کنیم.

جواب	مقسوم	ستون مقسوم‌علیه
۴۴	۲۷۴۸۳۶۲۴	۶۲ (۱)
	۲۴۸	۱۲۴ (۲)
	۲۶۸	۱۸۶ (۳)
	۲۴۸	۲۴۸ (۴)
	۲۰۳	تا آخر.

اگر این مثال را تا آخر انجام دهیم، نتیجه به صورت زیر در خواهد آمد:

۴۴۳۲۸۴	۲۷۴۸۳۶۲۴	(۱)	۶۲
	۲۴۸	(۲)	۱۲۴
	۲۶۸	(۳)	۱۸۶
	۲۴۸	(۴)	۲۴۸
	۲۰۳	(۵)	۳۱۰
	۱۸۶	(۶)	۳۷۲
	۱۷۶	(۷)	۴۳۴
	۱۲۴	(۸)	۴۹۶
	۵۲۲	(۹)	۵۵۸
	۴۹۶	(۱۰)	۶۲۰
	۲۶۴		
	۲۴۸		
باقیمانده	۱۶		

پس جواب ٤٤٣٢٨٤ و باقیمانده ١٦ است.

در استفادهٔ عملی از این روش، توجه به نکتهٔ زیر می‌تواند کار را آسانتر کند. هنگام تشکیل ستون مقسوم علیه باید مقسوم علیه را پی‌در پی بیفزاییم، اما این الزاماً بدان معنا نیست که مقسوم علیه را چندین بار بنویسیم. کافی است هر بار فقط به بالای ستونی که مقسوم علیه در آنجا نوشته شده بنگریم و مقسوم علیه را به آخرین عدد یافته شده بیفزاییم. به این ترتیب عمل تقسیم ما به صورتی که در صفحهٔ بعد می‌بینید در می‌آید:

۳۶۴۰۹۵ ÷ ۴۶۵

۴۶۵	(۱)	۳ ۶ ۴ ۰ ۹ ۵	جواب ۷ ۸ ۳
۹۳۰	(۲)	۳ ۲ ۵ ۵	
۱۳۹۵	(۳)	۳ ۸ ۵ ۹	
۱۸۶۰	(۴)	۳ ۷ ۲ ۰	
۲۳۲۵	(۵)	۱ ۳ ۹ ۵	
۲۷۹۰	(۶)	۱ ۳ ۹ ۵	
۳۲۵۵	(۷)		
۳۷۲۰	(۸)		
۴۱۸۵	(۹)		
۴۶۵۰	(۱۰)	ددست	

اکنون چند تمرین به عنوان نمونه داده می‌شود، که احتمالاً حل کردن آنها برایتان جالب خواهد بود:

۱. ۷ ۳ ۲ ۵ ۸ ÷ ۵ ۳

۲. ۹ ۰ ۸ ۳ ۹ ÷ ۱ ۳ ۳

۳. ۲ ۳ ۵ ۲ ۵ ۴ ۱ ۸ ÷ ۳ ۰ ۶ ۶

۴. ۲ ۱ ۱ ۰ ۱ ۲۵ ۶ ۷ ۷ ۰ ÷ ۳ ۲ ۶

جوابها: ۱. ۱۳۸۶ ۲. ۶۸۳ ۳. ۷۶۷۳ ۴. ۶۴۷۲۸۳۹۵

احتمال خیلی کمی وجود دارد که کسی موقع کار با این روش آنقدر بی‌دقتی کند که عدد نامناسبی را در ستون مقسوم علیه برگزیند. البته چنین چیزی تقریباً بعید است زیرا تنها کاری که باید انجام شود تعیین بزرگترین عدد بین اعدادی است که قابل استفاده‌اند. بزرگترین عدد مورد قبول در ستون مقسوم علیه، آخرین عدد از اعدادی است که آنقدر کوچکند که می‌توانیم آنها را تفریق کنیم، و همهٔ اعداد بعد از آن برای این کار بزرگند. با وجود این، فرض می کنیم کسی چنین اشتباهی کرده است. باز هم جای نگرانی نخواهد بود، زیرا خود شخص بی‌درنگ متوجه خواهد شد که در این مرحله اشتباهی رخ داده است:

۱. اگر عددی را اختیار کرده باشد که از عدد مناسب بزرگتر است، نخواهد توانست آن را تفریق کند.
۲. اگر عددی را اختیار کرده باشد که از عدد مناسب کوچکتر است، در مرحلهٔ بعدی متوجه خواهد شد که «رقم» بعدی جواب ۱۰ باید باشد، که رقم نیست.

برای امتحان کردن تفریقها، بهترین و آسانترین کار آن است که همه را یکجا امتحان کنیم. برای این منظور کافی است خود جواب را امتحان کنیم. این کار را به روش زیر انجام می‌دهیم:

۱. باقیمانده را از مقسوم کم می‌کنیم و مجموع ارقام نتیجه را به دست می‌آوریم. در اولین مثال این فصل، باقیمانده ۱۶ شد:

۲۷۴۸۳۶۲۴ −	مقسوم
۱۶	باقیمانده
مجموع ارقام ۲ = ۲۷۴۸۳۶۰۸	

۲. مجموع ارقام جواب را در مجموع ارقام مقسوم علیه ضرب می‌کنیم:

مجموع ارقام ۷ = ۴۴۳۲۸۴	جواب
مجموع ارقام ۸ × = ۶۲	مقسوم علیه
مجموع ارقام ۲ = ۵۶	

۳. دو نتیجه را با هم مقایسه می‌کنیم. اگر یکسان بودند، عمل درست است. در هر دو حالت نتیجه ۲ درآمد، پس عمل درست بوده است.

روش تقسیم سریع

حتماً به یاد دارید که در مبحث ضرب، روشی به نام «یکان و دهگان» داشتیم. اکنون می‌خواهیم نکته‌ای را از آن روش وام بگیریم و در تقسیم به کار ببریم، ولی برای این منظور، شگرد تازه‌ای در آن وارد می کنیم. برای یادآوری، آنچه را قبلاً گفته‌ایم تکرار می کنیم. با داشتن یک جفت رقم، مثل ۴۳، و یک مضروب فیه یک رقمی مثل ٦، به طریقهٔ خاصی ضرب می کردیم و جوابی یک رقمی، یعنی ۵ به دست می آوردیم:

ی　　د

۴　　۳ × ۶

عمل　۲۴ + ۱۸

نتیجه　　۵

این ۲٤ حاصل ضرب ٤ در ٦ و عدد ۱۸ هم حاصل ضرب ۳ در ٦ است. چون بالای رقم ٤ از ٤۳ حرف ی (به نشانهٔ یکان) وجود دارد، تنها از رقم یکان ۲٤، که ٤ است استفاده می کنیم. چون بالای رقم ۳ از ٤۳ حرف د، به نشانهٔ دهگان نوشته شده، تنها رقم ۱ را که رقم دهگان ۱۸ است به کار می‌بریم. سپس این ۱ و ٤ را با یکدیگر جمع می کنیم: ۱۸ بعلاوهٔ ۲٤ می شود ۵. رقمهایی که زیرشان خط کشیده شده، همان یکان و دهگان هستند.

شگرد تازه، تغییر خاصی است که در این کار داده می‌شود. به جای حاصل ضرب «د ی» اکنون حاصل ضرب «د ک» را تشکیل می‌دهیم. در اینجا «ک» نشانهٔ «کل» است، یعنی نه فقط رقم یکان، بلکه کل عدد را به کار می‌بریم:

ک　　د

۴　　۳ × ۶

عمل　۲۴ + ۱۸

نتیجه　　۲۵

حاصل ضرب «د ک» در اینجا ۲۵ شد. در این عمل هم ۲٤ را از ضرب ٤ در ٦ و ۱۸ را از ضرب ۳ در ٦ داشتیم. اما این بار از تمامی ۲٤ و نه فقط از رقم ٤ آن استفاده می کنیم. در مورد ۱۸ باز هم فقط رقم دهگان را به کار می‌بریم و حرف «د» هم نشانهٔ این موضوع است. حالا حاصل ضرب «د ک» عدد ۷۸ در ۳ چقدر است؟ جواب ۲۳ در می آید. زیرا:

		د		ک
	۳	× ۸		۷
فقط اعدادی (اکه زیرشان خط		۲۴	+	۲۱	عمل
کشیده شده به‌کار می‌بریم			۲۳		نتیجه

طرز انجام عمل تقسیم

مقسوم علیه‌های دو رقمی

نخست مثالی را بتفصیل حل می کنیم تا تصوری کلی از این روش داشته باشید. البته این تنها به منظور آشنایی است. لزومی ندارد که در این مرحله همهٔ جزئیات را به خاطر بسپارید. فعلاً کافی است دیدی کلی نسبت به مراحل متوالی این روش به دست آورید و به قول معروف نحوهٔ عمل به این شیوه را «احساس» کنید. این روش با آنچه در عمل تقسیم معمولی یاد گرفته‌ایم تفاوت دارد، بنابراین نگاهی کلی به عمل تقسیمی که با روش جدید انجام شده می‌اندازیم. شرح جزئیات عمدتاً به چند بند پایین‌تر موکول شده است.

می‌خواهیم ۸۳۸٤ را بر ۳۲ تقسیم کنیم. با استفاده از این روش جدید، نهایتاً خواهیم توانست بدون نوشتن هیچ محاسبه‌ای، به جواب برسیم. البته فعلاً چون تازه با این روش رو به رو می‌شویم بهتر است مراحل

میانی را هم ثبت کنیم. صورت نهایی عمل پس از اتمام چنین خواهد بود:

صورت مسئله

مقسوم   مقسوم‌علیه   جواب

۸ ۳ ۸ ۴ ÷ ۳ ۲ = ۲ ۶ ۲

۲ ۳ ۰ ۸ ۰ ۴ : عددهای عمل

۸ ۱ ۹ ۶ ۰ : مقسومهای فرعی

نخستین مرحلهٔ کار این است که اولین رقم یا رقم سمت چپ مقسوم را بگیریم و آن را اولین مقسوم فرعی قلمداد کنیم. هر مقسوم فرعی یکی از رقمهای جواب را خواهد داد.

۸ ۳ ۸ ۴ ÷ ۳ ۲ =

۸ مقسوم فرعی

مرحلهٔ دوم عبارت است از تقسیم کردن مقسوم فرعی بر اولین رقم مقسوم علیه که رقم ۳ از ۳۲ است. عدد حاصل، اولین رقم جواب خواهد بود. مقسوم فرعی خیلی وقتها به طور کامل تقسیم پذیر نیست ولی این موضوع مشکلی ایجاد نمی کند زیرا خیلی راحت، از باقیماندهٔ احتمالی چشم پوشی می کنیم؛ پس، اولین رقم جواب در اینجا ۲ است (۸ تقسیم بر ۳ می‌شود ۲).

حالا همین اولین رقم جواب را به طریقهٔ خاصی در مقسوم علیه ضرب می کنیم. از این طریقهٔ خاص، دو دسته رقم حاصل می‌شود. آنها را رقمهای **د ک** و رقمهای **ی** می‌نامیم. (اگر علت نام گذاری رقمهای **د ک** را درست به خاطر ندارید کافی است قدری به عقب برگردید و بخش روش تقسیم سریع را دوباره بخوانید.) در این مسئله رقم **د ک** برای این مرحله چنین در می آید:

د ک

۳ ۲ × ۲ = ۶

عمل : ۰۶ ۰۲

نتیجه : ۰۶

رقم ی هم بخشی از یک جفت د ی ناقص است. در مواردی که مقسوم علیه دو رقمی است، رقم د وارد کار نمی‌شود:

ی

۳ ۲ × ۲ = ۴

عمل : ۰۴

اکنون برای لحظه‌ای رقمهای د ک و ی را کنار می گذاریم تا دربارهٔ رقمهای ردیف عددهای عمل که در بالا قرار می گیرد بحث کنیم. این عددهای عمل فقط به منظور یافتن مقسومهای فرعی که زیر آنها قرار می گیرند به کار می‌روند:

۸ ۳ ۸ ۴ ÷ ۳ ۲ = ۲ ۶ ۲

عددهای عمل : ۲۳ ۰۸ ۰۴

مقسومهای فرعی ۸ ۱۹ ۶ ۰

توجه می کنید که هر عدد عمل شامل دو رقم است، گرچه ممکن است یکی از آنها صفر باشد. حالا می‌خواهیم یک رقم را از مقسوم فرعی و رقم دیگر را از مقسوم که در بالا نوشته شده به دست آوریم.

رقم دهگان، یعنی رقم ۲ از ۲۳، حاصل تفریق عدد د ک (۵۶) که اندکی بالاتر آن را یافتیم، از مقسوم فرعی (یعنی ۸) است.

۸ ۳ ۸ ۴

عدد عمل : ۲

۰۶ —

مقسوم فرعی : ۸

مقسوم فرعی، ۸، منهای د ک، ۰۶ برابر است با ۲، که رقم دهگان عدد عمل است

برای یافتن رقم یکان، یعنی رقم ۳ از ۲۳، کافی است رقم بعدی مقسوم را پایین بیاوریم:

۸ ۳ ۸ ۴

عدد عمل : ۲۳

د ک —

مقسوم فرعی : ۸

چنانکه قبلاً گفتیم، عدد عمل تنها برای این منظور نوشته می‌شود که به کمک آن یک مقسوم فرعی را که درست در زیرش نوشته می‌شود به دست آوریم. وقتی عدد عمل به دست آمد بی‌درنگ رقم ی را که اندکی قبل پیدا شده از آن کم می کنیم:

۸ ۳ ۸ ۴

عدد عمل : ۲۳

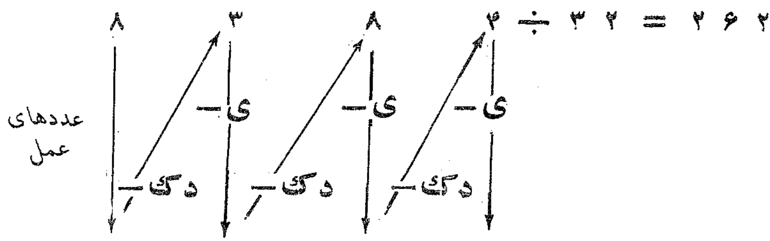
ی — ۰۴

مقسوم فرعی : ۱۹

عدد عمل، یعنی ۲۳، منهای رقم ی یعنی ۰۴ برابر است با مقسوم فرعی که ۱۹ است

این مقسوم فرعی جدید رقم بعدی جواب را معلوم می کند و همچنین

در یافتن رقم دهگان عدد عمل بعدی به کار می آید. همان طور که در آغاز مبحث این روش تقسیم گفتیم، خیلی اهمیت دارد که «احساسی» نسبت به چگونگی پیشرفت محاسبه داشته باشیم و این موضوع هستهٔ اصلی این روش محاسبه به شمار می آید. کار با یک مقسوم فرعی آغاز و منجر می‌شود به یافتن یک عدد عمل، که منجر می‌شود به یافتن یک مقسوم فرعی، که منجر می‌شود به یافتن یک عدد عمل، تا آخر. نحوهٔ توالی مراحل عمل به صورت نمودار زیر است:



این هستهٔ اصلی روش فعلی است. بقیهٔ مطالب در واقع تکرار چیزهایی است که تا اینجا دیدیم. حالا جا دارد مثالی را که داشتیم، حل کنیم.

آخرین عددی که داشتیم ۱۹ بود. دوباره این مقسوم فرعی را بر اولین رقم مقسوم علیه، که ۳ است، تقسیم می کنیم. داریم: ۱۹ تقسیم بر ۳ می‌شود ۶. از باقیمانده‌ها چشم‌پوشی می کنیم. پس ۶، رقم بعدی جواب

د گ

ی

۸ ۳ ۸ ۴ ÷ ۳ ۲ = ۲ ۶

عدد عمل: ۲۳

مقسومهای فرعی: ۸ ۱۹ ۶ برابر است با ۱۹ تقسیم بر ۳۲

سپس از این ۶ برای ضرب کردن ۳۲ به دو طریق استفاده می کنیم. اول حاصل ضرب د ک و سپس ی را به دست می آوریم و با این نتایج دو تفریق انجام می‌دهیم:

د ک

ی

۸ ۳ ۸ ۴ ÷ ۳ ۲ = ۲ ۶

۰

د ک —

۱۹

دراینجا صفر داریم زیرا د ک ۱۹ است

د ک

۳ ۲ × ۶

۱۸ ۱۲

۱۹

رقم بعدی مقسوم را پایین می آوریم:

۸ ۳ ۸ ۴ ÷ ۳ ۲ = ۲ ۶

۰۸

۸ ۱۹

حالا حاصل ضرب ی را تفریق می کنیم:

۸ ۳ ۸ ۴ ÷ ۳ ۲ = ۲ ۶

۰۸

د ک — ی —

۸ ۱۹ ۶

ی

۳ ۲ × ۶

۱۲

ی = ۲

رقم بعدی جواب را با تقسیم کردن آخرین مقسوم فرعی که ٦ است بر رقم ۳ از ۳۲ پیدا می کنیم:

$$\text{۸ ۳ ۸ ۴} \div \underline{\text{۳}}\ \text{۲} = \text{۲ ۶ }\underline{\text{۲}}$$

۲۳ ۰۸

۸ ۱۹ ۶

اکنون آخرین رقم جواب را یافته‌ایم، ولی اگر باقیمانده‌ای موجود باشد، باید آن را هم پیدا کنیم. این رقم ۲ جواب را به طریقهٔ د ک در مقسوم علیه، یعنی ۳۲، ضرب می کنیم:

د ک

۳ ۲ × ۲

عمل : $\underline{\text{۰۶}}$ $\underline{\text{۰}}$۴

نتیجه : ۶ — پس د ک ٦ است

حالا با کم کردن این ٦، داریم:

$$\text{۸ ۳ ۸ ۴} \div \text{۳ ۲} = \text{۲ ۶ ۲}$$

۰۴

د ک —

۶ — ٦ منهای د ک که ٦ است می‌شود ۰

رقم بعدی مقسوم را پایین آورده‌ایم. اکنون نتیجهٔ ضرب به طریقهٔ ی را تفریق می کنیم:

۸ ۳ ۸ ۴ ÷ ۳ ۲ = ۲ ۶ ۲

۰۴

ی—

۳۲ ضرب در ۲ می‌شود ۰۴

۰ (۰۴ — ی ۰۴ = ۰)

این صفر بدین معناست که باقیمانده‌ای نداریم. عمل تقسیم در اینجا به پایان می‌رسد.

باید یادآوری کنیم که عملاً ضمن کار به هیچ وجه این پیکانها را نمی‌کشیم. در واقع، ابتدا عددهای عمل را می‌نویسیم، ولی پس از اندک زمانی متوجه می‌شویم که بآسانی می‌توانیم برخی از آنها را حذف کنیم. نهایتاً، همهٔ کارها به طور ذهنی انجام خواهد گرفت و جواب بدون هیچ گونه مرحلهٔ میانی، نوشته خواهد شد. با وجود این، کار درست آن است که در آغاز کار همچنان که در مثال بالا عمل کردیم، عددهای عمل نوشته شوند.

شرح جزئیات روش

نکتهٔ ۱. «انجام آنچه به طور طبیعی پیش می‌آید» همیشه قابل توصیه نیست و گاه به حکم قانون ممنوع است. اما در موارد زیادی (که این هم یکی از آنهاست) آنچه به طور طبیعی انجام می‌گیرد، درست هم هست. چنین چیزی بسیار مطلوب است، زیرا در این صورت تنها چیزی که باید بدان توجه داشته باشیم، درست شروع کردن کار است. اولین رقم مقسوم را بر اولین رقم مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم و نتیجه، اولین رقم جواب است. مثل آنچه در صفحهٔ بعد می‌آید:

۸ ۶ ۱ ÷ ۲ ۱ = ۴   ۴ = ۸ ÷ ۲

حالا در مورد این یکی چه خواهیم کرد:

۱ ۶ ۱ ۲ ÷ ۳ ۱ = ?

نمی‌توانیم ۱ را بر ۳ تقسیم کنیم. در اینجا ناچاریم دو رقم نخست مقسوم، یعنی ۱۶ را اختیار کنیم:

از باقیمانده‌ها چشم‌پوشی می‌کنیم ۵ = ۱ ۳ ÷ ۲ ۱ ۶ ۱

به همین ترتیب، در مورد زیر، خواهیم داشت:

۳ ۳ ۸ ۴ ÷ ۶ ۴ = ۵   ۵ = ۳۳ ÷ ۶

نکتهٔ ۲. برای به دست آوردن بقیهٔ رقمهای جواب، همچنان از اولین رقم مقسوم علیه استفاده می‌کنیم، ولی به جای خود مقسوم، مقسومهای فرعی را به آن تقسیم می‌کنیم.

نکتهٔ ۳. به محض یافتن هر رقم از جواب بلافاصله آن را به شیوهٔ د ک (دهگان - کل) در مقسوم علیه ضرب می‌کنیم. مثلاً:

۲ ۲ ۹ ۴ ÷ ۶ ۲ = ۳

↓

۲۲

د ک

۶ ۲ × ۳

۱۸ ۰۶

حاصل‌ضرب د ک مطلوب = ۱۸

ضرب کردن ٦٢ در ۳ به روش د ک و به طور ذهنی کار دور از تصوری نیست. این نتیجه، یعنی ۱۸، باید از آخرین عددی که یافته‌ایم، یعنی ۲۲، تفریق شود:

۲ ۲ ۹ ۴ ÷ ۶ ۲ = ۳

۴

ـ دک

۲۲

۲۲ — ۱۸دک = ۴

در این مرحله است که بقیهٔ رقمهای مقسوم وارد کار می‌شوند. رقم بعدی مقسوم را به صورت زیر، پایین می آوریم:

۲ ۲ ۹ ۴ ÷ ۶ ۲ = ۳

۴۹

۲۲

نکتهٔ ٤. برای انجام عمل تفریق دیگر، باید رقم جدید جواب ـ آخرین رقم یافته شده، در اینجا ۳ ـ را در رقم یکان مقسوم ضرب کنیم و رقم یکان حاصل را به کار ببریم:

۲ ۲ ۹ ۴ ÷ ۶ $\underline{۲}$ = $\underline{۳}$

۴۹

ـ ۶

۲۲ ۴۳

٦ را تفریق می‌کنیم زیرا ٦ رقم یکان ۳ × ۲ است

حالا دیگر می‌توانیم مثال را به پایان برسانیم. برای این کار کافی است آنچه را در بالا کردیم تکرار کنیم.

۲ ۲ ۹ ۴ ÷ ۶ ۲ = ۳ ۷

۴۳

۷ = ۴۳ ÷ ۶

سپس حاصل ضرب د ک ٦٢ در رقم جدید جواب، یعنی ۷، را پیدا می کنیم:

۲ ۲ ۹ ۴ ÷ ۶ ۲ = ۳ ۷

۰

۴۳

حاصل ضرب د ک = ٤٣، و ۰ = ٤٣ - ٤٣

و رقم بعدی مقسوم را پایین می آوریم:

۲ ۲ ۹ ۴ ÷ ۶ ۲ = ۳ ۷

۰۴

۴۳

و بالاخره فقط رقم یکان ٦٢ را در آخرین رقم جواب که ۷ است، ضرب می کنیم:

۲ ۲ ۹ ۴ ÷ ۶ ۲ = ۳ ۷

۰۴

—۴

۰

۲ × ۷ = ۱۴

کار تمام است و رقم دیگری برای کار کردن نمانده است. معنی این آخرین صفر چیست؟ این عدد، باقیمانده است. آخرین عدد عمل، در ردیف پایینی، همیشه باقیماندهٔ تقسیم است.

نکتهٔ ۵. آخرین عدد عمل در ردیف پایینی همیشه باقیمانده است. در مثال بالا، باقیمانده صفر درآمد. می‌توانیم بگوییم که این تقسیم «بدون باقیمانده» بوده است. اما اغلب اوقات وضع چنین نیست. فرض کنید به جای ۲۲۹٤ در این مثال ۲۲۹٦ داشتیم و همچنان می‌خواستیم آن را بر ٦۲ تقسیم کنیم. در این صورت همه چیز مثل قبل می‌ماند، فقط مقسوم ۲ تا بیشتر بود. می دانیم که این ۲ اضافی به صورت باقیمانده، بر جا خواهد ماند.

بد نیست ببینیم محاسبه به چه صورتی در می آید. همه چیز همان طور باقی می‌ماند مگر در آخرین مرحله. در این مرحله داریم:

۲ ۲ ۹ ۶ ÷ ۶ ۲ = ۳ ۷

۰۶

۴۳

اکنون کافی است رقم یکان ۲ (متعلق به عدد ٦۲) ضرب در ۷ را به دست آوریم و آن را تفریق کنیم:

ی

۲ ۲ ۹ ۶ ÷ ۶ $\underline{۲}$ = ۳ $\underline{۷}$

۰۶

−۴

۲

پس آخرین عدد عمل در شیوهٔ عادی ثبت این اعداد ۲ است. کار به پایان رسیده زیرا چیزی نمانده که با آن عمل را ادامه دهیم و می‌بینیم که این ۲ همان باقیمانده است. عدد ۲ی افزوده شده به ۲۲۹٤ (که به طور کامل بر مقسوم علیه بخش پذیر بود) در پایان کار به عنوان آخرین عدد عمل پدیدار می‌شود.

نکتهٔ ۶. گاه حالت زیر پیش می‌آید. می‌خواهیم عدد **د ک** را طبق آنچه در نکتهٔ ۳ ذکر شد، از آخرین عدد عمل بکاهیم، و می‌بینیم که این کار مقدور نیست. گاه عدد بزرگتر از آن است که بتوانیم آن را تفریق کنیم. مثلاً:

۱ ۹ ۰ ۴ ÷ ۳ ۴ = ۶   ٦=١٩÷٣

↓

۱۹

سپس به شیوهٔ **د ک**، ٣٤ را در ٦ ضرب می‌کنیم:

د ک

۴ ۳

۲۴ + ۱۸

۲۰

۱ ۹ ۰ ۴ ÷ ۳ ۴ = ۶

؟

۲۰ −

۱۹

اما این ۲۰ را نمی‌توانیم تفریق کنیم زیرا از ۱۹ بزرگتر است.

در چنین مواردی،

از رقم جواب یکی کم می‌کنیم.

اگر از ٦ یکی کم کنیم، اولین رقم جواب به ۵ تبدیل می‌شود:

د ک

۱ ۹ ۰ ۴ ÷ ۳ ۴ = <u>۵</u>

۲۰

—۱۷

۱۹

حاصل ضرب د ک ۳۴ در ۵ را تفریق می‌کنیم.

از اینجا به بعد همه چیز طبق معمول پیش می‌رود. حالا رقم یکان ۴ ضرب در ۵ را که صفر است، تفریق می کنیم؛ سپس رقم بعدی جواب را پیدا می کنیم:

۱ ۹ ۰ ۴ ÷ ۳ ۴ = ۵ ۶

۳÷۲۰=۶

۲۰

—۰

۲۰

سپس حاصل ضرب د ک ۳۴ در این ۶ جدید، ۲۰ است که قبلاً هم به دست آمده بود:

د ک

۱ ۹ ۰ ۴ ÷ ۳ ۴ = ۵ ۶

۰۴

۲۰

و سرانجام رقم یکان ۴ ضرب در ۶ را که ۴ است، تفریق می کنیم:

۱ ۹ ۰ ۴ ÷ ۳ ۴ = ۵ ۶

۰۴

−۴

۰

باز هم در پایان کار به صفر رسیده‌ایم. پس تقسیم باقیمانده ندارد و جواب، درست ۵٦ است.

تا اینجا در مثالها با مقسومهایی سرو کار داشتیم که چندان طولانی نبودند و مثلاً مقسومی که در مثال بالا داشتیم عدد چهار رقمی ۱۹۵٤ بود. شاید این تصور پیش بیاید که نکند از لحاظ طول این مقسومها محدودیتی داریم.

جواب منفی است. مقسوم می‌تواند هر قدر طولانی باشد و همیشه می‌توانیم از روش بیان شده استفاده کنیم. حالا مثالی طولانی را در نظر می گیریم: ٤٧٩٥٣٥ تقسیم بر ٦٣. رقمها را به فاصله می‌نویسیم و طبق روش مذکور عمل می کنیم:

د ک

ی

۴ ۷ ۹ ۵ ۳ ۵ ÷ ۶ ۳ = ۷ ۶ ۱ ۱

۳۹ ۱۵ ۱۳ ۲۵

—دک— ی— دک— ی—

۴۷ ۳۸ ۷ ۱۰ ۴۲

باقیمانده ٤٢ است.

عملاً موقع کار پیکانها رسم نمی‌شود. براحتی می‌توانیم فرض کنیم که این پیکانها در محلهای خود قرار دارند. یک موضوع دیگر: ردیف وسطی را که مربوط به عددهای عمل است، می‌توانیم حذف کنیم زیرا

مطلب را دریافته‌ایم. در واقع شکل ظاهری عمل باید به صورت زیر باشد:

د ک

ی

۴ ۷ ۹ ۵ ۳ ۵ ÷ ۶ ۳ = ۷ ۶ ۱ ۱ ۱

۳۸ ۷ ۱۰ ۴۲

نهایتاً، پس از آنکه با مراحل عمل خوب آشنا شدیم، خواهیم دید که می‌توانیم بدون هیچ گونه اعداد عمل، تقسیم را انجام دهیم. حتی اگر کسی ذهن خود را در این کار متمرکز کند، تنها ردیف عددهای عمل را هم که در مثال اخیر وجود دارد می‌تواند حذف کند. به این ترتیب چیزی جز خود جواب نوشته نمی‌شود. حروف د ک و ی که در بالا ثبت کردیم، تنها باقیمانده‌هایی هستند که وقتی دیدیم دیگر نیازی به آوردنشان نیست می‌توانیم آنها را هم حذف کنیم.

اکنون به نکتهٔ دیگری که کار را آسانتر می‌کند می‌پردازیم. این روش در مواردی به کار می‌آید که چند بند بالاتر ذکر کردیم و مربوط به وقتی است که می‌خواهیم یک عدد د ک بزرگ را از مقسوم فرعی کوچکتر از آن تفریق کنیم:

اگر دومین رقم مقسوم‌علیه ۸ یا ۹ است، بر اولین رقم مقسوم‌علیه تقسیم نمی‌کنیم؛ به جای این کار، بر اولین رقم مقسوم‌علیه یکی می‌افزاییم، سپس تقسیم می‌کنیم.

مثلاً، اگر مقسوم علیه ۳۹ بود، به جای ۳ بر ۴ تقسیم می کنیم. رقم ۹ در ۳۹ این امکان را ایجاد می کند. علت این کار را به طور حسی نیز می‌توانیم دریابیم: ۳۹ به ۴۰ خیلی نزدیکتر است تا ۳۰. به همین ترتیب، با داشتن مقسوم علیه ۳۸ بهتر خواهد بود که به جای ۳ بر ۴ تقسیم کنیم.

مثال:

۲ ۰ ۲ ۸ ÷ ۳ ۹ = ?
<u>۲۰</u>

طبق آنچه تا کنون عمل می کردیم، در نخستین مرحله می گوییم «۲۰ تقسیم بر ۳ می‌شود ۶»، و ۶ را به عنوان نخستین رقم جواب یادداشت می کنیم. اما در این صورت ناگزیر خواهیم شد ۶ را اصلاح و به ۵ تبدیل کنیم، زیرا حاصل ضرب د ک بیش از حد بزرگ در می آید و نمی‌توانیم آن را تفرق کنیم (اینجا داریم: ۲۳ = <u>۵</u>۴ + <u>۱۸</u> = ۶× ۳۹ حاصل ضرب د ک). اما اکنون از نکتهٔ آسان ساز استفاده می‌بریم و ۲۰ را به جای ۳ بر ۴ تقسیم می کنیم. با این کار، اولین رقم جواب، بلافاصله ۵ در می آید و نیازی به تصحیح نخواهد داشت:

۲ ۰ ۲ ۸ ÷ ۳ ۹ = ۵
(۴) ۵ = ۲۰ ÷ ۴
<u>۲۰</u>

توجه کنید که در هر صورت جواب درست به دست می آید، چه از نکتهٔ آسان ساز استفاده کنیم و چه نکنیم. در صورت تمایل می‌توانیم پا را از این فراتر بگذاریم و این رقم یکی بیشتر را در مواردی که رقم دوم ۶، ۷، ۸ یا ۹ است به جای اولین رقم مقسوم علیه به کار ببریم. با این حساب، وقتی مقسوم علیه ۳۶ داریم، برای یافتن رقم بعدی جواب، عددهای عمل را بر ۴ تقسیم می کنیم.

اگر این موضوع را شامل ۶ و ۷ هم بکنیم، گاه رقم یافته شده در جواب از مقدار مناسب کوچکتر در می آید. این وضع باید تصحیح شود، همان طور که قبلاً وقتی رقم جواب بیش از مقدار مناسب می‌شد آن را کم می کردیم. این حالت برای وقتی هم که رقم دوم ۸ یا ۹ باشد ممکن است

پیش بیاید ولی چنین مواردی نادر است.

چطور می‌توانیم بفهمیم که رقم جدید جواب از مقدار مناسب کوچکتر است؟ حاصل ضرب د ک چیزی را روشن نمی‌کند، زیرا کوچک است و حتماً می‌توانیم آن را تفریق کنیم. حاصل ضرب ی هم ما را متوجه موضوع نخواهد کرد. اما در اینجاست که «مقسوم فرعی» به کمکمان می‌آید:

> اگر مقسوم‌فرعی بزرگتر از مقسوم‌علیه درآمد، یا حتی با آن مساوی شد، آخرین رقم جواب از مقدار مناسب کوچکتر است.

فرض می‌کنیم کسی بر اثر بی‌دقتی هنگام عمل تقسیم اشتباهی به صورت زیر مرتکب شود:

۵ ۷ ۶ ۳ ÷ ۸ ۱ = ۶

۵۷

البته این اشتباه فاحشی است، زیرا می‌دانیم که ۵۷ تقسیم بر ۸ می‌شود ۷ و نه ٦. اما توجه کنید که این اشتباه چطور خود را در مقسوم فرعی نشان می‌دهد:

۵ ۷ ۶ ۳ ÷ ۸ ۱ = ۶

۹۶

−۶ ٥٦ = ی؛ ٤٨ = د ک

۵۷ ۹۰

این مقسوم فرعی که ۹۰ در آمده مسلماً غلط است زیرا از مقسوم علیه بزرگتر است. پس باید ٦ را به ۷ تبدیل کنیم.

اگر به بزرگتر بودن ۹۰ از ۸۱ توجه نکنیم، در مرحلهٔ بعدی ناگزیر

به آن توجه خواهیم کرد. زیرا خواهیم گفت ۹۰ تقسیم بر ۸ می‌شود ۱۱ و این یعنی «رقم بعدی جواب ۱۱ است». چنین چیزی ممکن نیست زیرا ۱۱ رقم نیست. پس متوجه می‌شویم که ٦ از مقدار مناسب کوچکتر است، و آن را به ۷ افزایش می‌دهیم.

مقسوم‌علیه‌های سه رقمی

فرض کنید می‌خواهیم ۲۳٦۸۳۱ را بر ٦۷٤ تقسیم کنیم. نحوهٔ محاسبه تقریباً مثل کاری است که تا کنون می کردیم. این عمل خیلی شبیه به وقتی است که به جای ٦۷٤ بر ٦۷ تقسیم می کنیم. در عین حال، پای رقم سوم مقسوم علیه هم به میان می آید.

لابد نمودارهایی را که قبلاً داشتیم به یاد می آورید که در آنها پیکانهای کجی به طرف بالا به معنی «تفریق حاصل ضرب د ک» و پیکانهایی رو به پایین به معنی «تفریق حاصل ضرب ی» ظاهر می‌شد. حالا معنی این پیکانهای رو به پایین، قدری تغییر می کند. با این معنی جدید، رقم جدید که رقم ٤ در ٦۷٤ است به کار گرفته می‌شود، این تغییر با مقایسهٔ دو نمودار زیر روشن می‌شود:

مقسوم‌علیه‌های دو رقمی

د ک

ی

? = ۶ ۷ ÷ ۱ ۳ ۸ ۶ ۳ ۲

مقسوم‌علیه‌های سه رقمی

د ک

د ی

? = ۶ ۷ ۴ ÷ ۱ ۳ ۸ ۶ ۳ ۲

معنای این کار چیست؟ همان چیزی که از نگاه کردن به نمودار استنباط می‌شود. حاصل ضرب د ک را با استفاده از ۶۷ و رقم جواب تشکیل می‌دهیم، تا آن را طبق پیکان رو به بالا تفریق کنیم:

د ک

د ی

۴ ۳ ۶ ۸ ۳ ۱ ÷ ۶ ۷ ۴ = ۳

۳۶

۲۰ −

۲۳

۲۰ = ۲۱ + ۱۸ = ۳ × ۶۷ = د ک

این کار مثل گذشته انجام شد و فقط رقم ۴ در ۶۷۴ را نادیده گرفتیم. اما اکنون به تفریق کردن حاصل ضرب ی، طبق پیکان رو به پایین، می‌رسیم. حالا دیگر این حاصل ضرب، به حاصل ضرب د ی تبدیل می‌شود:

د ک

د ی

۶ ۷ ۴ × ۳

عمل : ۲۱ ۱۲

نتیجه : ۲

۲ = ۱۲ + ۲۱ = ۳ × ۷۴ = د ی

پس در پایین رفتن از ۳۶ که در مرحلهٔ اخیر به آن رسیدیم، د ی را که ۲ است تفریق می‌کنیم:

۲ ۳ ۶ ۸ ۳ ۱ ÷ ۶ ۷ ۴ = ۳

۳۶

۲ −

۳۴

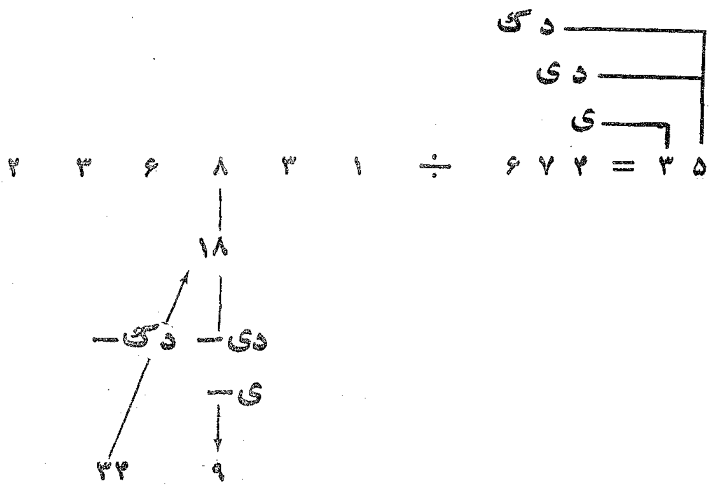
آخرین عددمان ۳۴ است. این عدد در ردیف پایینی قرار گرفته، بنابراین مقسوم فرعی است و اکنون آن را طبق معمول بر رقم ۶ از ۶۷۴ تقسیم می کنیم. با این کار ۵ به عنوان رقم بعدی جواب به دست می آید :

۲ ۳ ۶ ۸ ۳ ۱ ÷ ۶ ۷ ۴ = ۳ ۵

۳۴

عمل به همین ترتیب دنبال می‌شود. حاصل ضرب د ک ۶۷ با ۵ را تشکیل می‌دهیم و آن را از مقسوم فرعی کم می کنیم. سپس حاصل ضرب د ی ۷۴ با این ۵ را تشکیل می‌دهیم و آن را تفریق می کنیم تا مقسوم فرعی بعدی به دست آید.

البته این مشابهت تمام و کمال نیست! هنگام تکرار، مختصر تفاوتی وجود دارد. با رقم بعدی جواب عیناً همان طور که با رقم اول عمل شد، عمل نمی کنیم: از هر دو رقم جواب که تا کنون یافته شده استفاده می کنیم.



حاصل ضرب د ک طبق معمول برابر است با: ٦۷ ضرب در ۵، که می‌شود ۳۰ بعلاوهٔ ۳۵ که برابر با ۳۳ است. این ۳۳ را از ۳٤ تفریق می کنیم، ۱ باقی می‌ماند؛ ۸ را پایین می آوریم، در نتیجه در ردیف عمل ۱۸ خواهیم داشت. اما اکنون عددی که باید از ۱۸ تفریق شود مجموع دو جزء است: یک د ی بعلاوهٔ یک ی. نمودار بالا طرز تعیین این دو جزء را نشان می‌دهد.

ی
۶ ۷ ۴ × ۳۵
۱۲

د ی
۶ ۷ ۴ × ۳۵
۳۵ ۲۰

۹ = (حاصل‌ضرب ی ۲) + (حاصل‌ضرب د ی ۷) : نتیجه

پس مجموع حاصل ضربهای د ی و ی، ۹ می‌شود. این ۹ را از ۱۸ که در عمل تقسیم به آن رسیدیم کم می کنیم، مقسوم فرعی ۹ به دست می آید. این ۹ را بر رقم ٦ از ٦۷٤ تقسیم می کنیم ۱ حاصل می‌شود. پس رقم بعدی جواب ۱ است:

۲ ۳ ۶ ۸ ۳ ۱ ÷ ۶ ۷ ۴ = ۳ ۵ ۱
۳۶ ۱۸
۲۳ ۳۴ ۹

در این مثال خاص نیازی به یافتن رقم دیگری نیست؛ همان ۳۵۱، خارج قسمت مورد نظر است.

البته در موارد دیگر ممکن است مقسوم خیلی طولانیتر از این عدد ۲۳٦۸۳۱ باشد که در این صورت ناچاریم تکرار مراحل بالا را بیشتر ادامه دهیم. برای آنکه اشکالی از این لحاظ پیش نیاید، دستور کلی زیر را بیان می کنیم:

هرگاه مقسوم‌علیه سه رقم داشته باشد (که در نمودار زیر آنها را با سه X نشان داده‌ایم)، تفریق د ی یا «رو به

پایین» طبق شکل زیر انجام می‌شود:

د ی

ی

مقسوم ÷ X X X = — — — X X

دو X موجود در جواب، آخرین دو رقم یافته شده از جوابِ ناقص، هستند.

چنانکه گفتیم، در مثال اخیر جواب ۳۵۱ شد. اما هنوز باید باقیمانده را معلوم کنیم. برای آنکه بدانیم چه وقت خارج قسمت را به طور کامل یافته‌ایم، به شیوهٔ زیر عمل می کنیم:

از سمت راست مقسوم، به تعداد یکی کمتر از ارقام مقسوم‌علیه، رقم جدا می‌کنیم.

در مثال اخیر مقسوم علیه ٦٧٤ است که سه رقم دارد؛ باید یکی کمتر از این تعداد، یعنی دو رقم را جدا کنیم:

۲۳۶۸/۳۱

این علامت به ما نشان می‌دهد که چه وقت عمل تمام می‌شود. همهٔ رقمهایی که در طرف چپ این علامت واقعند، در یافتن ارقام جواب، یا خارج قسمت به کار می آیند. رقمهای واقع در سمت راست علامت برای تعیین باقیمانده به کار گرفته می‌شوند. حالا باقیماندهٔ مثال بالا را به دست می آوریم:

د ک
د ی
ی

۲ ۳ ۶ ۸ / ۳ ۱ ÷ ۶ ۷ ۴ = ۳ ۵ ۱
۱۸ ۳۳ ۲۶۱
۹ ۲۶ ۲۵۷ باقیمانده ۲۵۷ است

عدد عمل ۳۳ را به طریقهٔ عادی به دست آوردیم: حاصل ضرب **د ک** ٦٧ در ۱، می‌شود ٦٥ بعلاوهٔ ٧٥ که برابر با ٦ است. این ٦ را از ۹ کم می کنیم حاصل ۳ می‌شود رقم ۳ ی مقسوم را هم پایین می آوریم. از این ۳۳، حاصل ضربهای **د ی** و **ی** را مانند قبل کم می کنیم (**د ی** برابر است با ٧٤ ضرب در ۱، یعنی ٧٥ بعلاوهٔ ٤٥ که برابر با ۷ است؛ **ی** برابر است با ٤ ضرب در ۵، یعنی ٢٥، که صفر است) پس داریم ۳۳ منهای ۷ که ٢٦ است.

این ٢٦ را بدون هیچ گونه تفریق **د ک** به بالا می‌بریم تا رقم ۱ مربوط به مقسوم هم در کنارش قرار گیرد و ٢٦١ حاصل شود. آخرین مرحلهٔ رو به پایین با تفریق کردن حاصل ضرب رقم سمت راست مقسوم علیه (رقم ٤ از ٦٧٤) و رقم سمت راست جواب (رقم ۱ از ۳۵۱) انجام می‌شود.

$$\begin{array}{r} ۲۶۱- \\ ۴ \\ \hline ۲۵۷ \end{array}$$

باقیمانده ۲۵۷ است.

موضوع را به این صورت در نظر بگیرید: علامت (خط مورب) مقسوم علیه را به دو بخش تقسیم می کند؛ بخش خارج قسمت در طرف چپ و بخش باقیمانده در طرف راست. خود علامت در حکم خط مرزی

بین این دو ناحیه است. عبور از این مرز در یک پیکان **د ک** رو به بالا (تفریق) رخ می‌دهد که مربوط به آخرین رقم جواب است. هنگام عبور از مرز هنوز داریم «عادی» عمل می کنیم یعنی همان شیوهٔ عمل در ناحیهٔ خارج قسمت را ادامه می‌دهیم. در واقع، این مرحله تا آخر به طور عادی انجام می‌شود، زیرا تفریق (ی + د ک) بعدی نیز مانند ناحیهٔ خارج قسمت انجام می گیرد. تنها پس از این است که دستورالعمل ناحیهٔ باقیمانده را به کار می‌بریم که با دستورالعمل ناحیهٔ خارج قسمت از دو لحاظ فرق دارد:

۱. در اینجا دیگر هیچ گونه تفریق **د ک** انجام نمی‌شود. پیکان رو به بالا، تمامی مقسوم فرعی را با خود منتقل می کند.
۲. در آخرین تفریق رو به پایین فقط از حاصل ضرب رقم سمت راست جواب (نه دو رقم آخر) و رقم سمت راست مقسوم علیه استفاده می‌شود.

تشریح محاسبهٔ مربوط به باقیمانده موضوع مفیدی است که با برخی اصلاحات برای مقسوم علیه‌های به طول دلخواه قابل استفاده است. در بخش بعد، به این موضوع باز خواهیم گشت.

یک مثال دیگر: می‌خواهیم ۱۹۶۳۰۷ را بر ۵۱۲ تقسیم کنیم. عدد ۵۱۲ سه رقم دارد، پس از طرف راست دو رقم را جدا و سپس عمل تقسیم را شروع می کنیم:

د ک
د ی
ی

۳ ۸ ۳ = ۲ ۱ ۵ ÷ ۷ ۰ / ۳ ۶ ۹ ۱

۳۳ ۴۶

۱۸ ۴۳ ۱۹

حالا از خط مرزی (خط مورب) با یک تفریق د ک عادی می گذریم و این مرحله را با یک تفریق رو به پایین عادی، کامل می کنیم:

د ک
د ی
ی

۱ ۹ ۶ ۳ / ۰ ۷ ÷ ۵ ۱ ۲ = ۳ ۸ ۳

۴۶ ۳۳ ۳۰

۱۹ ۴۳ ۱۸ ۲۱

دک = ۵۱ × ۳ = ۱۵

دی = ۱۲ × ۳ = ۳

ی = ۲ × ۸ = ۶

حالا به دستورالعمل باقیمانده می‌رسیم و در پیکان رو به بالا چیزی تفریق نمی کنیم، بلکه مقسوم فرعی را به عنوان بخشی از عدد عمل جدید عیناً بالا می‌بریم. سپس در پیکان رو به پایین، تنها حاصل ضرب آخرین رقم جواب ۳۸۳، یعنی ۳، در آخرین رقم مقسوم علیه، یعنی ۲، کاسته می‌شود (بر خلاف شیوهٔ «عادی» که در آن از ۸۳ استفاده می‌شد):

۱ ۹ ۶ ۳ / ۰ ۷ ÷ ۵ ۱ <u>۲</u> = ۳ ۸ <u>۳</u>

۴۶ ۳۳ ۳۰ ۲۱۷

۱۹ ۴۳ ۱۸ ۲۱ ۲۱۱ باقیمانده

توجه کنید که در طرف راست خط مرزی، هیچ گونه «مقسوم فرعی» نداریم و همهٔ اعداد «عددهای عمل» هستند. یعنی هیچ یک از این عددها برای یافتن رقم بعدی جواب، بر اولین رقم مقسوم علیه تقسیم نمی‌شوند. جواب به طور کامل به دست آمده است و اکنون به دنبال یافتن باقیمانده هستیم.

این هم مثالی با مقسوم طولانی که حل آن به صورتی که عملاً

می‌تواند انجام شود، ثبت شده است:

د ک

د ی

ی

۶ ۳ ۱ ۲ ۳ ۲/۵ ۷ ÷ ۹ ۸ ۳ = ۶ ۴ ۲ ۱ ۴

۵۱ ۳۲ ۲۳ ۶۲ ۹۵ ۸۹۷

۶۳ ۴۲ ۲۱ ۱۵ ۴۸ ۸۹ ۸۹۵

جواب ٦٤٢١٤ است. باقیمانده هم ۸۹۵ است (توجه کنید که عدد ۹۸۳ با داشتن ۸ به عنوان رقم دومش، خیلی به ۱۰۰۰ نزدیک است، از این رو مقسومهای فرعی را به جای ۹ بر ۱۰ تقسیم می کنیم تا بعداً مجبور به تصحیح بعضی از رقمهای جواب نشویم).

باز هم مثالی دیگر: ۳۹۸٦۳۹۰۷ تقسیم بر ۷۲۹. چون دومین رقم ۷۲۹ فقط ۲ است و ۸ یا ۹ نیست، در اینجا به جای ۷ رقم ۸ را مقسوم علیه قرار نمی‌دهیم. از طرف دیگر، دریک‌جا مجبور خواهیم شد رقمی از جواب را تقلیل دهیم، زیرا به حالتی می‌رسیم که مجموع **د ی** و **ی** بیشتر از آن است که بتوانیم آن را تفریق کنیم. این وضع برای یک رقم ۷ پیش می آید که آن را خط می‌زنیم و به ٦ تصحیح می کنیم:

د ک

د ی

ی

۳ ۹ ۸ ۶ ۳ ۹/۰ ۷ ÷ ۷ ۲ ۹ = ۵ ۴ ~~۷~~ ۶ ۸ ۳

۳۸ ۶۶ ۷۳ ۳۹ ۱۰ ۰۷

۳۹ ۳۴ ۵۰ ۶۰ ۲۲ ۰ ۰

جواب ۵٤٦٨۳ است. باقیمانده هم صفر است، پس مقسوم بر مقسوم علیه

بخش پذیر بوده است.

چند مثال

بد نیست سه مثال زیر را خودتان حل کنید. این مثالها با توجه به «راهنماییها»ی عرضه شده به دنبال مسئلهٔ سوم حل می‌شوند. اگر احساس می کنید که بدون این راهنماییها می‌توانید آنها را حل کنید، راهنماییها را نخوانید.

۱. ۹۲۸۸۰ ÷ ۴۳۲ = ?

۲. ۳۱۳۹۲ ÷ ۶۵۴ = ?

۳. ۵۴۷۶۳ ÷ ۴۸۹ = ?

راهنماییها: آخرین مقسوم علیه، یعنی ۴۸۹، دومین رقمش ۸ است، پس در هر مرحله می‌توانیم مقسوم فرعی را به جای ۴، بر ۵ تقسیم کنیم. از سوی دیگر، اگر بر ۴ هم تقسیم کنیم می‌توانیم به جواب درست برسیم. طبعاً در این صورت به مواردی می‌رسیم که باید جواب را تصحیح کنیم. در هر حال، به یاد داشته باشید که (۱) هر مقسوم فرعی را در هر یک از مسائل، تقسیم می کنیم و نتیجه را به عنوان رقمی از جواب می‌نویسیم؛ (۲) حاصل ضرب د ک این رقم را می‌یابیم و آن را تفریق می کنیم؛ و سپس (۳) حاصل ضرب د ی آخرین رقم جواب را با حاصل ضرب ی در رقم ما قبل آخر جواب جمع می کنیم و حاصل را از عدد عمل کم می کنیم.

جوابها:

۱. ۹ ۲ ۸ ۸ ۰ ÷ ۴ ۳ ۲ = ۲ ۱ ۵

۱۲ ۲۸ ۵۸ ۰۰

۹ ۶ ۲۱ ۰ ۰ باقیمانده ندارد

۲. ۳ ۱ ۳ ۹ ۲ ÷ ۶ ۵ ۴ = ۴ ۸

۵۳ ۰۹ ۰۲

۳۱ ۵۲ ۰ ۰ باقیمانده ندارد

۳. ۵ ۴ ۷ ۶ ۳ ÷ ۴ ۸ ۹ = ۱ ۱ ۱

۱۴ ۲۷ ۶۶ ۴۹۳

۵ ۶ ۱۰ ۴۹ ۴۸۴ باقیمانده ۴۸۴ است

مقسوم‌علیه‌های به طول دلخواه

اگر در عمل تقسیم، مقسوم علیه‌هایی با چهار رقم یا بیشتر داشته باشیم، مثل ۱۳۶۷۱۵۱۴ تقسیم بر ۴۲۱۷، بر اساس همان شیوه‌های قبلی عمل می کنیم:

۱. حاصل ضرب د ک را تفریق می کنیم تا عدد عمل به دست آید.
۲. حاصل ضرب د ی را از عدد عمل کم می کنیم تا مقسوم‌فرعی جدید معلوم شود.
۳. نتیجه را (که مقسوم فرعی است) بر اولین رقم مقسوم علیه تقسیم می کنیم تا رقم بعدی جواب پیدا شود.

اما اکنون با داشتن مقسوم علیه چهار رقمی یک رقم اضافی، مثل رقم ۷ در ۴۲۱۷ داریم که باید آن را در نظر بگیریم. برای این منظور، حاصل ضرب د ی را تعمیم می‌دهیم، ولی دو مرحلهٔ دیگر (۱ و ۳) به همان صورت باقی می‌مانند. منظور از این «تعمیم» را می‌توانیم با مقایسهٔ موارد زیر دریابیم:

د ک
ی
مقسوم علیه دو رقمی: ۲ ۴

د ک
د ی
ی
مقسوم علیه سه رقمی: ۱ ۲ ۴

د ک
د ی
د ی
ی
مقسوم علیه چهار رقمی: ۷ ۱ ۲ ۴

با اضافه شدن هر رقم، یک جفت د ی دیگر نیز وارد کار می‌شود. نتیجهٔ این وضع چیزی است که در بالا می‌بینیم، یعنی تداخل جفتهای د ی. هر مقسوم علیه چهار رقمی در اوج گسترش خود سه جفت د ی خواهد داشت؛ مقسوم علیه پنج رقمی، چهار جفت د ی خواهد داشت. همیشه در پایان یک ی منفرد داریم که در حقیقت آن هم یک جفت د ی است. حرف د آن روی هیچ رقمی قرار نمی گیرد بنابراین نقشی در کار ندارد و لزومی به نوشتن این د نیست.

برای ضرب کردن در د ی، کدام رقم را باید اختیار کنیم؟ مسلماً با هر جفت د ی یکی از رقمهای جواب مربوط می‌شود، ولی کدام یکی؟ بد نیست یک جواب نامشخص، یا بخشی از آن را که یافته شده، به

صورت تعدادی x بنویسیم. هر x نشانهٔ رقمی است که فعلاً لزومی ندارد آن را مشخص کنیم. فرض کنید چهار رقم از جواب را یافته‌ایم. در این صورت برای انجام ضرب به طریقهٔ د ی، جفتهای د ی به صورت زیر با ارقام جواب مربوط می‌شوند:

د ک
د ی
د ی
ی

مقسوم علیه‌های چهار رقمی: ۴ ۲ ۱ ۷ = $x\ x\ x\ x$

د ک
د ی
د ی
د ی
ی

مقسوم علیه‌های پنج رقمی: ۴ ۲ ۱ ۷ ۳ = $x\ x\ x\ x$

سپس حاصل این ضربهای د ی را با یکدیگر جمع می‌کنیم. در مورد مضروب فیه‌های دو رقمی و سه رقمی هم در واقع همین کار را می کردیم. اگر به طرز قرار گرفتن خطهای نمودار در کنار یکدیگر توجه کنیم، می‌بینیم که یک «مجموعهٔ تو در تو» شبیه به آنچه در فصل ضرب داشتیم، پدید می آورند:

$x\ x\ x \qquad x\ x\ x$

دستوری که در اینجا برای حرکت داریم چنین است: «از هر دو کناره به سمت داخل بروید.» این شیوه را کلاً می‌توانیم به صورت زیر خلاصه کنیم:

۱. در هر مرحله، رقم جدید جواب را در دو رقم اول مقسوم علیه (مثلاً ٤۲ از عدد ٤۲۱۷) به طریقهٔ **د ک** ضرب می کنیم.
۲. همان رقم جدید جواب را به طریقهٔ **د ی** در دومین و سومین رقم مقسوم علیه (مثلاً ۲۱ در عدد ٤۲۱۷) ضرب می کنیم.
۳. سپس به سمت داخل پیش می‌رویم و سایر جفتهای **د ی** از مقسوم علیه را به نوبت در رقم «قبلی» جواب ضرب می کنیم (چنانکه در ٤۲۱۷، دوباره به سمت داخل می‌رویم، اول به جفت ۱۷ و سپس به جفت د ی ناقص ۷ می‌رسیم).

بد نیست نگاهی به مثال ۱۳٦۷۱۵۱٤ تقسیم بر ٤۲۱۷ که در بالا داشتیم، بیندازیم. سه دستور اخیر را به کار می گیریم تا ببینیم چطور با آنها جواب پیدا می‌شود. قبل از هر چیز، توجه می کنیم که مقسوم علیه، یعنی ٤۲۱۷ دارای چهار رقم است، پس از سمت راست سه رقم (یعنی یکی کمتر از مقسوم علیه) را جدا می کنیم:

$$۱\ ۳\ ۶\ ۷\ ۱ / ۵\ ۱\ ۴ \div ۴\ ۲\ ۱\ ۷ = ۳$$
$$۱۳$$

از سه رقم آخر مقسوم برای یافتن باقیمانده استفاده خواهیم کرد. اولین رقم جواب ۳ است که با تقسیم کردن ۱۳ بر رقم ٤ از عدد ٤۲۱۷ به دست می آید. حالا این سه دستور را به کار می‌بندیم:

دومین رقم جواب:

حاصل ضرب **د ک** را تفریق می کنیم (دستور ۱):

د ک

۱ ۳ ۶ ۷ ۱ / ۵ ۱ ۴ ÷ ۴ ۲ ۱ ۷ = ۳

۱

—دک(۱۲)

۱۳

۳×۴۲=دک

۱۲ ۰۶

۱۲ = د ک

حاصل ضرب د ی را تفریق می کنیم (دستور ۲):

د ک

د ی

۱ ۳ ۶ ۷ ۱ / ۵ ۱ ۴ ÷ ۴ ۲ ۱ ۷ = ۳

۱۶

— د ی(۰۶)

۱۳ ۱۰

۳×۲۱=د ی

۰۶ ۰۳

دی=۶

مقسوم فرعی ۱۰ را بر رقم ٤ از ٤۲۱۷ تقسیم می کنیم تا رقم بعدی جواب که ۲ است، به دست آید.

سومین رقم جواب: حاصل ضرب د ک را تفریق می کنیم (دستور ۱):

د ک

د ی

د ی

۱ ۳ ۶ ۷ ۱ / ۵ ۱ ۴ ÷ ۴ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲

۱۶ ۲۷

-د ک(۰۸)

۱۳ ۱۰

۲×۴۲=دک

۰۸ ۰۴

دک=۸

حاصل ضربهای د ی را تفریق می کنیم (دستورهای ۲ و ۳):

د ک

د ی

د ی

۱ ۳ ۶ ۷ ۱ / ۵ ۱ ۴ ÷ ۴ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲

۱۶ ۲۷

— ی د(۰۹)

۱۳ ۱۰ ۱۸

دی = ۲۱ × ۲; ۱۷ × ۳

۰۴ ۰۲ ۰۳ ۲۱

دی = ۴ + ۵ = ۰۹

طبعاً پس از این، رقم بعدی جواب از تقسیم کردن عدد اخیر ۱۸ بر رقم ٤ از ٤۲۱۷ به دست می آید (۱۸ تقسیم بر ٤، می‌شود ٤).

آخرین رقم جواب:

چهارمین رقم جواب، در این مثال آخرین رقم است (این مطلب با توجه به خط موربی که خارج قسمت را به دو بخش خارج قسمت و باقیمانده تفکیک کرده، مشخص می‌شود). حاصل ضرب د ک را تفریق می کنیم (دستور ۱):

د ک

د ی

د ی

ی

۱ ۳ ۶ ۷ ۱ / ۵ ۱ ۴ ÷ ۴ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲ ۴

۱۶ ۲۷ ۲۱

— دک(۱۶)

۱۳ ۱۰ ۱۸

دک = ۴۲ × ۴

۱۶ ۰۸

دک = ۱۶

حاصل ضربهای د ی را تفریق می کنیم (دستورهای ۲ و ۳):

د ک
د ی
د ی
ی

۱ ۳ ۶ ۷ ۱ / ۵ ۱ ۴ ÷ ۴ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲ ۴

۱۶ ۲۷ ۲۱

–دی(۱۲)   دی= ۲۱ × ۴; ۱۷ × ۲; ۷×۳

۰۸ ۰۴   ۰۲ ۱۴   ۲۱

۱۳ ۱۰ ۱۸ ۹   دی = ۸ + ۳ + ۱ = ۱۲

آخرین رقم جواب ۴ است که از تقسیم آخرین مقسوم فرعی، ۹، بر رقم ۴ از عدد ۴۲۱۷ به دست می آید.

باقیمانده:

پس از یافتن همهٔ رقمهای خارج قسمت (که جواب مسئله است)، کار را برای پیدا کردن باقیمانده ادامه می‌دهیم. روش کلی برای مقسوم علیه‌های به طول دلخواه، شبیه آن است که در بخش مربوط به مقسوم علیه‌های سه رقمی گفته شد. این کار سه مرحله دارد:

۱. از «مرز» (خط مورب رسم شده در مقسوم) می گذریم و همچنان به شیوهٔ عادی عمل می کنیم. عمل تفریق د ک را انجام می‌دهیم تا اولین عدد عمل در طرف باقیمانده (آن سوی خط مورب) به دست آید. عمل تفریق د ی نیز به طور عادی صورت می گیرد.

د ک
د ی
د ی
ی

۱ ۳ ۶ ۷ ۱ / ۵ ۱ ۴ ÷ ۴ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲ ۴ ۲

۱۶ ۲۷ ۲۱ ۱۵

—ذک(۰۸) | —دی(۱۴)   دک = ۴۲ × ۲

۰۸ ۰۴

۱۳ ۱۰ ۱۸ ۹ ۱

دک = ۸

دی = ۲۱ × ۲؛ ۱۷ × ۴؛ ۷ × ۲

۰۴ ۰۲   ۰۴ ۲۸   ۱۴

دی = ۴ + ۶ + ۴ = ۱۴

این کار درست مثل قبل دنبال شد (در مرحلهٔ بعد تفاوتی که مربوط به باقیمانده است محسوس می‌شود). می‌بینید که عمل محاسبهٔ د ک و د ی در مقسوم علیه و خارج قسمت، از چپ به راست پیش می‌رود. در این مرحله، رقم ۳ خارج قسمت ۳۲٤۲ به کار نرفت. چنانکه در زیر خواهیم دید، این حرکت از چپ به راست ادامه می‌یابد.

۲. با گذشتن از «مرز» اولین جنبه از دو جنبهٔ خاص باقیمانده مطرح می‌شود. از اینجا تا پایان کار، دیگر محاسبهٔ د ک نخواهیم داشت. به جای این کار، صرفاً مقسوم فرعی جدید را به بالا منتقل می‌کنیم تا بخشی از عدد عمل جدید را تشکیل دهد.

د ی
د ی
ی

۱ ۳ ۶ ۷ ۱ / ۵ ۱ ۴ ÷ ۴ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲ ۴ ۲

۱۶ ۲۷ ۲۱ ۱۵ ۱۱

۱۳ ۱۰ ۱۸ ۹ ۱

۳. سرانجام، به دومین جنبهٔ خاص باقیمانده می‌رسیم: در هر تفریق رو به پایین جدید، یکی از رقمهای خارج قسمت با شروع از سمت چپ، از کار کنار گذاشته می‌شود. توجه کنید که با این حرکت از چپ به راست، در هر مرحله، یک محاسبهٔ **د ی** حذف می‌شود. نمودار بالا را با نموداری که در زیر می‌بینید، مقایسه کنید.

د ی

ی

۱۳ ۶ ۷ ۱/۵ ۱ ۴ ÷ ۴ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲ ۴ ۲

۱۶ ۲۷ ۲۱ ۱۵ ۱۱

—دی(۱۱) دی = ۱۷ × ۲؛ ۷×۴

۰۲ ۱۴ ۲۸

۱۳ ۱۰ ۱۸ ۹ ۱ ۰ دی = ۰۳ + ۰۸ = ۱۱

چون دیگر تفریق **د ک** صورت نمی‌گیرد، عدد مقسوم فرعی را چنانکه در مرحلهٔ ۲ در بالا عمل شد، به بالا منتقل می کنیم. سپس چنانکه در مرحلهٔ ۳ دیدیم، رقم بعدی از طرف چپ را در خارج قسمت، از عمل کنار می گذاریم. این آخرین مرحلهٔ جواب است و چنانکه انتظار می‌رود، در پایان کار، رقم یکان (رقم سمت راست) مقسوم علیه را در رقم یکان خارج قسمت ضرب می کنیم. به این ترتیب حرکت از چپ به راست را ادامه داده‌ایم و اکنون، هم در مقسوم علیه و هم در خارج قسمت به «آخر خط» رسیده‌ایم:

ی

۱۳ ۶ ۷ ۱/۵ ۱ ۴ ÷ ۴ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲ ۴ ۲

۱۶ ۲۷ ۲۱ ۱۵ ۱۱ ۰۴ ی = ۷ × ۲

-ی(۰۴) ۱۴

۱۳ ۱۰ ۱۸ ۹ ۱ ۰ ۰ ی = ۰۴

آخرین عدد پیدا شده در محاسبه، باقیمانده است. در این مثال آخرین عدد، صفر است. پس تقسیم کامل است و باقیمانده‌ای ندارد.

این همه توضیحی که تا کنون برای تعیین دقیق یکایک رقمها در هر مرحله دادیم، ممکن است این روش تقسیم را دشوار جلوه گر سازد. اما واقعیت چنین نیست. چون هر قسمت کوچکی از کار را برای درک بهتر، تکرار کرده‌ایم، ظاهر عمل پیچیده به نظر می‌رسد. عملاً پس از درک کامل این روش، محاسبه سریع انجام می گیرد و واقعاً آسان خواهد بود.

تنها دشواری واقعی، آن است که همواره نیز وجود دارد: لزوم دقت به خرج دادن در عمل. خطاهای ناشی از بی‌دقتی، خطری برای هر نوع محاسبه به شمار می آید. در عمل تقسیم به روش تراختنبرگ، باید مراقب باشیم که حاصل ضربهای جفتهای د ی درست را پیدا کنیم. بد نیست در اینجا سه دستوری را که در چند صفحهٔ اخیر بیان شد تکرار کنیم. این دستورها نشان می‌دهند که چگونه رقمهای جواب را که برای تعیین حاصل ضربهای جفتهای د ک و د ی به کار می‌روند، مشخص کنیم.

۱. در هر مرحله، رقم جدید جواب را در دو رقم اول مقسوم علیه (مثلاً ٤۲ از عدد ٤۲۱۷) به طریقهٔ د ک ضرب می کنیم.

۲. همان رقم جدید جواب را به طریقهٔ د ی در دومین و سومین رقم مقسوم علیه (مثلاً ۲۱ در عدد ٤۲۱۷) ضرب می کنیم.

۳. سپس به سمت داخل پیش می‌رویم و سایر جفتهای د ی از مقسوم علیه را در رقمهای «قبلی» جواب ضرب می کنیم (چنانکه در ٤۲۱۷، دوبار به سمت داخل می‌رویم، اول به جفت ۱۷ و سپس به جفت د ی ناقص ۷ می‌رسیم).

شاید نمودارهای زیر که در آنها تنها مقسوم علیه و خارج قسمت مسئلهٔ اخیر ثبت شده، برای درک رابطهٔ جفتهای د ک و د ی با هر رقم جدید از جواب که یافته شده (مراحل ۱ تا ٤) و تعیین باقیمانده (مراحل ۵ تا ۷) مفید واقع شود.

۱. دک
دی
۴ ۲ ۱ ۷ = ۳

۲. دک
دی
دی
۴ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲

۳. دک
دی
دی
ی
۴ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲ ۴

۴. دک
دی
دی
ی
۴ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲ ۴ ۲

۵. دی
دی
ی
۴ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲ ۴ ۲

۶. د ی

ی

۴ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲ ۴ ۲

۷. ی

۴ ۲ ۱ ۷ = ۳ ۲ ۴ ۲

ضمن کار با چند حاصل ضرب **د ی** باید مراقب بود. برای کاستن از خطر اشتباه و صرفه‌جویی در کار ذهنی، چنین عمل کنید: به محض یافتن هر حاصل ضرب **د ی** جدید، فوراً آن را از عدد عمل تفریق کنید و باقیماندهٔ تفریق را به عنوان عدد عمل جدید که حاصل ضرب **د ی** بعدی از آن تفریق می‌شود به کار برید.

امتحان عمل تقسیم

تا اینجا دو روش تازه برای عمل تقسیم یاد گرفتیم، یکی روش «ساده» و دیگری روش «سریع». روش ساده کم و بیش «امتحان سر خود» است، ولی بخشی از آن جای یک امتحان نهایی دارد. روش سریع فقط تا حدی «امتحان سر خود» است. در این مورد روشی منظم و اصولی برای امتحان کردن جواب و باقیمانده، بخصوص برای باقیمانده، لازم داریم. احتمالاً، از بین روشهای گوناگون ممکن برای انجام امتحان، روشی که در زیر می‌آید، از همه طبیعی‌تر و راحت‌تر است. صورت دیگری از آن نیز در پایان این بخش آورده شده و هر کس می‌تواند بنا به میل خود تغییرات کوچکی در آن وارد کند، اما دستور کار توصیه شده شامل مراحل کلی زیر است:

۱. باقیمانده را از مقسوم تفریق می کنیم. مثلاً در یکی از مثالها، ۲۲۹۶ را بر ۶۲ تقسیم کردیم و جواب ۳۷، با باقیماندهٔ ۲ به دست آمد. حالا این ۲ را از ۲۲۹۶ تفریق می کنیم. نتیجه، یعنی ۲۲۹۴ مقسوم تقلیل یافته‌ای است که اگر بر عدد ۶۲ این مثال تقسیم شود، باقیمانده نخواهد داشت.

۲. مجموع ارقام این مقسوم تقلیل یافته را مانند قبل با جمع کردن رقمهایش پیدا می کنیم. در این مثال، با عدد ۲۲۹۴ داریم ۲ بعلاوهٔ ۲ بعلاوهٔ ۹ بعلاوهٔ ۴ می‌شود ۱۷. ارقام این مجموع را با هم جمع می کنیم تا عددی یک رقمی به دست آید: ۱ بعلاوهٔ ۷ می‌شود ۸. مجموع ارقام ۸ است. همیشه مجموع ارقام را به همین شیوه به عدد یک رقمی تبدیل می کنیم.

۳. اکنون مجموع ارقام مقسوم‌علیه را، که در این مثال ۶۲ است، و مجموع ارقام جواب را که ۳۷ است پیدا می کنیم. سپس این دو مجموع ارقام را در یکدیگر ضرب می کنیم. به ازای ۶۲ مجموع ارقام ۸ و به ازای ۳۷ مجموع ارقام ۱۰ را که به ۱ تبدیل می‌شود، داریم. سپس این دو را در یکدیگر ضرب می کنیم. ۱ ضرب در ۸ می‌شود ۸ (در صورت لزوم، این حاصل ضرب باید به عدد یک رقمی تبدیل شود، اما اینجا ۸ خودش یک رقمی هست).

۴. این حاصل ضرب دو مجموع ارقام را که هم اکنون برابر با ۸ یافتیم، با مجموع ارقام مقسوم تقلیل یافته در بند ۲ مقایسه می کنیم. آن نیز ۸ بود. پس ۸ با ۸ برابر است و نتیجه امتحان مثبت در می آید. جواب و باقیمانده هر دو درست‌اند.

در یکی از مثالهای قبلی، تقسیم بدون باقیمانده در آمد؛ ۱۹۰۴ تقسیم بر ۳۴. این تقسیم را در زیر نوشته‌ایم و میزانها را هم داخل پرانتز آورده‌ایم:

(۵)　　　(۷)　　　(~~۱۱~~) (۲)

۱۹۰۴ ÷ ۳۴ = ۵۶

امتحان: ۷ ضرب در ۲ می‌شود ۱٤، و ۱ بعلاوهٔ ٤ می‌شود ۵. این ۵ را با مجموع ارقام ۱۹۰٤ مقایسه می کنیم. آن هم ۵ است. پس جواب امتحان مثبت است.

این کار بر چه اساسی انجام می‌شود؟ در واقع در اینجا عمل معکوس، یعنی ضرب امتحان می‌شود. چنانکه دیدیم، ۱۹۰٤ تقسیم بر ۳٤ می‌شود ۵٦. بر عکس، می‌توانیم بگوییم که ۳٤ ضرب در ۵٦ می‌شود ۱۹۰٤. این حرف هم به همان معناست منتها در قالب ضرب.

عددها: ۳۴ × ۵۶ = ۱۹۰۴

مجموع ارقام: ۷ × ۲

امتحان ۷ × ۲ = ۱۴، (۱ + ۴) = ۵

وقتی باقیمانده داریم، قبل از امتحان کردن عمل باید فکری برای آن بکنیم. این کار با تفریق کردن آن از مقسوم انجام می‌شود:

مجموعهای ارقام: (۷، پایین را ببینید) (۲) (۸)

عددها: ۶۳۱۲۳۲۵۷ ÷ ۹۸۳ = ۶۴۲۱۴

۸۹۵ باقیمانده

۶۳۱۲۳۲۵۷ −

۸۹۵

۶۳۱۲۲۳۶۲ مجموع ارقام = ۷

۷ ⟵⟶ ۲ × ۸ = ۱۶

۷ ⟵⟶ ۱۶

صورت دیگری که پیشتر بدان اشاره کردیم، جنبهٔ اختیاری دارد. با این حال، استفاده از آن موجب آسانی کار می‌شود زیرا عمل تفریق بالا، سمت راست را، که در آن ۸۹۵ را کم کردیم، حذف می کند. صورت مذکور چنین است:

۱. باقیمانده را از مقسوم، مثلاً ۸۹۵ را از ۶۳۱۲۳۲۵۷، تفریق نمی کنیم.
۲. به جای این کار، مجموع ارقام باقیمانده را می‌یابیم و آن را از مجموع ارقام مقسوم تفریق می کنیم (در صورت لزوم با ۹ جمع می کنیم تا تفریق امکانپذیر شود). در مثال اخیر، به ازای باقیماندهٔ ۸۹۵، داریم ۸ بعلاوهٔ ۵ می‌شود ۱۳، و ۱ بعلاوهٔ ۳ می‌شود ۴. مجموع ارقام مقسوم می‌شود ۶ بعلاوهٔ ۳ بعلاوهٔ ۱ بعلاوهٔ ۲ بعلاوهٔ ۳ بعلاوهٔ ۲ بعلاوهٔ ۵ بعلاوهٔ ۷ که می‌شود ۲۰، که داریم ۲ بعلاوهٔ ۰ می‌شود ۲. اکنون باید ۴ (باقیمانده) را از ۲ (مقسوم) تفریق کنیم. چون این ۲ از حد مناسب کوچکتر است، آن را با ۹ جمع می کنیم، می‌شود ۱۱. به یاد داریم که در مجموعهای ارقام، نُه‌ها به شمار نمی‌آیند. در این مورد همانند صفرند. پس ۴ را از ۱۱ تفریق می کنیم، حاصل می‌شود ۷.
۳. مثل گذشته، عددی برای مقایسه با ۷ به دست می آوریم. مجموع ارقام جواب را، که ۸ است، در مجموع ارقام مقسوم علیه، که ۲ است، ضرب می کنیم، نتیجه ۱۶ می‌شود. سپس ۱ بعلاوهٔ ۶ می‌شود ۷.
۴. دو عددی را که در بندهای ۲ و ۳ پیدا کرده‌ایم، مقایسه می کنیم: ۷ با ۷ برابر است، پس نتیجهٔ امتحان مثبت.

تمرینهای زیر را حل کنید:

۱. ۵۶۷۸÷۴۱
۲. ۴۸۷۱÷۷۴
۳. ۷۰۰۰۰÷۵۲
۴. ۷۳۸۹÷۸۲
۵. ۹۰۳۶÷۳۶
۶. ۳۶۸۶۵÷۷۳
۷. ۲۲۶۴۴÷۵۱
۸. ۲۸۲۰۸÷۸۲
۹. ۱۴۸۴۷÷۴۹
۱۰. ۱۱۵۵۶÷۳۶
۱۱. ۱۸۶۰۶÷۳۱
۱۲. ۴۳۲۷۱÷۷۲
۱۳. ۸۱۰۳۵÷۹۵
۱۴. ۶۳۰۰۰÷۷۲

۱۵. ٤٨٣٩÷٦٤

۱۶. ٢٠١٤÷٥٦

۱۷. ٥٦٧٣÷٧٢

۱۸. ٥٣٢٩÷٩٥

۱۹. ٤٧٦٨÷٩٢

۲۰. ٥٤٠١÷٦٧

۲۱. ٢٠٠١÷٤٥

۲۲. ٧٣٠٢÷٨٦

۲۳. ٩٣٤٥÷٩٩

۲٤. ٨٥٣٦٧÷٢٦

۲۵. ٤٧٩٥٣٥÷٦٣

۲۶. ٢٣٦٨٣١÷٦٧٤

۲۷. ٥٤٣٧٦٥÷٨٢٣

۲۸. ٢٣٤٨٧٦÷٦٣٢

۲۹. ٢٠٤٣٥٦÷٩١٣

۳۰. ٧٤٣٥٦٧÷٢٥٦

۳۱. ٤٥٣٦٧٥٤÷٥٤٣

۳۲. ٢٧٤٨٣٦٢٤÷٦٢١١

۳۳. ٦٣١٢٣٢٥٧÷٩٨٣٢

:جوابها

د ک
ی

۱. ۵ ۶ ۷ ۸ ÷ ۴ ۱ = ۱ ۳ ۸
۱۶ ۳۷ ۲۸
۵ ۱۵ ۳۴ (۲۰)

د ک
ی

۲. ۴ ۸ ۷ ۱ ÷ ۷ ۴ = ۶ ۵
۴۷ ۶۱
۴۸ ۴۳ (۶۱)

د ک

ی

۳. ۷ ۰ ۰ ۰ ۰ ÷ ۵ ۲ = ۱ ۳ ۴ ۶

۲۰ ۳۰ ۴۰ ۱۰

۷ ۱۸ ۲۴ ۳۲ (۸)

۴. ۷ ۳ ۸ ۹ ÷ ۸ ۲ = ۹ ۰

۰۸ ۰۹

۷۳ ۰ (۹)

۵. ۹ ۰ ۳ ۶ ÷ ۳ ۶ = ۲ ۵ ۱

۲۰ ۰۳ ۰۶

۹ ۱۸ ۳ (۰)

۶. ۳ ۶ ۸ ۶ ۵ ÷ ۷ ۳ = ۵ ۰ ۵

۰۸ ۳۶ ۰۵

۳۶ ۳ ۳۶ (۰)

۷. ۲ ۲ ۶ ۴ ۴ ÷ ۵ ۱ = ۴ ۴ ۴

۲۶ ۲۴ ۰۴

۲۲ ۲۲ ۲۰ (۰)

۸. ۲ ۸ ۲ ۰ ۸ ÷ ۸ ۲ = ۳ ۴ ۴

۴۲ ۴۰ ۰۸

۲۸ ۳۶ ۳۲ (۰)

ک دی

۹. ۱ ۴ ۸ ۴ ۷ ÷ ۴ ۹ = ۳ ۰ ۳

۰۸ ۱۴ ۰۷

۱۴ ۱ ۱۴ (۰)

۱۰. ۱ ۱ ۵ ۵ ۶ ÷ ۳ ۶ = ۳ ۲ ۱

۱۵ ۰۵ ۰۶

۱۱ ۷ ۳ (۰)

۱۱. ۱ ۸ ۶ ۰ ۶ ÷ ۳ ۱ = ۶ ۰ ۰

۰۶ ۰۰ ۰۶

۱۸ ۰ ۰ (۶)

۱۲. ۴ ۳ ۲ ۷ ۱ ÷ ۷ ۲ = ۶ ۰ ۰

۰۲ ۰۷ ۷۱

۴۳ ۰ ۷ (۷۱)

۱۳. ۸ ۱ ۰ ۳ ۵ ÷ ۹ ۵ = ۸ ۵ ۳

۵۰ ۳۳ ۰۵

۸۱ ۵۰ ۲۸ (۰)

۱۴. ۶ ۳ ۰ ۰ ۰ ÷ ۷ ۲ = ۸ ۷ ۵

۶۰ ۴۰ ۰۰

۶۳ ۵۴ ۳۶ (۰)

۱۵. ۴ ۸ ۳ ۹ ÷ ۶ ۴ = ۷ ۵

۴۳ ۳۹

۴۸ ۳۵ (۳۹)

د ک

ی

۱۶. ۲ ۰ ۱ ۴ ÷ ۵ ۶ = ۳ ۵

۴۱ ۵۴

۲۰ ۳۳(۵۴)

۱۷. ۵ ۶ ۷ ۳ ÷ ۷ ۲ = ۷ ۸

۶۷ ۶۳

۵۶ ۶۳(۵۷)

۱۸. ۵ ۳ ۲ ۹ ÷ ۹ ۵ = ۵ ۶

۶۲ ۰۹

۵۳ ۵۷ (۹)

۱۹. ۴ ۷ ۶ ۸ ÷ ۹ ۲ = ۵ ۱

۱۶ ۷۸

۴۷ ۱۶(۷۶)

۲۰. ۵ ۴ ۰ ۱ ÷ ۶ ۷ = ۸ ۰

۱۰ ۴۱

۵۴ ۴(۴۱)

۲۱. ۲ ۰ ۰ ۱ ÷ ۴ ۵ = ۴ ۴

۲۰ ۲۱

۲۰ ۲۰(۲۱)

۲۲. ۷ ۳ ۰ ۲ ÷ ۸ ۶ = ۸ ۴

۵۰ ۸۲

۷۳ ۴۲(۷۸)

د ک

ی

۲۳. ۹ ۳ ۴ ۵ ÷ ۹ ۹ = ۹ ۴

۴۴ ۴۵

۹۳ ۴۳(۳۹)

۲۴. ۸ ۵ ۳ ۶ ۷ ÷ ۲۶ = ۳ ۲ ۸ ۳

۱۵ ۲۳ ۱۶ ۱۷

۸ ۷ ۲۱ ۸ (۹)

۲۵. ۴ ۷ ۹ ۵ ۳ ۵ ÷ ۶ ۳ = ۷ ۶ ۱ ۱

۳۹ ۱۵ ۱۳ ۴۵

۴۷ ۳۸ ۷ ۱۰ (۴۲)

د ک

د ی

ی

۲۶. ۲ ۳ ۶ ۸ ۳ ۱ ÷ ۶ ۷ ۴ = ۳ ۵ ۱

۳۶ ۱۸ ۳۳ ۲۶۱

۲۳ ۳۴ ۹ ۲۶ (۲۵۷)

۲۷. ۵ ۴ ۳ ۷ ۶ ۵ ÷ ۸ ۲ ۳ = ۶ ۶ ۰

۵۳ ۱۷ ۶۶ ۵۸۵

۵۴ ۵۰ ۶ ۵۸ (۲۵۸)

۲۸. ۲ ۳ ۴ ۸ ۷ ۶ ÷ ۶ ۳ ۲ = ۳ ۷ ۱

۵۳ ۱۸ ۴۷ ۴۰۶

۲۳ ۴۵ ۱۰ ۴۰ (۴۰۴)

د گ

د ی

ی

۲۹ ۲ ۰ ۴ ۳ ۵ ۶ ÷ ۹ ۱ ۳ = ۲ ۲ ۴

۲۴ ۴۳ ۸۵ ۷۶۶

۲۰ ۲۲ ۳۵ ۷۶ (۷۵۷)

۳۰. ۷ ۴ ۳ ۵ ۶ ۷ ÷ ۲ ۵ ۶ = ۲ ۹ ۰ ۴

۲۴ ۱۳ ۱۵ ۱۶ ۱۴۷

۷ ۲۳ ۱ ۱۱ ۱۴ (۱۴۳)

۳۱. ۴ ۵ ۳ ۶ ۷ ۵ ۴ ÷ ۵ ۴ ۳ = ۸ ۳ ۵ ۴

۲۳ ۳۶ ۳۷ ۶۵ ۵۳۴

۴۵ ۱۹ ۳۰ ۲۷ ۵۳ (۵۳۲)

د گ

د ی

د ی

ی

۳۲. ۲ ۷ ۴ ۸ ۳/۶ ۲ ۴ ÷ ۶ ۲ ۱ ۱ = ۴ ۴ ۲ ۴

۳۴ ۲۸ ۴۴ ۷۶ ۶۲۲ ۶۱۶۴

۲۷ ۲۶ ۱۶ ۳۱ ۶۲۶۱۶ (۶۱۶۰)

۳۳. ۶ ۳ ۱ ۲ ۳/۲ ۵ ۷ ÷ ۹ ۸ ۳ ۲ = ۶ ۴ ۲ ۰

۵۱ ۳۲ ۱۳ ۳۲ ۱۸۵ ۱۸۱۷

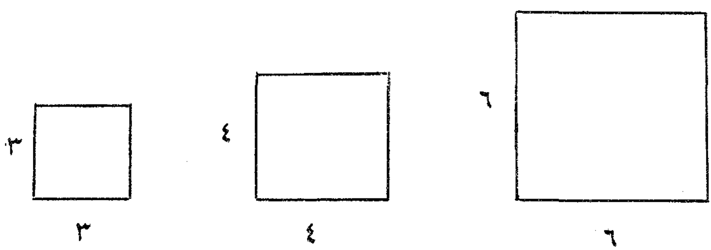
۶۳ ۴۲ ۲۰ ۳ ۱۸ ۱۸۱ (۱۸۱۷)

فصل ششم

جذر و مجذور

مقدمه

در شکل زیر سه مزرعه دیده می‌شود که در زمینِ هموارى قرار گرفته‌اند، زیرا طول و عرض هر کدام چندین کیلومتر است. این مزرعه‌ها به شکل مربع کاملند زیرا خیالی هستند و می‌توانیم آنها را به هر شکلی اختیار کنیم:



مساحت این مزرعه‌ها چقدر است؟ اولی ۹ کیلومتر مربع مساحت دارد. زیرا هر ضلع آن ۳ کیلومتر است و ۳ ضرب در ۳ می‌شود ۹. به همین ترتیب، مساحت دومی ۱۶ کیلومتر مربع و مساحت سومی ۳۶ کیلومتر مربع است.

توجه کنید که در اینجا با عملی از حساب سرو کار داریم. در هر مورد، عددی را در خودش ضرب کرده‌ایم. به این عمل «مجذور کردن» عدد می گویند. با مجذور کردن ۳، عدد ۹ به دست می آید. این عمل ریاضی در مسئله‌های گوناگونی مطرح می‌شود. ساده‌ترین و معمولترین مورد مطرح شدن آن، موضوع یافتن مساحت مربع است که در بالا به آن اشاره کردیم. بدین سبب به طور عادی به این کار، مربع کردن عدد هم می گویند و نتیجهٔ این کار را مربع عدد نیز می‌خوانند. مثلاً:

مجذور یا مربع عدد	عدد
۱	۱
٤	۲
۹	۳
۱٦	٤
......	......
۲۲۵	۱۵
......	......
۱۰۰۰۰	۱۰۰

پس می بینیم که مجذور کردن نوعی «عمل» ریاضی است. وقتی عددی را به عدد دیگر تبدیل می کنیم می گوییم روی آن عمل کرده‌ایم. مثالهای سادهٔ فراوانی هست که همه با آنها آشنا هستند، مثلاً دو برابر کردن. عدد ۱۲ را دو برابر می کنیم می‌شود ۲٤. شاید ساده‌ترین عمل، عملی باشد که با این دستور بیان می‌شود: «یکی زیاد کنید». اگر این عمل را روی ۱۲ انجام دهیم، می‌شود ۱۳، و الی آخر. در هر مورد کار را با عدد خاصی که مورد نظر است شروع می کنیم و در پایان عدد دیگری را می‌یابیم. از یک عدد به عدد دیگر می‌رسیم.

فرض کنید نتیجهٔ عمل دو برابر کردن، مثلاً همین عدد ۲٤ بالا را اختیار می کنیم و عمل جدید «نصف کردن» را روی آن انجام می دهیم.

نصف ۲٤ را می گیریم و دوباره به همان ۱۲ اولیه می‌رسیم. دو برابر کردن و نصف کردن به این معنی، عملهای مخالف یکدیگر به شمار می آیند. می گوییم نصف کردن، «وارون» عمل دو برابر کردن است. وارون عمل «یکی زیاد کردن» چیست؟ مسلماً «یکی کم کردن». اگر این عمل را روی عدد ۱۳ که در بند قبل داشتیم، انجام دهیم دوباره به همان ۱۲ می‌رسیم.

عمل مجذور کردن هم وارون دارد. نام این وارون «جذر گرفتن» است. اگر بخواهیم جذر گرفتن را به صورت مسئله بیان کنیم، باید بگوییم «آن کدام عدد است که چون در خودش ضرب شود، عدد مفروض به دست می آید»؟ چند مثال:

جذر عدد	عدد
۱	۱
۲	٤
۳	۹
......	......
۱۵	۲۲۵
......	......
۱۰۰	۱۰۰۰۰

در این فصل به هر دو عمل مجذور کردن و جذر گرفتن خواهیم پرداخت. مجذور کردن آسانتر است، از این رو اول آن را بیان می کنیم. ضمناً این کار در حکم آشنایی با عمل جذرگیری هم خواهد بود که به همان آسانی نیست ولی ارزش عملی بیشتری دارد. چنانکه خواهیم دید، مجذور کردن ــ ضرب عدد در خودش ــ خیلی شبیه روش ضرب سریع است که قبلاً آن را بررسی کرده‌ایم. در واقع این کار نوع خاصی از ضرب است. جذر گرفتن هم بیشتر به تقسیم شباهت دارد.

مجذور کردن

عددهای دو رقمی

پیدا کردن مجذور عددهای دو رقمی، مثل ۷۳، راحت است. این کار حتی به روش ضرب عادی هم زحمتی ندارد. می‌توانیم بگوییم ۷۳ ضرب در ۷۳ و روش ضرب سریع را که در یکی از فصلهای گذشته بیان شد به کار ببندیم:

۰ ۰ ۷ ۳ × ۷ ۳
۵ ۳ ۲ ۹

اما اکنون روش سریعتر و راحت‌تری برای یافتن این نتیجه را شرح می‌دهیم. با وجود آسانی این روش، می‌توانیم آن را در سه مرحله بیان کنیم، زیرا دو مرحلهٔ اول به نوبهٔ خود نکات جالبی هستند. این دو مرحلهٔ اول، دو نوع خاص از اعداد هستند به قرار زیر:

اعداد خاص نوع ۱: اینها عددهایی‌اند که به ۵ ختم می‌شوند، مثل ۳۵ و ۶۵. مجذور این گونه اعداد را فوراً می‌توان نوشت:

۱. دو رقم آخر مجذور، ۲۵ است. این گفته در مورد هر عددی از این نوع صادق است. مجذور ۳۵ عملاً ۱۲۲۵ در می‌آید. برای نوشتن مجذور آن، ابتدا ۲۵ را می‌نویسیم و جلویش جای خالی باقی می‌گذاریم: مجذور ۳۵، عدد ۲۵ - - می‌شود.

۲. برای یافتن دو رقمی که جلوی این ۲۵ قرار می‌گیرند، اولین رقم عدد مفروض را در رقم یکی بزرگترش ضرب می‌کنیم. در مورد ۳۵، اولین رقم ۳ است، پس ۳ را در ۴ ضرب می‌کنیم. حاصل ۱۲ می‌شود. این ۱۲ را جلوی ۲۵ می‌نویسیم. جواب ۱۲۲۵ در می‌آید.

در مورد ۶۵، می‌توانیم آن را به صورت زیر در نظر بگیریم:

۶ ۵

(۶×۷)

جواب : ۴ ۲ ۲ ۵

اعداد خاص نوع ۲: اینها اعدادیند که رقم دهگانشان ۵ است، مثل ۵۶. مجذور چنین اعدادی را هم فوراً می‌نویسیم:

۱. دو رقم آخر جواب، مجذور آخرین رقم عدد مفروض‌اند. در مورد ۵۶ داریم ۳۶ - -، زیرا ۶ ضرب در ۶ می‌شود ۳۶.

۲. دو رقم اول جواب عبارتند از ۲۵ بعلاوهٔ آخرین رقم عدد مفروض. در مورد ۵۶، داریم ۲۵ بعلاوهٔ ۶ که می‌شود ۳۱. این ۳۱ جلوی ۳۶ قرار می گیرد بنابراین جواب ۳۱۳۶ در می آید.

اگر آخرین رقم عدد مفروض کوچک باشد، مثل آنچه در ۵۱ داریم، باز هم آن را مجذور می کنیم: ۱ ضرب در ۱ می‌شود ۱. اما چون این حاصل باید دو رقم آخر جواب را تشکیل دهد، ۱ را به صورت ۰۱ می‌نویسیم:

۵ ۱

(۲۵+۱)

۲ ۶ ۰ ۱

جواب ۲۶۰۱ است. جواب باید چهار رقمی در آید و به این ترتیب آن را به دست می آوریم.

شاید توجه کرده باشید که در اینجا می‌توانستیم، در صورت تمایل جواب را از چپ به راست بنویسیم. در این حالتهای خاص هیچ گاه «ده بر یک» (یا بیست بر دو، و غیره) نخواهیم داشت. در مورد اعداد دیگر

همیشه وضع چنین نیست، اما در این نوع خاص از اعداد، رقمی به مرتبهٔ بالاتر نقل نمی‌شود.

حالا به سراغ اعداد دو رقمی در حالت کلی می‌رویم که به هیچ نوع خاصی محدود نشده‌اند. با این حال هنوز می‌توانیم از دو جنبهٔ انواع خاص استفاده کنیم:

۱. برای یافتن دو رقم آخر جواب، همچنان رقم آخر عدد مفروض را مجذور می کنیم (مثل یافتن ۲۵ -- برای ۳۵).

۲. برای پیدا کردن دو رقم اول جواب، همچنان باید مجذور رقم اول عدد مفروض را پیدا کنیم (مثل ۲۵ بعلاوهٔ ۱ برای ۵۱).

سایر جنبه‌های اعداد خاص در اینجا به کار نخواهند آمد. در عوض، نکتهٔ تازه‌ای مطرح می‌شود. عدد دیگری به میان می آید:

۳. اکنون از «حاصل ضرب متوالی» استفاده می کنیم. این حاصل ضرب از ضرب کردن دو رقم عدد مفروض در یکدیگر به دست می آید. هنگام مجذور کردن ۳۴، حاصل ضرب متوالی ۱۲ است، زیرا ۳ ضرب در ۴ می‌شود ۱۲. حالا ببنیم از این عدد تازه چطور استفاده می‌شود. مجذور ۳۲ چقدر است؟

مرحلهٔ اول: مجذور ۳۲ را به این صورت می‌نویسیم: $۳۲^{۲}$. رقم ۲ ی کوچکی که در بالا نوشته شده، یعنی دو تا ۳۲ داریم که در یکدیگر ضرب می‌شوند (همچنانکه می‌توانیم ۳۲ ضرب در ۳۲ ضرب در ۳۲ را به صورت $۳۲^{۳}$ نشان دهیم، زیرا سه ۳۲ در هم ضرب می‌شوند). رقم سمت راست را مجذور می کنیم:

$$\frac{۳\;۲^{\;۲}}{\quad\;۴}$$

زیرا ۲ ضرب در ۲ می‌شود ٤

مرحلهٔ دوم: دو رقم عدد مفروض را در هم ضرب و حاصل را دو برابر می کنیم: ۳ ضرب در ۲ می‌شود ٦، دو برابرش می‌شود ۱۲:

۳ ۲ ۲

۰۲ ۴

این ۱۲ را به صورت ۲ می‌نویسیم و نقطه‌ای به نشانهٔ ده بر یک کنارش می گذاریم. مجذور کردن خیلی شبیه ضرب است.

مرحلهٔ آخر: رقم سمت چپ عدد مفروض را مجذور می کنیم:

۳ ۲ ۲

۴ ضرب در ۳ بعلاوهٔ ده بر یک، می‌شود ۱۵ — ۱ ۵ ۰۲ ۴ : جواب

مجذور ۸٤ چقدر است؟

مرحلهٔ ۱:

۸ ۴ ۲

۴ ضرب در ۴ می‌شود ۱۶ — ۰۶

مرحلهٔ ۲:

۸ ۴ ۲

۸ ضرب در ۴ می‌شود ۳۲، دوبرابرش
می‌شود ٦٤، بعلاوهٔ ده بر یك می‌شود ٦٥ — ۶۵ ۶

مرحلهٔ ۳:

۸ ۴ ۲

مجذور ۸ می‌شود ٦۴، بعلاوهٔ
٦ نقل شده، می‌شود ۷۰ — ۷ ۰ ۵ ۶

بد نیست برای سرگرمی، تمام این کارها را در ذهن خود انجام دهیم. سراسر عمل را به طریقهٔ کاملاً ذهنی، بدون روی کاغذ آوردن محاسبات، حتی بدون نوشتن جواب، می‌توانیم انجام دهیم. کافی است قدری تمرکز داشته باشیم. با نگاه کردن به عدد مفروض، مثلاً همان ۳۲ قبلی، سه عدد دو رقمی را در ذهن تجسم می کنیم:

۳ ۲
۰۹ ۱۲ ۰۴

طبق معمول، جلوی هر عدد یک رقمی مثل ۴، صفری می گذاریم تا آن را به صورت عددی دو رقمی در آوریم.

این اعداد دو رقمی ۰۹، ۱۲ و ۰۴ از کجا پیدا می‌شوند؟ مسلماً این ۹، حاصل ۳ ضرب در ۳، و ۴ هم حاصل ۲ ضرب در ۲ است. عدد ۱۲ هم دو برابر ۳ ضرب در ۲ است. سپس این سه عدد دو رقمی را در ذهن خود به هم پیوند می‌زنیم:

۰(۹   ۱) (۲   ۰)۴
جمع می کنیم   جمع می کنیم

رقمهای داخل پرانتز را با یکدیگر جمع می کنیم: ۹ بعلاوهٔ ۱ می‌شود ۱۰، (صفر با یک نقطه)؛ ۲ بعلاوهٔ صفر می‌شود ۲. به جای هر پرانتز، مجموع رقمهای داخل آن را می گذاریم:

۰(۹ ۱)(۲ ۰)۴
۰ ·۰ ۲ ۴   یعنی ۱۰۲۴

حتی پس از حل چند تمرین و مسلط شدن به این روش می‌توانیم بدون

زحمت چندانی، از چپ به راست عمل کنیم. هنگام رفتن از چپ به راست، گاه رقمی باید به مرتبهٔ بالاتر نقل شود (مثل ده بر یک)، همان طور که در مثال بالا ده بر یک داشتیم؛ در نتیجه، هنگام رفتن از چپ به راست باید برای هر رقمی که به مرتبهٔ بالاتر نقل می‌شود، تصحیحی انجام دهیم. انجام این کار هیچ دشواری ندارد، زیرا تنها همین سه عدد دو رقمی را داریم که با هم پیوند می‌خورند، و با قدری تمرین خواهیم توانست آنها را به طور همزمان در ذهن خود نگاه داریم. در نتیجه، وقتی مانند مثال بالا به ده بر یک می‌رسیم، می گوییم «۹» و بدون دردسر زیادی آن را به «۱۰» تغییر می‌دهیم.

شاید آسانترین راه، همان محاسبهٔ حاصل ضرب متوالی و دو برابر کردن آن در مرحلهٔ اول، و سپس مجذور کردن دو رقم عدد مفروض باشد. در مثال بالا، احتمالاً بهترین راه این است که به ۳۲ نگاه کنیم و بگوییم «۳ ضرب در ۲ می‌شود ۶، دو برابرش می‌شود ۱۲»، که عدد میانی است و بعد از این کار، بگوییم «مجذور ۳ می‌شود ۹؛ مجذور ۲ می‌شود ٤». با داشتن تمرکز کافی، عملاً لازم نخواهد بود این چیزها را حتی در ذهن بگوییم. شیوهٔ درست کار این است که به ۳ نگاه کنیم و دریابیم که یک ۹ در ذهنمان نقش می‌بندد. به همین طریق، دیدن ۲ عدد ٤ را به ذهن می آورد. اما حاصل ضرب متوالی در ذهن اغلب اشخاص شامل دو مرحلهٔ مجزاست؛ حاصل آن بلافاصله در ذهن حاضر نمی‌شود مگر بعد از تمرینهای زیاد. به همین علت به نظر می‌رسد بهتر باشد اول حاصل ضرب متوالی را حساب کنیم. البته در هر حال انتخاب این یا آن شیوه جنبهٔ اختیاری دارد.

خودتان یک نمونه را امتحان کنید. جواب بلافاصله داده شده، اما برای آزمایش خود می‌توانید یک بار به عدد نگاه کنید و سر خود را برگردانید و قبل از نگاه کردن به جواب، محاسبه را به طور ذهنی انجام دهید. مجذور ٤۳ می‌شود ۱۸٤۹ که آن را به طریقهٔ زیر پیدا می کنیم:

۴ ۴

۱۶ ۲۴ ۰۹

۱ ۸ ۴ ۹ — دو برابر ۳ ضرب در ٤ می‌شود ٢٤

چند صفحه جلوتر، روش خاصی برای مجذور کردن اعدادی نظیر ۳۵ بیان کردیم. در آنجا می گفتیم «۳ ضرب در ٤ می‌شود ۱۲، همراه با ۲۵ می‌شود ۱۲۲۵». علت استفاده از ٤ این بود که یکی بیشتر از ۳ است. حالا ممکن است این سؤال پیش بیاید که آیا روش حاضر بر اساس حاصل ضرب متوالی برای اعدادی نظیر ۳۵ هم صادق است؟ البته که هست. خودتان امتحان کنید: عدد ۳۵ را به طور ذهنی با استفاده از سه عدد دو رقمی و پیوند زدن آنها مجذور کنید. جواب عمل مجذور کردن ۳۵، عدد ۱۲۲۵ خواهد بود که به راه محاسبهٔ آن بستگی ندارد، و با روش فعلی به صورت زیر پیدا می‌شود:

۳ ۵

۰۹ ۳۰ ۲۵

۱۲ ۲۵

عددهای سه رقمی

فرض کنید می‌خواهیم مجذور ٤٦٢ را پیدا کنیم. روشی که برای اعداد دو رقمی ذکر شد، در اینجا هم قابل استفاده است:

۱. در اینجا هم می‌توانیم مجذور یکایک رقمها را به کار ببریم. حتماً به یاد دارید که در بخش قبل، برای مجذور کردن ۳۲، از یک ۹ (حاصل ۳ ضرب در ۳) و یک ٤ (حاصل ۲ ضرب در ۲) استفاده کردیم:

۳ ۲

۰۹ ۱۲ ۰۴

۱ ۰ ۲ ۴ — ۱۲، دو برابر ۳ ضرب در ۲ است

اکنون برای عدد سه رقمی ٤٦٢، از مجذور ٤ (یعنی ١٦)، مجذور ٦ (یعنی ٣٦)، و مجذور ٢ (یعنی ٤) استفاده می کنیم.

۲. در اینجا هم حاصل ضرب متوالی را به کار می‌بریم و باز هم آن را دو برابر می کنیم. در مجذور کردن ۳۲، چنانکه در بالا دیدیم، یک ۱۲ داشتیم که دو برابر حاصل ضرب متوالی ۳ در ۲ بود. اکنون برای عدد سه رقمی ٤٦٢ هم از حاصل ضربهای متوالی استفاده می کنیم، ولی در اینجا چند حاصل ضرب متوالی داریم. در واقع به همهٔ صورتهای ممکن جفتهایی از این سه رقم جدا می کنیم.

مرحلهٔ اول: موقتاً رقم ٤ را در ٤٦٢ نادیده می گیریم. فقط ٦٢ می ماند که عددی دو رقمی است. طرز مجذور کردن عددهای دو رقمی را می‌دانیم، پس به مجذور کردن این ٦٢ می پردازیم:

۴ ۶ ۲

---

۳۶ ۲۴ ۰۴

۳ ۸ ۴ ۴ : عددهای بالا را پیوند می‌زنیم

مرحلهٔ دوم: این مرحله تازگی دارد. در مورد اعداد دو رقمی چنین مرحله‌ای نداشتیم. یک «حاصل ضرب متوالی باز» با ضرب کردن اولین و آخرین رقم ٤٦٢ به دست می آوریم، یعنی ٤ و ٢ را در هم ضرب و حاصل را دو برابر می کنیم: ٤ ضرب در ٢ می‌شود ٨، و دو برابر ٨ می‌شود ١٦. این عدد را مستقیماً به دو رقم سمت چپ عدد عمل اخیر، به صورت زیر می‌افزاییم:

۴ ۶ ۲

~~۳~~ ~~۸~~ ۴ ۴

۵ ۴ ۴ ۴ ١٦ را می‌افزاییم: ۳۸ بعلاوهٔ ١٦ می‌شود ٥٤

توجه کنید که اینجا عددها را پیوند نزده‌ایم، بلکه یک عدد کلاً درون عدد دیگر وارد شده است.

آخرین مرحله: اکنون موقتاً رقم ۲ را در ٤٦۲ نادیده می گیریم و ٤٦ را مثل یک عدد دو رقمی معمولی مجذور می کنیم، با این تفاوت که مجذور ٦ را حذف می کنیم:

```
   ۴ ۶ ۲
___________
۱۶ ۴۸ ۵ ۴ ۴ ۴
۲ ۱  ۳ ۴ ۴ ۴
```

٦ را مجذور نمی‌کنیم! یعنی جواب ۲۱۳٤٤٤ است

چه منطقی در پشت این کارها نهفته است؟ اگر به استخوانبندی این روش دقیق شویم می‌بینیم که این کارها کاملاً طبیعی است. برای مجذور کردن ٤٦۲، نخست ٦۲ را مجذور کردیم. سپس رقم ۲ از ٤٦۲ را نادیده گرفتیم و به مجذور کردن ٤٦ پرداختیم.

چون ٦۲ «بخش آخر» ٤٦۲ است، با مجذور کردن آن بخش آخر یا سمت راست جواب پیدا می‌شود. چون ٤٦ «بخش اول» ٤٦۲ است، بخش اول یا سمت جواب از آن به دست می آید. ولی چون ٤٦ و ٦۲ بخش مشترکی دارند، در وسط جواب تداخلی خواهیم داشت. به بیان دقیقتر:

۱. عدد ٤٦۲ فقط یک رقم ٦ دارد. پس باید فقط یک بار ۳٦ (مجذور ٦) را به کار ببریم: در مجذور کردن ٤٦، عدد ۳٦ را دیگر وارد نمی کنیم، زیرا قبلاً هنگام مجذور کردن ٦۲ در نظر گرفته شده است.

۲. یک جملهٔ تازه داریم که در مجذور کردن ٤٦ یا ٦۲ مطرح نمی‌شود. این جمله «حاصل ضرب متوالی باز» است که از ضرب کردن اولین و

آخرین رقم ٤٦٢ در یکدیگر حاصل می‌شود. پس داریم ٤ ضرب در ۲ می‌شود ۸، و دو برابر این ۸، عدد ١٦ است. این ١٦ باید به وسط عدد افزوده شود، بنابراین ما هم آن را در سمت چپ مجذور ٦٢ افزودیم.

عملاً هنگام حل این گونه مسائل، توضیحات نوشته نمی‌شود و عمل فشرده‌تر صورت می‌گیرد. حاصل کار بیشتر به شکل زیر خواهد بود:

تنها رقمهایی را که زیرشان ۵ ۲ ۳

خط کشیده شده می‌نویسیم ۴۵ ۲۰ ۰۴

۰ ۶ ۲ ۵ : حاصل پیوند عددها

دو برابر حاصل ضرب رقمهای ۳ و ۵ ۳۰

۳ ۶ ۲ ۵

$۳۲^۲$ ۰۹ ۱۲ ۳ ۶ ۲ ۵

۱ ۰ ۵ ۶ ۲ ۵ : پیوند می‌زنیم

آیا به یاد دارید که در یکی از «دو نوع خاص» اعداد، که به ۵ ختم می‌شدند، یک ۲۵ داشتیم؟ اگر خود ۲۵ را می‌خواستیم مجذور کنیم می‌گفتیم ۲ ضرب در ۳ می‌شود ٦ (این ۳، عدد یکی بزرگتر از ۲ است)، و ۲۵ را به دنبالش می‌آوردیم: ٦۲۵. آیا اینجا هم می‌توانیم این کار را بکنیم؟ مسلماً. فقط باید یادمان باشد که اینجا چهار رقم لازم است، پس باید ٦۲۵ را به صورت ۰٦۲۵ بنویسیم:

۳ ۲ ۵

۰ ۶ ۲ ۵

دو برابر حاصل ضرب متوالی باز ۳ ۰

۳ ۶ ۲ ۵

۰۹ ۱۲ ۳ ۶ ۲ ۵

پیوند می‌زنیم : ۱ ۰ ۵ ۶ ۲ ۵

این تمرین را به طور ذهنی انجام دهید و غیر از جواب چیزی ننویسید. برای راحتی کار در اولین بار، عدد متقارنی را انتخاب کرده‌ایم:

۲ ۲ ۲

جواب چیست؟

حالا به جواب نگاه نکنید ـــ که در پایین نوشته شده است. پس از آنکه خودتان عمل کردید، می‌توانید جوابتان را با آن مقایسه کنید:

۲ ۲ ۲

۰۴ ۰۸ ۰۴

پیوند می‌زنیم : ۰ ۴ ۸ ۴

اکنون دو برابر حاصل ضرب متوالی ۲ در ۲ را اضافه می کنیم:

۲ ۲ ۲

~~۰~~ ~~۴~~ ۸ ۴

۱ ۲ ۸ ۴

۲ ۲ ۲

۰۴ ۰۸ ۱ ۲ ۸ ۴ ۲۲۲

پیوند می‌زنیم : ۴ ۹ ۲ ۸ ۴

مطالعهٔ این مبحث مربوط به مجذور کردن اعداد، موجب آمادگی برای درک روش جذر گرفتن که اکنون به آن خواهیم پرداخت می‌شود. اما این روش، تکرار هیچ یک از مطالبی که قبلاً داشته‌ایم نیست. چنانکه خواهیم دید، این روش کاملاً با روشهای دیگر فرق دارد.

جذر

عددهای سه رقمی و چهار رقمی

وقتی عدد مفروضی به ما داده می‌شود، می‌دانیم که جذر آن عدد کوچکتری است با این ویژگی: اگر عدد کوچکتر را در خودش ضرب کنیم، عدد مفروض به دست می‌آید. با داشتن ۱۴۴، جذر آن را ۱۲ می‌یابیم، زیرا ۱۲ ضرب در ۱۲ می‌شود ۱۴۴. معنی «جذر» هم همین است.

اگر عدد مفروض مثل ۱۴۴ سه رقمی باشد، یا مثل ۱۰۲۴ چهار رقمی باشد، جذر آن دو رقمی خواهد بود (جذر ۱۰۲۴ می‌شود ۳۲). به همین علت، عددهای سه رقمی و چهار رقمی را که هر دو جذرهای دو رقمی دارند یکجا در نظر می‌گیریم.

مثال اول: جذر ۶۲۵ را پیدا کنید. معمولاً این مقدار را با علامت زیر، که رادیکال نام دارد، نشان می‌دهند:

$$\sqrt{۶۲۵}$$

و آن را «جذر یا ریشهٔ دوم ۶۲۵» می‌خوانند.

مرحلهٔ اول: از سمت راست، دو تا از رقمها را جدا می‌کنیم:

$$۶/۲۵$$

و کار را با رقم یا رقمهای واقع در طرف چپ این خط مورب شروع می کنیم. در این مثال کار را با رقم ۶ آغاز می کنیم. این یک اصل کلی است: خواه عدد سه رقمی باشد، خواه چهار رقمی، همواره دو رقم از کنارهٔ راست آن جدا می کنیم و آنچه را در طرف چپ خط مورب قرار گرفته، به کار می‌بریم (در مورد ۱۰۲۴، کار با ۱۰ شروع می‌شود زیرا داریم ۱۰/۲۴).

مرحلهٔ دوم: با استفاده از جدول ضرب که به خاطر سپرده‌ایم، بزرگترین رقمی را پیدا می کنیم که مجذورش از عددی که در مرحلهٔ اول یافته‌ایم بزرگتر نباشد. برای ۶، چه رقمی پیدا می‌شود؟ رقم ۲؛ زیرا ۲ ضرب در ۲ می‌شود ۴، ولی ۳ ضرب در ۳ می‌شود ۹. رقم ۳ را نمی‌توانیم اختیار کنیم، زیرا ۹ بزرگتر از عدد ۶ است که داریم. پس اولین رقم جواب ۲ است:

$$\sqrt{۶\ ۲\ ۵} = ۲$$

مرحلهٔ سوم: اولین رقم جواب را مجذور و حاصل را از ۶ تفریق می کنیم:

$$\begin{array}{l} \sqrt{۶\ ۲\ ۵} = ۲ \\ \underline{۴} \\ ۲ \end{array}$$

مرحلهٔ چهارم: نصف عدد اخیر را می گیریم (نصف ۲ ی پایینی‌را)، و صفری به دنبال آن می گذاریم به طوری که به عدد ۱۰ برسیم. سپس این ۱۰ را بر اولین رقم جواب تقسیم می کنیم: ۱۰ تقسیم بر ۲ می‌شود ۵. این ۵، رقم دیگر جواب است:

$$\sqrt{۶\quad ۴\quad ۵} = ۲\quad ۵$$
$$\frac{۴}{۲}$$

اکنون دو رقم از جواب، یعنی ۲ و ۵، را داریم و می‌دانیم که جواب، عددی دو رقمی خواهد بود. آیا کار تمام است. نه، برای اینکه:

۱. باید درستی رقم آخر را که ۵ است بررسی کنیم. اینجا هم مثل آنچه در تقسیم پیش می آید، ممکن است رقمی از جواب از مقدار مناسب بزرگتر یا کوچکتر باشد. ممکن است لازم شود آنچه را نوشته‌ایم تصحیح کنیم. پس این ۵ که نوشته شده، هنوز رسمیت ندارد. در واقع این رقم فعلاً آزمایشی است و نهایی نیست.

۲. می خواهیم باقیمانده را هم پیدا کنیم. در اغلب موارد مثل آنچه در تقسیم دیدیم جواب «کامل در نمی آید» و باقیمانده‌ای وجود دارد. مقدار «باقیمانده» را که عبارت است از میزان زیادی عدد نسبت به عددی کوچکتر که بیش از همه به عدد مفروض نزدیک است و ضمناً جواب کامل (بدون باقیمانده) می‌دهد؛ می‌توانیم پیدا کنیم.

چون این وضع به تقسیم شباهت دارد، اگر دیدیم بقیهٔ محاسبه یادآور روش تقسیم فصل قبل است، تعجبی نخواهد داشت. در واقع این مرحله کاملاً شبیه آن بخش از تقسیم است که باقیمانده را تعیین می کردیم.

مرحلهٔ پنجم: جواب ۲۵ را که به دست آورده‌ایم ذر حالتی در نظر بگیرید که در عمل مجذور کردن نوشته می‌شود:

۲۰ دو برابر حاصل‌ضرب ۲ در ۵ است	$\dfrac{۲\quad ۵}{۰۴\quad ۲۰\quad ۲۵}$

جفت سمت چپ را که اینجا ۰٤ است حذف می کنیم. تنها ۲۰ و ۲۵ را لازم داریم. آنها را پیوند می‌زنیم:

۲۰ ۲۵
۲ ۲ ۵ صفر بعلاوهٔ ۲ می‌شود ۲

پس عمل جذرگیری را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\sqrt{۶\ \ ۲\ \ ۵} = ۲\ \ ۵$$
(۲ ۲ ۵) در نظرگرفته شده

اولین رقم این عدد در نظر گرفته شده، یعنی رقم ۲ را که زیرش خط کشیده شده، از عدد عمل (۲ ی پایینی) کم می کنیم:

$$\sqrt{۶\ \ ۲\ \ ۵} = ۲\ \ ۵$$
۴ ۰ (۲ ۲ ۵)
۲

مثل تقسیم، این پیکان یعنی تفریق‌کردن
رقم ۲که زیرش خط‌کشیده شده است

مرحلهٔ آخر: دو رقم آخر عدد مفروض را پایین می آوریم. با تفریق اخیر یک صفر پیدا شد. بعد از این صفر، رقمهای ۲ و ۵ از عدد ٦٢٥ را پایین می آوریم:

$$\sqrt{۶\ \ ۲\ \ ۵} = ۲\ \ ۵$$
۴ ۰۲ ۵ (۲ ۲ ۵)
۲

از این ۰۲۵، که در موارد دیگر می‌تواند عدد دیگری باشد، بقیهٔ عدد «در نظر گرفته شده» را تفریق می کنیم. رقم ۲ از عدد ۲۲۵ را که زیرش خط کشیده شده، قبلاً به کار برده‌ایم. اکنون ۲۵ را که باقی مانده‌است، به کار می‌بریم:

$$\sqrt{۶\quad ۲\quad ۵} \;=\; ۲\quad ۵$$

۴ ۰۲ ۵ (۲ ۲ ۵)

۲ ۰ ۰

باقیمانده صفر است

این جذرگیری کامل در آمد و باقیمانده ندارد. جذر ٦٢٥، عدد ۲۵ است.

مثال دوم: جذر ٦٥٤ را پیدا کنید. این عمل کامل نخواهد بود و در اینجا باقیمانده خواهیم داشت.

مرحلهٔ اول: دو رقم را جدا می کنیم: ٦/٤ ٥

مرحلهٔ دوم: اولین رقم جواب را به دست می آوریم. برای این منظور بزرگترین عددی را اختیار می کنیم که مجذورش از ٦ بیشتر نباشد:

$$\sqrt{۶\quad ۴\quad ۵} \;=\; ۲$$

مرحلهٔ سوم: مجذور این عدد را تفریق می کنیم (۲ ضرب در ۲ می‌شود ٤):

$$\sqrt{۶\quad ۴\quad ۵} \;=\; ۲$$

۴

۲

مرحلهٔ چهارم: نصف این رقم، یعنی ۲ پایینی را می گیریم و صفری به دنبالش می آوریم:

$$\sqrt{۶\quad ۴\quad ۵} \;=\; ۲$$

۴

۲

(۱۰)

این ۱۰ را بر رقمی از جواب که یافته‌ایم تقسیم کردیم: ۱۰ تقسیم بر ۲ می‌شود ۵. این رقم، دست کم به طور آزمایشی، رقم دوم جواب است:

√۶ ۴ ۵ = ۲ ۵
۴
۲

مرحلهٔ پنجم (باقیمانده و امتحان عمل): با استفاده از جوابی که در بالا یافتیم، دومین و سومین جفت ارقامی را که در مجذور کردن هم داریم، تشکیل می‌دهیم:

√۶ ۴ ۵ = ۲ ۵
۴ ۰ (~~۶۴~~ ۲۰ ۲۵)
۲ (۲ ۲ ۵) پیوند می‌زنیم

سپس ۲ را که زیرش خط کشیده شده تفریق می کنیم. اکنون ۴۵ را پایین می آوریم و ۲۵ را که در ۲۲۵ داریم از آن تفریق می کنیم:

√۶ ۴ ۵ = ۲ ۵
۴ ۰۲ ۵ (۲۰ ۲۵)
۲ ۲ ۵ (۲ ۲ ۵)
۲ ۰ باقیمانده ۲۰ است

پس مقدار جذر ۲۵ و باقیمانده ۲۰ به دست آمد. این باقیمانده «پذیرفتنی» است زیرا از جواب، که ۲۵ شد، کمتر است. اما همیشه چنین نیست.

مثال سوم: در این مثال، باقیمانده پذیرفتنی نیست:

√۶ ۷ ۶ = ۲ ۵
۴ ۰۷ ۶ (۲۰ ۲۵)
۲ ۲ ۵ (۲ ۲ ۵)
۵ ۱

باقیمانده ۵۱ است

همهٔ مراحل کار تا رسیدن به این باقیمانده عیناً مانند مثال قبلی بود. ولی حالا باقیمانده ۵۱ شده است. در جذرگیری، قاعده بر این است که: باقیمانده نباید از دو برابر جواب بیشتر باشد. در اینجا باقیمانده، یعنی ۵۱ از دو برابر جواب، که ۲۵ است بزرگتر است. پس معلوم می‌شود که رقم ۵ در جواب از حد مناسب کوچکتر است. شاید بهتر باشد به جای آن ٦ بگیریم، یعنی جواب به جای ۲۵، عدد ٢٦ باشد. حالا این را امتحان می کنیم:

√۶ ۷ ۶ = ۲ ۶
۴ ۰۷ ۶ (~~۰۴~~ ۲۴ ۳۶)
۲ ۷ ۶ (۲ ۷ ۶)
۰ ۰

حالا وضع فرق می‌کند!
باقیمانده صفر است

پس به ازای ٢٦، عمل کامل است و باقیمانده ندارد. می گوییم جذر ٦٧٦ دقیقاً ٢٦ است.

مثال چهارم: جذر ۲۲۰۰ را پیدا کنید:
مرحلهٔ اول: ۲۲/۰۰

مرحلهٔ دوم:

$$\sqrt{۲\ ۲\ ۰\ ۰} = ۴$$

زیرا ٤ ضرب در ٤ می‌شود ١٦،
ولی ۵ ضرب در ۵ می‌شود ۲۵ که زیاد است

مرحلهٔ سوم:

$$\begin{array}{l} \sqrt{۲\ ۲\ ۰\ ۰} = ۴ \\ \underline{۱\ ۶} \\ \quad ۶ \end{array}$$

مرحلهٔ چهارم:

$$\begin{array}{l} \sqrt{۲\ ۲\ ۰\ ۰} = ۴\ ۷ \\ \underline{۱\ ۶} \\ \quad ۶ \\ (۳۰) \end{array}$$

۳۰ تقسیم بر ٤ می‌شود ۷

مرحلهٔ پنجم (باقیمانده و امتحان):

$$\begin{array}{llll} \sqrt{۲\quad ۲\quad ۰\quad ۰} & = & ۴ & ۷ \\ \underline{۱\quad ۶}\ ۰۰\quad ۰ & & (\cancel{۱۶}\ ۵۶ & ۴۹) \\ \quad ۶\quad \underline{۰\quad ۹} & & (\underline{۶}\ ۰ & ۹) \end{array}$$

تفریق ممکن نیست! لابد رقم ۷ بزرگتر از مقدار مناسب است، زیرا نمی‌توانیم ۹ را از صفر تفریق کنیم. پس جواب را به ٤٦ تبدیل می‌کنیم و آن را می‌آزماییم:

$\sqrt{۲\ ۲\ ۰\ ۰}$ = ۴ ۶

۱ ۶ ۱۰ ۰   (~~۱۶~~ ۴۸ ۳۶)

۶ ۱ ۶   (۵ ۱ ۶)

۸ ۴

باقیمانده ۸٤ است

حالا ١٦ را می‌توانیم از ۱۰۰ تفریق کنیم، پس جواب درست باید همین ٤٦ باشد.

در یکی از مراحل، عدد عمل یافته شده را نصف می کردیم و صفری به دنبالش می‌افزودیم. در همین مثال بالا رقم ٦ را که زیر ١٦ بود بر ۲ تقسیم کردیم و صفری به آن افزودیم (نصف ٦ می‌شود ۳، با صفر می‌شود ۳۰). برای استفاده از این ۳۰ آن را به رقم ٤ از جواب، تقسیم کردیم.

گاه پیش می آید که عدد فردی داریم که باید نصف شود، مثل حالت زیر:

$\sqrt{۳\ ۰\ ۲\ ۵}$ = ۵

۲ ۵

۵

در چنین مواردی احتمالاً بهترین کار این است که «نیمهٔ بزرگتر» را بگیریم. برای ۵، عدد ۳ را اختیار می کنیم:

$\sqrt{۳\ ۰\ ۲\ ۵}$ = ۵ ۶

۲ ۵   (~~۲۵~~ ۶۰ ۳۶)

۵   (۶ ۳ ۶)

(۳۰)

کار در مرحلهٔ تفریق متوقف می‌شود، زیرا عدد ۶ را که زیرش خط کشیده شده نمی‌توانیم از عدد عمل که ۵ است کم کنیم. بنابراین رقم ۶ برای جواب زیاد است. این بار ۵۵ را امتحان می کنیم:

$$\sqrt{۳\ \ ۰\ \ ۲\ \ ۵} \quad = \quad ۵\ \ ۵$$

$$\underline{۲\ ۵}\ ۰۲\ \ ۵ \qquad (\cancel{۲۵}\ ۵۰\ ۲۵)$$

$$۵\ \ \underline{۲\ \ ۵} \qquad (\underline{۵}\ ۲\ ۵)$$

$$۰\ \ ۰$$

باقیمانده صفر است

عمل جذرگیری کامل است: جذر ۳۰۲۵ دقیقاً ۵۵ است.

اعداد پنج رقمی و شش رقمی

این دو حالت را یکجا در نظر می گیریم زیرا در هر دو جوابهای سه رقمی به دست می آید. مثلاً جذر ۸۸۲۴۶ می‌شود ۲۹۶ و جذر ۶۷۴۵۸۹ عدد ۸۲۱ است. هر دوی این جوابها سه رقمی‌اند. در هر مورد، باقیمانده‌ای هم داریم.

از لحاظ منطقی اکنون وقت آن است که دربارهٔ تعداد رقمهای جذر هر عدد صحبت کنیم. پیش از آنکه هیچ رقمی از جواب را بیابیم، می توانیم بگوییم که جذر مطلوب چند رقمی خواهد بود. تعداد رقمهای جواب تقریباً نصف تعداد رقمهای عدد مفروض است. به عبارت دقیقتر:

۱. اگر عدد مفروض شامل تعداد زوجی از ارقام باشد (مثل ۶۷۴۵۸۹ که شش رقم دارد، و شش هم عدد زوجی است)، آنگاه جذرش دقیقاً نصف این تعداد رقم خواهد داشت.

۲. اگر عدد مفروض شامل تعداد فردی از ارقام باشد (مثل ۶۲۵ که سه رقم دارد، و سه فرد است)، آنگاه یکی به تعداد ارقام می‌افزاییم تا

زوج شود، مثلاً سه را به چهار تبدیل می کنیم، و نصف آن را می گیریم (نصف چهار می‌شود دو، پس جذر ۶۲۵ عددی دو رقمی خواهد بود).

عین همین نتیجه را می‌توانیم به روشی عملی، حتی بدون شمارش رقمها به دست آوریم. برای این منظور باید رقمها را دو تا دو تا از سمت راست جدا کنیم. با داشتن عدد ۶۷۴۵۸۹ پیش از شروع به یافتن جذر آن، می توانیم آن را به این صورت تفکیک کنیم: ۶۷/۴۵/۸۹. اینجا سه دسته عدد داریم، پس در جواب سه رقم خواهیم داشت. حالا فرض کنید عدد ۸۸۲۴۶ را داریم. آن را به صورت ۸/۸۲/۴۶ دسته بندی می کنیم و باز هم سه دسته رقم داریم. اینکه یکی از دسته‌ها تنها شامل یک رقم ۸ است، تأثیری در کار ندارد. بنابراین باز هم انتظار داریم به جواب سه رقمی برسیم، که البته هم می‌رسیم زیرا جواب ۲۹۶ است.

مزیت جدا کرن رقمها در دسته‌های دوتایی از سمت راست، این است که بیش از معلوم کردن تعداد رقمهای جواب فایده دارد. با این کار مرحلهٔ اول روش مورد بحث نیز انجام می‌شود. در این مرحله، یک یا دو رقم سمت چپ را که تعیین کنندهٔ اولین رقم جواب است، مشخص می کردیم. به ازای ۸۸۲۴۶، اولین مرحله، مشخص کردن این مطلب است که ۸ اولین دسته‌ای است که باید با آن کار کنیم. سپس رقمی را پیدا می کنیم که مجذورش بزرگترین عددی است که از ۸ تجاوز نمی کند. این رقم ۲ است. اولین رقم ۳ نیست، زیرا ۳ ضرب در ۳ می‌شود ۹، و ۹ از ۸ بزرگتر است. پس اولین رقم جواب ۲ است. توجه می کنید که تفکیک رقمها لازم است، زیرا باید مراقب باشیم که اشتباهاً ۸۸ را در مرحلهٔ اول به کار نبریم. با این کار، به جای ۲ به رقم ۹ می‌رسیم: مجذور ۹، عدد ۸۱ است، که از ۸۸ بزرگتر نیست. تا هنگامی که رقمها را از راست دو تا دو تا جدا می کنیم، خطر بروز چنین اشتباهی در میان نیست.

هر سه رقم جواب را برای مواردی که ذکر شد، بر اساس آنچه تا کنون گفته شده می‌توان یافت. در اینجا هم همان مطالبی مطرح می‌شود که در بخش قبل برای کار با عددهای سه رقمی و چهار رقمی مطرح بود.

تنها یک نکتهٔ تازه در بخش آخر محاسبه که می‌خواهیم باقیمانده را پیدا کنیم، وارد کار می‌شود. این بخش برای عمل لازم است زیرا درست یا نادرست بودن آخرین رقم جواب را معلوم می‌کند. گاه پیش می‌آید که مجبوریم به عقب برگردیم و آخرین رقم را یکی کم کنیم. بااین حال توجه کنید که روال کار در آغاز چقدر شبیه قبل است:

مثال ۱: می‌خواهیم جذر ۲۰۷۹۳۶ را پیدا کنیم. رقمهایش را دوتا دوتا جدا می‌کنیم ۳۶ / ۷۹ / ۲۰. کار را با ۲۰ شروع می‌کنیم و جواب سه رقمی خواهد بود.

اولین رقم جواب: ٤ ضرب در ٤ کمتر از ۲۰ است، ولی ۵ ضرب در ۵ بیشتر از ۲۰ است. پس اولین رقم مطلوب ٤ است:

√۲ ۰ ۷ ۹ ۳ ۶ = ۴
۱ ۶
۴
(۲۰) ـــ نصف ٤ می‌شود ۲، صفری کنارش می‌گذاریم

دومین رقم جواب: این ۲۰ را به ٤ تقسیم می‌کنیم، حاصل ۵ است:

√۲ ۰ ۷ ۹ ۳ ۶ = ۴ ۵
۱ ۶ ـــ (~~۱۶~~ ۴۰ ۲۵)
۴ ـــ ۴ ۲ ۵

این همان شیوهٔ مجذور کردن است که قبلاً داشتیم. عدد ٤۰ هم دو برابر ٤ ضرب در ۵ است، و ۲۵ مجذور ۵ است. در مجذور کردن، سه تا از این عددهای دو رقمی داریم که با هم پیوند می‌خورند، ولی در این روش جذرگیری فقط دو تای آخر آنها به کار می‌آید. البته علت این کار آن است که اولین عدد از این اعداد دو رقمی قبلاً به کار رفته است. این عدد

باید مجذور ٤ یعنی ١٦ می‌بود و در اولین مرحلهٔ بالا، ١٦ را تفریق کرده‌ایم.

آخرین رقم جواب: این رقم ٤ در عدد ٤٢٥ را ضمن بالا رفتن، و رقم ٢ در ٤٢٥ را هنگام پایین آمدن، به صورت زیر تفریق می کنیم:

√۲ ۰ ۷ ۹ ۳ ۶ = ۴ ۵

۱ ۶ ۰۷   ۴ ۲ ۵

۴ ۵

(۳ یا ۲)

(۳۰ یا ۲۰)

برای اختیار کردن نصف عدد فردی مثل این ۵، نمی‌دانیم که باید «نصف کوچکتر» یا «نصف بزرگتر» یعنی ۲ یا ۳، را به کار ببریم. بهترین کار این روش بینابینی است که تفاضل را خُرد کنیم. بعد از افزودن صفر، ۲۰ یا ۳۰ داریم و نمی‌دانیم استفاده از کدام یکی بهتر است. البته در نهایت به خطا نخواهیم رفت، زیرا نادرستی حدسی که در این مرحله زده شود، حتماً بزودی روشن خواهد شد. اما طبیعی‌ترین کار، که اغلب از هر شیوهٔ دیگری سرراست‌تر هم هست، این است که تفاضل را خُرد کنیم. به جای ۲۰ یا ۳۰، میانگین ۲۵ را می گیریم. این عدد را بر اولین رقم جواب مطلوب تقسیم می کنیم: ۲۵ تقسیم بر ٤ می‌شود ٦ که آخرین رقم جواب است:

√۲ ۰ ۷ ۹ ۳ ۶ = ۴ ۵ ۶

۱ ۶ ۰۷   ۴ ۲ ۵

۴ ۵

(۲۵)

هر سه رقم جواب را داریم. توجه کنید که تا اینجا از هیچ شیوهٔ دیگری غیر از شیوه‌های مربوط به عددهای کوتاهتری که جوابهای دو رقمی داشتند، استفاده نکرده‌ایم. موضوع خُرد کردن تفاضل هم صرفاً به طور تصادفی در این مثال مطرح شد، چنانکه می‌تواند در مورد عددهای کوتاهتر یا بلندتر نیز مطرح شود.

اما حالا به قسمت «باقیمانده و امتحان» محاسبه می‌رسیم. در اینجا یک موضوع تازه به میان خواهد آمد. البته حتی این هم کاملاً تازه نیست، بلکه صرفاً در محاسبهٔ جذر تازگی دارد. قبلاً در روش مجذور کردن نیز، آن را داشتیم. این موضوع، استفاده از «حاصل ضرب متوالی باز» است که در آن، اولین و آخرین رقمهای جواب سه رقمی را در یکدیگر ضرب می کنیم. در مورد ۴۵۶، دو رقم ۴ و ۶ را در هم ضرب می کنیم. طبق معمول همهٔ این حاصل ضربهای متوالی، نتیجه را باید دو برابر کنیم: دو برابر ۴ ضرب در ۶ می‌شود ۴۸.

√۲ ۰ ۷ ۹ ۳ ۶ = ۴ ۵ ۶

۱ ۶ ۰۷   ۴ ۲ ۵   ~~۱۶~~ ۴۰ ۲۵

۴ ۵   ۴ ۸   دو برابر ۴ ضرب در ۶

۶ ۳ ۶

ادامهٔ مطلب را بخوانید

این ۶۳۶ صورت پیوند خوردهٔ حاصل ضرب متوالی ۵۶ است. طبق شیوهٔ معمول در جذر گیری اولین عدد از سه عدد دو رقمی را که در مجذور کردن داشتیم حذف می کنیم: مجذور ۵ را حذف می کنیم (آن را قبلاً در نظر گرفته‌ایم) بنابراین:

۵ ۶

۶۰ ۳۶

۶ ۳ ۶

صورت همیشگی حاصل ضرب متوالی مورد نظر است.

پس از آنکه مقداری تمرین کردیم، این حاصل ضرب متوالی را باید همواره ذهنی حساب کنیم. این کار بسیار راحت است. لزومی ندارد که واقعاً بنویسیم ۵ ضرب در ٦، می‌شود ۳۰، دو برابرش ٦۰ است؛ ٦۰۳٦ به صورت ٦۳٦ پیوند می‌خورد. همهٔ اینها براحتی در ذهن انجام می‌شود. اما فراموشکار نباشید و دو برابر کردن یادتان نرود!

باقیمانده و امتحان: پس از یافتن جواب، بی درنگ می‌توانیم بقیه رقمهای مانده از عدد مفروض را یکجا پایین بیاوریم، مثل آنچه در زیر می‌بینید:

√۲ ۰ ۷ ۹ ۳ ۶ = ۴ ۵ ۶

۱ ۶ ۰۷ ۱۹ ۳ ۶   ~~۴~~ ~~۲~~ ۵

۴ ۵   ۴ ۸

۶ ۳ ۶

رقمهای ٤ و ۲ در ٤۲۵ را خط می‌زنیم زیرا قبلاً آنها را برای تفریق از عدد عمل به کار برده‌ایم. اکنون رقم ٤ از حاصل ضرب متوالی ٤۸ را که زیر آن خط کشیده‌ایم به طوری که پیکانها نشان می‌دهند به کار می‌بریم. با گفتن اینکه «۵ منهای ٤ می‌شود ۱» رقم ٤ از عدد ٤۸ را هم خط می‌زنیم، دیگر با آن کاری نداریم. چه باقی می‌ماند؟ فقط رقمهای زیر:

۵

۸

۶ ۳ ۶

حالا ستون عمودی را جمع می‌زنیم: ۵ بعلاوهٔ ۸ بعلاوهٔ ٦ می‌شود ۱۹:

۵
۸
۶
۱ ۹ ۳ ۶

این نتیجه را که ۱۹۳۶ است از کل عدد عمل باقیمانده تفریق می کنیم:

√۲ ۰ ۷ ۹ ۳ ۶ = ۴ ۵ ۶
۱۹ ۳ ۶
۱۹ ۳ ۶
۰ ۰

باقیمانده صفر است

مسئله بدون باقیمانده درآمد. جذر ۲۰۷۹۳۶ دقیقاً ۴۵۶ است.

مثال ۲: عمل جذرگیری از عدد ۸۹۳۳۰۴ با توضیحاتی کلی، در زیر آمده است:

√۸ ۹ ۳ ۳ ۰ ۴ = ۹ ۴
۸ ۱ ۱۳ (۷۲ ۱۶)
۸ ~~۷~~ ۳ ۶
(۴۰)

رقم ۷ را هم اکنون، پس از به کار بردنش در تفریق از ۸ هنگام بالا رفتن، خط زدیم. سپس ضمن پایین آمدن، رقم ۳ در ۷۳۶ را تفریق می کنیم:

√۸ ۹ ۳ ۳ ۰ ۴ = ۹ ۴ ۵
۸ ۱ ۱۳ ~~۷~~ ~~۳~~ ۶
۸ ۱۰
(۵۰)

رقم ۵ جواب از تقسیم ۵۰ بر ۹ (۹ متعلق به ۹۴) به دست می آید. حالا که کل جواب را داریم. حاصل ضربهای متوالی را حساب می کنیم و بقیهٔ رقمهای عدد مفروض را یکجا پایین می آوریم:

√۸ ۹ ۳ ۳ ۰ ۴ = ۹ ۴ ۵

۸ ۱ ۱۳ ۱۳ ۰ ۴   ~~۸~~ ~~۴~~ ۶

۱۰ ۲ ۵

۸ ۱۰   ~~۸~~ ۰

۴ ۲ ۵

۲ ۷ ۹   ۱ ۰ ۲ ۵

باقیمانده ۲۷۹ است. جواب قابل قبول است. بدین معنا که هیچ جا به تناقضی بر نخوردیم. هیچ موردی پیش نیامد که خواسته باشیم عددی را از عدد کوچکتر تفریق کنیم، و باقیمانده یعنی ۲۷۹ از جواب که ۹۴۵ در آمده، کوچکتر است. همه چیز پذیرفتنی است. پس می‌توانیم بگوییم جواب درست است.

تمرینهایی برای حل

در اینجا تمرینهایی برای حل داده‌شده که بخصوص اگر آنها را به ترتیبی که داده شده‌اند حل کنید، برایتان جالب خواهند بود. تمرینها از آسان شروع و رفته رفته دشوارتر می‌شوند. جوابها پس از آخرین تمرین آورده شده‌اند. توجه به نکات زیر کارتان را در حل این تمرینها راحت‌تر خواهد کرد:

۱. وقتی مقسوم فرعی فرد در آمد، چنانکه پیشتر گفته شد «تفاضل را خُرد می کنیم». مثلاً اگر ۷ داریم و می‌خواهیم نصف آن را اختیار

کنیم، ۳ یا ٤ را خواهیم داشت. با افزودن صفری طبق روال همیشگی، ۳۰ یا ٤۰ را داریم که باید بر اولین رقم جواب تقسیم شود (تا رقم بعدی جواب به دست آید). کدام یکی را به کار می‌بریم، ۳۰ یا ٤۰ را؟ هیچ کدام. بلکه ۳۵ را به کار می‌بریم.

۲. وقتی مقسوم فرعی صفر شد، رقم ۱ (و نه صفر) رابه عنوان رقم بعدی جواب آزمایش می کنیم. این کار معمولاً موجب صرفه‌جویی در وقت می‌شود.

۳. هر وقت ضمن تقسیم کردن بر اولین رقم جواب، ۱۰ به عنوان رقم بعدی جواب پیدا شد، بلافاصله آن را به ۹ کاهش می‌دهیم. مسلماً ۱۰ قابل قبول نیست. حتی ممکن است رقم ۸ مناسب باشد.

٤. نکتهٔ مهمی که در موارد متعددی پیش می آید این است که اگر باقیمانده از دو برابر جواب بیشتر شد، باید جواب را افزایش دهیم. قاعدتاً این کار باید امکان‌پذیر باشد.

در چند مثال زیر، جذر اعداد داده شده را بیابید

۱. ۷۶۵
۲. ۹۶۵
۳. ۲۰۰
۴. ۶۸۳
۵. ۷۸۸۸
۶. ۴۵۶۹
۷. ۴۶۵۰۰
۸. ۱۰۳۴۵۶
۹. ۳۶۴۷۲۸
۱۰. ۹۰۰۰۴۵

جوابها:

این تمرینها به طریقهٔ عملی حل شده‌اند؛ یعنی تا حد زیادی به همان صورت که عملاً حل می‌شوند ثبت شده‌اند و تنها برخی توضیحات به آنها افزوده شده است. عملاً در این مسائل بخشی از آنچه در اینجا آورده شده، پس از قدری تمرین، می‌تواند حذف شود:

۱. $\sqrt{۷\quad ۶\quad ۵} \;=\; ۲\quad ۷$

$\underline{۲}\ \ ۰۶\ \ ۵$ (۲۷ $\underline{\ }$ ۴۹)

$\quad ۲\ \ ۹$ ۳ ۲ ۹

$\overline{\quad\quad\quad}$

۳ ۳ ۶ باقیمانده ۳۶ است

(۱۵)

۲. $\sqrt{۹\quad ۶\quad ۵} \;=\; \underline{۳\quad ۱}$

(۰۶ ۰۱) نکتهٔ ۲ی بالا را ببینید.

$\underline{۹}\ \ ۰۶\ \ ۵$ ۰ ۶ ۱

$\underline{\ ۶\quad ۱\ }$

۰ ۴ باقیمانده

۳. $\sqrt{۲\quad ۰\quad ۰} \;=\; \underline{۱\quad ۴}$ ۱۵ را باید کاهش دهیم

(۰۸ ۱۶)

$\underline{۱}\ \ ۱۰\ \ ۰$ ۰ ۹ ۶

$\underline{\ ۹\quad ۶\ }$

۱ ۴ باقیمانده

(۰۵)

۴. $\sqrt{۶\quad ۸\quad ۳} \;=\; ۲\quad ۶$ اولین جواب که ۲۵ است، باقیمانده‌ای

(۲۴ ۳۶) برابر با ۵۸ یعنی بیش از دو برابر

$\underline{۴}\ \ ۰۸\ \ ۳$ ۲ ۷ ۶ ۲۵ دارد. بنا براین به جای آن ۲۶

$\underline{\ ۷\quad ۶\ }$ را می‌آزماییم

۲ ۷ باقیمانده

۵. √۷ ۸ ۸ ۸ = ۸ ۸

(۱۲۸ ۶۴)

۶ ۴ ۱۸ ۸   ۱۳ ۴ ۴

۴ ۴

۱ ۴ ۱۴ ۴ باقیمانده ۱۴۴ است

۶. √۴ ۵ ۶ ۹ = ۶ ۷

(۸۴ ۴۹)

۳ ۶ ۱۶ ۹   ۸ ۸ ۹

۸ ۹

۹ ۸ ۰ باقیمانده ۸/۰ است

(۴۵)

۷. √۴ ۶ ۵ ۰ ۰ = ۲ ۱ ۵

~~۴~~ ~~۴~~ ۱

۴ ۰۶ ۵ ۰ ۰   ~~۴~~ ۰

۲ ۲ ۵   ۱ ۲ ۵

۰* ۲ ۲ ۷ ۵ باقیمانده ۲۷۵ است   ۲ ۲ ۲ ۵

وقتی ۰ را از ۵* تفریق می‌کنیم ۵ خط می‌خورد ۴ هم وقتی از ۶ در ستون دوم تفریق می‌شود خط می‌خورد.

۸. √۱ ۰ ۳ ۴ ۵ ۶ = ۳ ۲ ۱

۹ ۰۳ ۱۴ ۵ ۶   ~~۴~~ ~~۴~~ ۴

۱۰ ۴ ۱   ۰ ۶

۱ ۱ ۴ ۱ ۵ باقیمانده ۴۱۵ است   ۰ ۴ ۱

۹. $\sqrt{۳\ ۶\ ۴\ ۷\ ۲\ ۸}$ = ۶ ۰ ۳

۳ ۶ ۰۴ ۱۷ ۲ ۸ — ~~۴~~ ~~۴~~ ۰

۶ ۰ ۹ — ~~۴~~ ۶

۰ ۴ ۱۱ ۱ ۹ باقیمانده ۹۱۱۹ است — ۰ ۰ ۹

۱۰. $\sqrt{۹\ ۰\ ۰\ ۰\ ۴\ ۵}$ = ۹ ۴ ۸

۸ ۱ ۲۰ ۳۰ ۴ ۵ — ~~۸~~ ~~۴~~ ۶

۱۷ ۰ ۴ — ~~۴~~ ~~۴~~ ۴

۹ ۱۷ ۱۳ ۴ ۱ باقیمانده ۱۳۴۱ است — ۷ ۰ ۴

۱ ۷ ۰ ۴

عددهای هفت رقمی و هشت رقمی

از این عددها جوابهای چهار رقمی به دست می آید. در این موارد هم به شیوه‌ای مشابه آنچه برای جوابهای دو رقمی و سه رقمی داشتیم، عمل می کنیم. باید توجه کنید که این شیوه قطعی و بدون انعطاف نیست. البته نخستین بار هنگام عرضهٔ این روش آن را به طور قطعی بیان می کنیم. پس از آشنا شدن با این روش، هر کسی می‌تواند بنا به سلیقهٔ خود تغییراتی در آن بدهد. اغلب این تغییرات به صورت حذف بخشی از اعمال است ــ هر چه با این روش بیشتر آشنا شویم، مراحل بیشتری را می‌توانیم به طور ذهنی انجام دهیم و به این ترتیب از زحمت نوشتن آنها معاف شویم. به عنوان مثال:

۱. اولین رقم جواب، رقمی است که مجذور آن قدری کوچکتر از رقم اول یا دو رقم اول جواب است، چنانکه در مثالی داشتیم:

$$\sqrt{۱\ ۰\ ۳\ ۴\ ۵\ ۶} = ۳$$
$$\begin{array}{l} \underline{\ \ ۹} \\ \ \ ۱ \end{array}$$

صورت تغییر یافته: می‌توانیم رقم ۳ را بیابیم و ۹ را در ذهن تفریق کنیم:

$$\sqrt{۱\ ۰\ ۳\ ۴\ ۵\ ۶} = ۳$$
$$\ \ ۱$$

۲. برای یافتن رقمهای دیگر جواب، از حاصل ضربهای متوالی استفاده کرده و عددهای دو رقمی را پیوند زده‌ایم:

$$\sqrt{۱\ ۰\ ۳\ ۴\ ۵\ ۶} = ۳\ ۲$$
$$\ \ ۱ \qquad\qquad\qquad (۱۲\ ۰۴)$$

در مثالهایی که مطرح شد، معمولاً این عددهای دو رقمی را مثلاً به صورت ۱۲۰۴ نوشته و سپس آنها را پیوند زده‌ایم. عملاً هنگام کار لزومی ندارد آنها را بنویسیم. پس از قدری تمرین، می‌توانیم با نگاه کردن به ۳۲، به طور ذهنی به ۱۲۴ برسیم. اما دو برابر کردن حاصل ضرب متوالی یادتان نرود!

۳. پس از آنکه همهٔ رقمهای جواب پیدا شد، به محاسبهٔ باقیمانده عمل می‌پردازیم. در مثالهای بالا این کار با یک تفریق نشان داده می‌شد. در آنجا رقمهای موجود در ستونی از ارقام جدول طرف راست را با هم جمع می‌کردیم و پس از جمع کردن همهٔ ستونها، مجموع را در یک مرحله از همهٔ رقمهای به کار رفته عدد مفروض تفریق می‌کردیم:

$$\begin{array}{llllll} \sqrt{۱\ ۰\ ۳\ ۴\ ۵\ ۶} & = & ۳\ ۲\ ۱ \\ \quad ۱۴\ ۵\ ۶ & & \cancel{۱}\ \cancel{۱}\ ۴ \\ \quad \underline{۱۰\ ۴\ ۱} & & \cancel{۰}\ ۶ \\ \quad ۴\ ۱\ ۵ & & \underline{۰\ ۴\ ۱} \\ & & ۱۰\ ۴\ ۱ \end{array}$$

: باقیمانده

صورت دیگر: می‌توانستیم تفریق را چند مرحله‌ای انجام دهیم و هر بار یک ستون را تفریق کنیم، اول ۱۰، بعداً ٤، سپس ۱:

$$\begin{array}{llllll} \sqrt{۱\ ۰\ ۳\ ۴\ ۵\ ۶} & = & ۳\ ۲\ ۱ \\ \quad ۱۴ \quad ۴۵ \quad ۴۱۶ & & \cancel{۱}\ \cancel{۱}\ ۴ \\ (-۱۰)\downarrow \ (-۴)\downarrow \ (-۱)\downarrow & & \cancel{۰}\ ۶ \\ \quad ۴ \quad ۴۱ \quad ۴۱۵ & & \\ & & \underline{۰\ ۴\ ۱} \\ & & ۱۰\ ۴\ ۱ \end{array}$$

اینکه پس از قدری آشنا شدن با روش بالا دیگر جدول کوچک زیر ۳۲۱ را نمی‌نویسیم، خود گامی به جلوست. این کار را می‌توانیم ذهنی انجام دهیم. در این صورت، جدول کوچک یکباره محاسبه نمی‌شود بلکه هر ستون آن را در یک مرحله محاسبه می کنیم. به محض محاسبهٔ هر ستون، آن را با تفریق کردنش از عدد عمل، به کار می‌بریم به طوری که می‌توانیم آن ستون را بلافاصله فراموش کنیم. اما این رسیدن به وضع طبعاً به تمرین کافی بستگی دارد.

در مورد عددهای هفت رقمی و هشت رقمی، همهٔ آنچه را که در عددهای کوتاهتر داشتیم به کار می‌بریم، و در پایان چیزی به آنها می‌افزاییم. به عبارت دقیقتر:

۱. سه رقم اول از چهار رقم جواب را درست همان طور که جوابهای

سه رقمی را پیدا می کردیم، به دست می آوریم. مثلاً جذر ۱۵۳۲۳۳۶۹ چنانکه خواهیم دید ۳۲۱۳ در می آید. سه رقم اول جواب ۳۲۱ است، پس عمل دقیقاً مثل آنچه در مثال کوتاهتر قبلی داشتیم انجام می گیرد:

√۱ ۵ ۳ ۲ ۳ ۳ ۶ ۹ = ۳ ۲ ۱

۱ ۵۳ ‏‏ ‏ ~~۲~~ ~~۲~~ ۴

۱ ‏ ~~۵~~ ۶

۵ ۴ ۱

اما اکنون به سراغ محاسبهٔ باقیمانده نمی‌رویم. هنوز رقمی از جواب مانده که باید پیدا شود.

۴. رقم چهارم جواب را به این صورت پیدا می کنیم: ستون بعدی جدول (۵، ۶، ۴) را درست مثل همیشه برای یافتن رقمی از جواب به کار می‌بریم. یعنی، جمع کل ستون را پیدا می کنیم (۴ بعلاوهٔ ۶ بعلاوهٔ ۵ می‌شود ۱۵)، و رقم دهگان این مجموع را ضمن یک پیکان رو به بالا تفریق می کنیم:

√۱ ۵ ۳ ۲ ۳ ۳ ۶ ۹ = ۳ ۲ ۱

۱ ۵۳ ۵۲ ‏ ~~۲~~ ~~۲~~ ۴

(−۱)

۱ ‏ ~~۵~~ ۶

۵ ۴ ۱

سپس رقم یکان مجموع را (که صفر است) ضمن یک پیکان رو به پایین تفریق می کنیم:

√۱ ۵ ۳ ۲ ۳ ۳ ۶ ۹ = ۳ ۲ ۱

۱ ۵۳ ۵۲ ‏ ~~۲~~ ~~۲~~ ~~۴~~

۲ ‏ ~~۵~~ ~~۶~~

~~۵~~ ۴ ۱

در اینجا ٤ و ٦ و صفر را خط زده‌ایم زیرا هم‌اکنون آنها را به کار بردیم و هر دو رقم ۱۵ را تفریق کردیم.

نصف این ۲ی اخیر را می گیریم و صفری در آخرش می آوریم (نصف ۲ می‌شود ۱ که با صفر می‌شود ۱۰) و حاصل را بر اولین رقم جواب که ۳ است تقسیم می کنیم (۱۵ تقسیم بر ۳ می‌شود ۳). این رقم ۳ به دست آمده، آخرین رقم جواب است:

√۱ ۰ ۳ ۲ ۲ ۳ ۳ ۶ ۹ = ۳ ۲ ۱ ۳

۱ ۰۳ ۰۲ — $\cancel{۸}$ $\cancel{۸}$ $\cancel{۴}$

۱ ۲ — $\cancel{۹}$ $\cancel{۹}$

(۱۰) — $\cancel{۹}$ ۲ ۱

۳. همهٔ رقمهای به کار نرفتهٔ ۱۰۳۲۲۳۶۹ به باقیمانده منتقل می شوند. اکنون باید مطلبی به این روش اضافه شود. جدول کوچک زیرِ جواب، به ستونهای بیشتری نیاز دارد. اکنون موقتاً این موضوع را رها می کنیم و به مثال دیگری که همین مراحل در آن انجام شده، می‌نگریم. می‌خواهیم جذر چهار رقمی عدد ٤٠٠٩٤٢٢٤ را پیدا کنیم:

√۴ ۰ ۰ ۹ ۴ ۲ ۲ ۴ = ۶ ۳ ۳ ۲

۳ ۶ ۱۰ ۱۹ — $\cancel{۴}$ $\cancel{۵}$ $\cancel{۸}$

۴ ۴ ۳ — $\cancel{۴}$ $\cancel{۹}$

(۲۰)(۲۰)(۱۵) — $\cancel{۸}$ ۸ ۹

سه رقم اول جواب درست همان طوری پیدا شد که جوابهای جذر سه رقمی محاسبه می شد. برای یافتن آخرین رقم، یعنی ۲، ستون (۱ و ٦ و ۹) را که مجموعش ۱٦ است، از ۱۹ تفریق می کنیم و «نصف» ۳ حاصل را اختیار می کنیم. با افزودن صفر، تفاضل را خُرد می کنیم و به ۱۵ می‌رسیم. آن را بر رقم ٦ از ٦۳۳ تقسیم می کنیم، نتیجه ۲ می‌شود که

آخرین رقم جواب است.

باقیمانده و امتحان

۱. آخرین عدد عمل را بالا می آوریم و همهٔ رقمهای به کار نرفتهٔ عدد مفروض را به دنبالش «وصل می کنیم».

مثال اول:

√۱ ۰ ۳ ۲ ۳ ۳ ۶ ۹ = ۳ ۲ ۱ ۳

۹ ۰۳ ۰۲ ۲ ۳ ۳ ۶ ۹

۱ ۱ ۲

مثال دوم:

√۴ ۰ ۰ ۹ ۴ ۲ ۲ ۴ = ۶ ۳ ۳ ۲

۳ ۶ ۱۰ ۱۹ ۳ ۴ ۲ ۲ ۴

۴ ۴ ۳

از عددی که هم اکنون یافتیم، یعنی ۲۳۳۶۹، یا ۳۴۲۲۴ یا هر چند که باشد، عددی را که دربندهای بعدی پیدا می‌شود، تفریق می کنیم. حاصل کار، باقیماندهٔ عمل است.

۲. برای پیدا کردن عددی که باید تفریق شود، جدول کوچک زیرِ جواب را گسترش می‌دهیم. قبلاً در مثال اول داشتیم:

۳ ۲ ۱ ۳

~~۱~~ ~~۲~~ ~~۴~~

~~۵~~ ~~۶~~

~~۵~~ ۴ ۱

این جدول بدون استفاده از آخرین رقم جواب، که ۳ است، تشکیل شده بود. در آنچه اکنون اضافه می‌شود نقش آخرین رقم، مطرح می‌شود: حاصل ضرب متوالی این ۳ را با رقمهای دیگر جواب، به همهٔ صورتهای ممکن تشکیل می‌دهیم، و این ۳ را مجذور می کنیم:

۳ ۲ ۱ ۳

با انجام ضرب بترتیب از چپ به راست رقمهای ۹ و ۶ و ۳ و ۹ را خواهیم داشت. اما در جدول مربوط به روش جذرگیری، همهٔ حاصل ضربهای متوالی باید دو برابر شوند، پس داریم:

۱۸
۱۲
۰۶
۰۹

همچنانکه برای یافتن اعداد، رقمهای ۳۲۱۳ را یکی یکی از چپ به راست طی کردیم، این عددها هم هر یک نسبت به قبلی یک مرحله به سمت راست کشیده شده‌اند.

خوب، حالا چطور باید این عددهای جدید را در جدول کوچک عمل جذرگیری وارد کنیم؟ اولین رقم از این جدول چهار عددی، یعنی رقم ۱ از ۱۸ را در آخرین ستونی که خط خورده است، می‌نویسیم. اما فراموش نکنید که جلوی هر عدد یک رقمی باید صفری هم بگذاریم، مثل ۶ در جدول بالا که به صورت ۰۶ نوشته شد. اگر اولین عدد این جدول به

جای ۱۸، عدد ۸ بود آن را به صورت ۰۸ می‌نوشتیم. توجه به این نکته مهم است، زیرا از بروز اشتباه در تعیین ستونی که هر عدد باید در آن قرار گیرد، جلوگیری می کند. پس در مثال اول داریم:

	۳		۲		۱		۳
	~~۸~~	~~۸~~	~~۸~~				
		~~۰~~	~~۸~~				
			~~۰~~	۴	۱		
			۱	۸			
				۱	۲		
					۰	۶	
						۰	۹
: جمع کل			۲	۳	۳	۶	۹

پس عملاً دستور کار چنین است: رقم دهگان ۱۸، یا هر عددی که در مثالهای دیگر باشد، وارد آخرین ستونی که خط خورده است می‌شود. طبعاً این کار همان طور که در مورد ۱۸ دیدیم به طور عادی صورت می گیرد زیرا معمولاً عددی دو رقمی داریم. اما گاه عددی یک رقمی، مثل ٦ داریم. در این موارد برای جلوگیری از اشتباه کافی است، ٦ را همیشه به صورت ٦۰ بنویسیم. گاهی هم ممکن است عددی سه رقمی داشته باشیم: ۹ ضرب در ۷ می‌شود ٦۳، دو برابرش ۱۲٦. در این موارد، باز هم رقم دهگان را در آخرین ستون خط خورده قرار می‌دهیم. با داشتن ۱۲٦، رقم ۲ را در این ستون می گذاریم.

در مثال دیگری که آورده شد، داریم:

۶ ۳ ۳ ۲

~~۴~~ ~~۶~~ ~~۸~~

~~۴~~ ~~۶~~

~~۱~~ ۸ ۹

۲ ۴

۱ ۲

۱ ۲

۰ ۴

۳ ۴ ۲ ۲ ۴

اگر این عدد را تفریق کنیم، حاصل صفر می‌شود. در هر دو مثال، عمل کامل بود و باقیمانده نداشتیم. در حالت کلی، همیشه وقتی عددی بدهند و بخواهیم جذر آن را بگیریم، این وضع پیش نمی‌آید:

√۹ ۹ ۸ ۷ ۶ ۳ ۴ = ۳ ۱ ~~۵~~ ۶ ~~۱~~ ۰

۹ ۰۹ ۰۸ ۵ ۶ ۰ ۰ ~~۹~~ ~~۹~~ ~~۱~~

۰ ۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ۴ ~~۴~~ ~~۶~~

~~۱~~ ۵ ۶

۰ ۰

باقیمانده ۲۰۳۴ است ۰ ۰

۰ ۰

۰ ۰

۵ ۶ ۰ ۰

رقم دوم جواب را ۱ گرفتیم، نه صفر، هر چند که صفر تقسیم بر ۳ می‌شود صفر. این حدسی است که با توجه به رقمهای بزرگ بعدی، یعنی ۹ و ۸ صورت گرفته است. در هر حال، ادامهٔ اشتباه ممکن نیست. زیرا فرض کنید بغلط صفر را اختیار کرده باشیم. در این صورت خواهیم داشت:

√۹ ۹ ۸ ۷ ۶ ۳ ۴ = ۳ ۰

۹ ۰۹

۰ ۹

(۴۵)

رقم بعدی جواب چیست؟ این ٤۵ را بر رقم ۳ از جواب تقسیم می کنیم، حاصل ۱۵ می‌شود. اما رقم بعدی جواب نمی‌تواند ۱۵ باشد زیرا ۱۵ رقم نیست بلکه عددی دو رقمی است. پس معلوم می‌شود که صفر در نظر گرفته شده را باید افزایش دهیم، در نتیجه به ۳۱ می‌رسیم. به همین طریق، رقم ۵ در ۳۱۵ کوچکتر از مقدار مناسب بود، بنابراین آن را افزایش دادیم و به ۳۱٦ رسیدیم.

حالا جذر ۸۷۲٤۳۲۱ را پیدا می کنیم. با جدا کردن رقمها خواهیم داشت ۸/۷۲/٤۳/۲۱، بنابراین جواب چهار رقمی است و کار با ۸ شروع می‌شود، نه با ۸۷:

√۸ ۷ ۲ ۴ ۳ ۲ ۱ = ۲ ۹

۴ ۲ ۱

۴ ۰۷

۴ ۳

(۲۰) (۱۵)

با تقسیم ۲۰ بر ۲ رقم دوم جواب ۱۰ در می آید که پذیرفتنی نیست. بنابراین ۱۰ را به ۹ تقلیل می‌دهیم. وقتی با «خُرد کردن تفاضل» به ۱۵ می‌رسیم، ۲۹ را به عنوان بخشی از جواب یافته‌ایم. به این نکته توجه کنید که به جای تقسیم کردن ۱۵ بر رقم ۲ از ۲۹، این ۱۵ را به ۳ تقسیم می کنیم. علت این کار را به اتکای برداشت حسی می‌توانیم درک کنیم. هر عددی که با ۲۹ آغاز شود تقریباً به بزرگی عددی است که با ۳۰ شروع می‌شود و با عددی که با ۲۰ شروع شود خیلی فاصله دارد. پس

می‌توانیم بگوییم که این ۲ به علت وجود ۹ به دنبالش، تقریباً ۳ است (البته هر طور عمل کنیم نهایتاً به جواب درست خواهیم رسید و فقط میزان وقت صرف شده قدری متفاوت خواهد بود). پس رقم بعدی جواب ۵ است. کار را تا آخر دنبال می‌کنیم:

√۸	۷	۲	۴	۳	۲	۱	=	۲	۹	۵	۳	
۴	۰۷	۱۲	۲۴	۳	۲	۱		~~۴~~ ~~۴~~ ~~۱~~				
			۲۰	۲	۰	۹		~~۴~~ ~~۶~~				
۴	۳	۲	۴	۱	۱	۲		~~۹~~ ۲ ۵				
		(۱۰)						۱ ۲				
								۵ ۴				
باقیمانده ۴۱۱۲ است								۳ ۰				
								۰ ۹				
								۲ ۰ ۲ ۰ ۹				

عددهای طولانیتر

برای اعداد طولانیتر از آنچه تاکنون گفته شد نیز بر همین اساس عمل می‌شود. روشی که برای جوابهای چهار رقمی بیان شد، چهار رقم اول جوابهای طولانیتر را نیز می‌دهد. رقم پنجم هم با استفاده از همان روش یافته می‌شود. اگر جواب تنها پنج رقم داشته باشد، باقیمانده با استفاده از جدول کوچک زیر جواب که این بار شامل عددهای بیشتری است، تعیین می‌شود. این عددها حاصل ضربهای متوالی رقم پنجم جواب در یکایک رقمهای جواب است که به مجذور رقم پنجم ختم می‌شوند. طبق معمول، همهٔ حاصل ضربهای متوالی دو برابر می‌شوند ولی مجذور رقم پنجم دو

برابر نمی‌شود.

برای جذر گرفتن از ۸۷۲۰۷۹۹۶۱ رقمهایش را به این صورت جدا می کنیم ۸/۷۲/۰۷/۹۹/۶۱، پس جواب پنج رقم خواهد داشت و کار با ۸ شروع می‌شود:

$$\sqrt{8\ 7\ 2\ 0\ 7\ 9\ 9\ 6\ 1} = 2\ 9\ 5\ 3$$

$\underline{4}$ ۰۷ ۱۲ ۱۰ ~~۴~~ ~~۲~~ ~~۲~~

۴ ۳ ۲ ۱ ~~۲~~ ~~۶~~

(۰۵) ~~۶~~ ۲ ۵

(ضمن بالا رفتن تفریق می‌شود) $\underline{1}$ ۲

۵ ۴

۳ ۰

(ضمن پایین‌آمدن تفریق می‌شوند) ۰ ۹

با «خُرد کردن تفاضل» در مورد ۱ به عنوان آخرین عدد عمل به ۰۵ می‌رسیم. آن را بر ۳، که از ۲۹ به آن رسیده‌ایم، تقسیم می کنیم و ۱ یا ۲ حاصل می‌شود که هنوز نمی‌دانیم کدام یک را باید اختیار کنیم. عملاً معلوم می‌شود که ۱ درست است پس برای جلوگیری از دوباره نوشتن، یکراست همان را به کار می‌بریم:

$\sqrt{۸\ ۷\ ۲\ ۰\ ۷\ ۹\ ۹\ ۶\ ۱} = \underline{۲\ ۹\ ۵\ ۳\ ۱}$

۴ ۵۷ ۱۲ ۱۰ ۱۷ ۹ ۹ ۶ ۱ ~~۴~~ ~~۳~~ ~~۶~~

۱۷ ۹ ۹ ۶ ۱ ~~۲~~ ~~۰~~

۲ ۳ ۲ ۱ باقیمانده نداریم ~~۹~~ ~~۸~~ ۵

~~۱~~ ~~۲~~

~~۵~~ ۴

۳ ۰

۰ ۹

۰ ۴

۱ ۸

۱ ۰

۰ ۶

۰ ۱

۱ ۷ ۹ ۹ ۶ ۱

طبق اصولی که ذکر شد، ردیف شیبدار عددهای جدید، یعنی ٥٤، ۱۸ و غیره از ضرب کردن آخرین رقم جواب در یکایک رقمهای جواب و دو برابر کردن حاصل، و سپس مجذور کردن خود آخرین رقم، به دست می آید. همچنین طبق اصولی که داشتیم، رقم دهگان اولین عدد از ردیف شیبدار جدید، یعنی رقم دهگان ٥٤، در آخرین ستون خط خورده، نوشته می‌شود.

در عمل به چنین جدول گسترده‌ای نیاز نداریم. در واقع هم می‌توانیم آن را مختصرتر کنیم اما بهترین کار آن است که هر کس به اقتضای سلیقهٔ خود عمل کند. مثلاً در این مورد می‌توانیم چند تا از این عددهای دو رقمی را به یکدیگر پیوند بزنیم، که این در صورت نوشتن نتیجه‌ها مفید است، یا می‌توانیم بکلی از نوشتن عددهای دو رقمی چشم بپوشیم و به جای این کار هر ستون را بنوبت تفریق کنیم.

امتحان عمل

در مجذور کردن اعداد و در جذر گرفتن می‌توانیم از روشهای امتحانی بسیار شبیه به آنچه در ضرب و تقسیم به کار می‌بردیم استفاده کنیم. در واقع، مجذور کردن نوع خاصی از ضرب است که در آن، عدد را در خودش ضرب می کنیم، بنابراین می‌توانیم امتحان عمل ضرب را عیناً به کار ببریم. برای این منظور، مجموع ارقام عددهایی را که دریکدیگر ضرب می‌شوند و مجموع ارقام حاصل عمل را پیدا می کنیم، تا ببینیم آیا با هم وفق می‌دهند یا نه. این شیوه مستقیماً در مجذور کردن اعداد قابل استفاده است. مثال $۱۰۲۴ = ۳۲^{۲}$ را در نظر بگیرید. قاعدتاً در چنین عمل آسانی نباید اشتباه کرده باشیم ولی فعلاً می‌خواهیم مثالی عرضه کنیم.

مجموع ارقام ۳۲ $۳ + ۲ = ۵$

مجموع ارقام ۱۰۲۴ $۱ + ۰ + ۲ + ۴ = ۷$

اگر مجذور ۳۲ عدد ۱۰۲۴ باشد، با مجذور کردن مجموع ارقام ۳۲ هم باید مجموع‌ارقام ۱۰۲۴ به‌دست آید. آیا این‌طور هست؟ مجموع‌ارقام ۳۲ می‌شود ۵. مجذور آن ۲۵ است که به ۷ تبدیل می‌شود. یادتان باشد که، همهٔ مجموعهای ارقام باید به عددی یک رقمی تبدیل شوند. پس با مجذور کردن مجموع ارقام ۵ به ۷ می‌رسیم. آن را با مجموع ارقام ۱۰۲۴ که آن نیز ۷ است مقایسه می کنیم. با هم مطابقت دارند پس نتیجهٔ امتحان عمل مثبت است و عمل درست انجام گرفته است.

امتحان جذر. در این مورد همان نوع کاری را می کنیم که برای امتحان تقسیم می کردیم. در اینجا عکس عمل را به کار می‌بریم که کاملاً با خود عمل هم‌ارز است. مثلاً یکی از جذرهایی که پیدا کردیم جذر ۲۰۷۹۳۶ بود. مقدار جذر را دقیقاً ۴۵۶ به دست آوردیم که باقیمانده‌ای نداشت. حالا آن را امتحان می کنیم:

$$\sqrt{۲۰۷۹۳۶} = ۴۵۶$$

مجموعهای ارقام: ۵ ۶

رقم ٦ را مجذور می کنیم، حاصل ۳٦ می‌شود. اما ۳ بعلاوهٔ ٦ می شود ۹، که در مجموع ارقام، معادل صفر است. پس دو نتیجه با هم وفق می‌دهند و امتحان درستی عمل را نشان می‌دهد.

منطق کار چنین است: گفتن اینکه جذر ۲۵۷۹۳٦ می‌شود ٤۵٦، مثل این است که بگوییم مجذور ٤۵٦ می‌شود ۲۵۷۹۳٦. اگر یکی درست باشد دیگری هم درست است. بنابراین به جای امتحان کردن عمل جذرگیری از عدد مفروض، عمل مجذور کردن ٤۵٦ را امتحان می کنیم. مجموع ارقامهایی چون صفر، یا ۱۸ یا ۲۷ یا ۳٦ تا آخره‌با یکدیگر هم‌ارزند و این وضع باعث چند گانگی در عددی که باید جذرش را بگیریم می‌شود. پس به روش فوق با مجذور کردن مجموع ارقام جذر، امتحان قابل اعتمادی خواهیم داشت.

وقتی عمل باقیمانده دارد چکار می کنیم؟ همان کاری که در تقسیم می کردیم. خود باقیمانده یا مجموع ارقام آن را تفریق می کنیم. مثلاً در مثالی که پیشتر حل کردیم:

$$\sqrt{۴۶۵۰۰} = ۲۱۵$$

۲۷۵ باقیمانده

۸	۶	: مجموع ارقام
	۵ باقیمانده	
	۱	: باقیمانده‌را تفریق‌می کنیم

برای امتحان کردن عمل، ۸ را مجذور می کنیم که ٦٤ می‌شود و مجموع ارقامش ۱ است. پس عمل درست بوده است.

در محاسبه جذر امتحانهای فرعی هم در ضمن عمل داشتیم. اما این امتحان نهایی با کل جواب و باقیمانده همچنان اهمیت زیاد خود را داراست.

فصل هفتم

بیان جبری روش تراختنبرگ

احتمالاً کمتر کسی را می‌توانیم بیابیم که زمانی با مسئله‌ای از نوع زیر کلنجار نرفته باشد:

یک بار نجاری متوجه شد تخته‌ای که در اختیار دارد بیش از حد دراز است. بنا براین اره‌ای برداشت و آن را به سه قطعه برید. قطعهٔ اول ۱ متر طول داشت. درازای قطعهٔ دوم برابر بود با طول قطعهٔ اول به اضافهٔ یک سوم طول قطعهٔ سوم. قطعهٔ سوم هم به اندازهٔ مجموع قطعهٔ اول و دوم طول داشت. درازای تختهٔ اولیه و هر یک از قطعات بریده شده چقدر بوده است؟

اگر اهل معماهای ریاضی بوده‌اید، حتماً با این نوع معما که به صورتهای مختلف بیان می‌شود آشنا هستید. پاسخ این معمای خاص چنانکه بعداً خواهیم دید، ۶ متر برای تختهٔ اولیه و بترتیب ۱، ۲ و ۳ متر برای قطعات بریده شده است.

از هر راهی که به جواب برسید زیاد مهم نیست و اگر هم اصلاً نتوانید جواب را پیدا کنید، زیاد مهم نیست. ما با خودِ معما کاری نداریم و تنها به این دلیل آن را بیان کردیم که مثال زیبایی برای یک دیدگاه نسبت به جبر است. این مسئله خاص و همه مسائل از این نوع را به کمک جبر می‌توانیم به بهترین وجه حل کنیم. خصوصیتی از جبر که در اینجا به

میان می‌آید این است که می گوییم «مجهول را x می نامیم». در جستجوی عددی هستیم که تا مسئله حل نشود مقدارش معلوم نمی‌شود. پس فعلاً آن‌را با حرف x یا در صورت تمایل با حرفی دیگر نشان می‌دهیم.

البته کار جبر به همین جا پایان نمی گیرد. اولاً، در قلمرو ریاضیات محض، نظریهٔ جبری بسیار گسترده و عمیقی وجود دارد که کارش حل این گونه مسئله‌ها نیست. ثانیاً کاربردهایی از جبر وجود دارد که دارای ارزش عملی بیشتری است و با آن نوعی از جبر که در حل معماها به کار می‌رود فرق دارد. در اینجا با یکی از این کاربردها سرو کار خواهیم داشت و در سراسر این فصل از آن بهره خواهیم جُست.

گذشته از موضوع «مجهول را x نامیدن» در جبر با دیدگاه توصیف کلی هم رو به رو می‌شویم. بدین معنا که مجموعه‌ای از اعداد را یکجا به یک نام می‌خوانیم بی آنکه روی عدد خاصی انگشت بگذاریم.

به این مثال توجه کنید: گروهی از مردان عضو یک تیم پینگ پنگ هستند و همسرانشان هم عضو یک تیم پینگ پنگ زنان. آقای **الف** ۲۸ ساله و همسرش ۲٦ ساله است؛ آقای **ب** ۲۵ ساله و همسرش ۲۳ ساله است؛ آقای **ج** ۲۹ ساله و زنش ۲۷ ساله است؛ آقای **د** ۲۳ ساله و زنش ۲۱ ساله است؛ آقای **هـ** ۲٤ ساله و زنش ۲۲ ساله است.

چگونه می توانیم این عددها را خلاصه کنیم؟ برای این کار توجه می کنیم که تیم پینگ پنگ زنان ۲ سال از تیم پینگ‌پنگ مردان جوانتر است. در واقع، هر شوهری دو سال از زنش بزرگتر است. اگر سن هر یک از شوهران را با حرف h و سن زن او را با حرف w نشان دهیم[1] خواهیم داشت:

$$h = w + ۲$$

---

۱. حرف اول دو واژهٔ husband , wife که در انگیسی بترتیب به معنای شوهر و زن است - م.

این درست معادل آن است که بگوییم هر یک از زنان دو سال از شوهرش کوچکتر است:

$$w = h - ۲$$

همین مطلب را می‌توانیم با استفاده از اندیس بنویسیم. حرف a را به نشانه «سن»[۲] به کار می‌بریم و یک h یا w ی کوچک کمی پایین‌تر، جلویش می گذاریم که به معنی «شوهر» یا «زن» خواهد بود و رابطه به این صورت در می آید:

$$a_h = a_w + ۲$$

برای آنکه کارایی این روش معلوم شود حرف s را به معنی «امتیاز»[۳] می گیریم، در نتیجه رابطه‌ای مثلاً به صورت زیر خواهیم داشت:

$$s_h = s_w + ۲۵$$

این در صورتی است که هر شوهر ۲۵ امتیاز بیشتر از زنش کسب کرده باشد.

نکته اینجاست که هر کدام از این معادله‌ها بیانگر وضعی است که برای همهٔ اعداد مجموعه، یا به عبارت دیگر برای همهٔ اعضای تیم صادق است. وقتی می‌نویسیم $h = w + ۲$، در یک معادله به این مطلب اشاره می کنیم که ۲ + ۲۶ = ۲۸ برای آقا و خانم **الف**؛ همچنین به این مطلب که ۲+۲۳ = ۲۵ برای آقا و خانم **ب**، تا آخر. این یک حکم کلی است که همهٔ حالتهای خاص را شامل می‌شود.

در این مثال بسیار ساده می‌توانستیم به جای علامتهای جبری از کلمات استفاده کنیم. جملهٔ «هر شوهر دو سال از زنش بزرگتر است»،

---

۲. حرف اول واژهٔ age.

۳. حرف اول واژهٔ score.

را راحت‌تر می‌توانیم بیان و درک کنیم. اما در حالتهای پیچیده‌تر، رابطه‌های موجود را براحتی می‌توانیم در قالب علایم بنویسیم، در حالی که بیان آنها با کلمات بسیار طولانی و پیچیده می‌شود. در اینجا برای تشریح بخشهای اساسی روش تراختنبرگ به زبان جبر، با همین نوع حالت پیچیده سرو کار داریم. در فصل حاضر به مطالب زیر می‌پردازیم:

(۱) ابتدا بخشی از فصل اول را از دیدگاه تازه بررسی می‌کنیم تا نشان دهیم چکار می‌خواهیم بکنیم.

(۲) سپس مرور کوتاهی خواهیم داشت بر روشهای اساسی جبر که البته جزو روش تراختنبرگ نیست. این مرور به خاطر سهولت کار کسانی است که تمایل دارند آنچه را قبلاً فرا گرفته‌اند یادآوری کنند؛ دیگران می‌توانند از خیر آن بگذرند.

(۳) سرانجام مفاهیم اساسی جبر را در دستورالعملهایی که قبلاً به عنوان روش تراختنبرگ عرضه شده به کار خواهیم بست.

نمایش اعداد به صورت کلی

در فصلهای گذشته با اعداد سرو کار داشتیم و در انواع مختلف محاسبات آنها را با یکدیگر ترکیب کردیم. در هر مورد، با یک جفت عدد یا یک عدد خاص عمل می‌کردیم مثلاً ۴۷۷۶ ضرب در ۶۳. در این موارد از حروف برای نشان دادن عددها استفاده نکردیم، چنانکه h و w می‌توانند نشانهٔ سن شوهر و زن باشند.

حالا می‌خواهیم روش تراختنبرگ، یا دست کم مهمترین بخشهای آن را از طریق به کارگیری حروف به نشانهٔ اعداد بررسی کنیم. با این کار می‌توانیم دربارهٔ همهٔ عددها یکجا صحبت کنیم و حکمهایی دربارهٔ این روش بیان کنیم که همیشه درست خواهند بود بی آنکه عدد خاصی

که دستورها را در موردش به کار می‌بریم اهمیتی داشته باشد.

مطالعهٔ این مبحث اختیاری است. برای هیچ یک از کاربردهای عملی، خواندن این فصل ضروری نیست. از طرف دیگر این نوع بحث برای خیلی اشخاص جالب است و ما هم به خاطر آنها این فصل را در کتاب گنجانده‌ایم. از اینها گذشته، این کار دو فایدهٔ ملموس نیز دارد:

۱. با فرمولهای جبری ثابت می‌شود که دستورهایی که به کار می‌برده‌ایم درست‌اند. شمار کسانی که اندیشه‌های تازه را به دیدهٔ تردید می‌نگرند کم نیست. حتی گاه این تردید بعد از حل چند مثال و به دست آوردن جواب درست از روش مورد نظر هم بکلی برطرف نمی‌شود. در روش کلی با استفاده از جبر، ثابت می‌شود که این دستورها همیشه جواب درست را خواهند داد. به این ترتیب، شکی که ممکن است در ذهن کسی مانده باشد زدوده می‌شود و با این وسیله می‌توان هر شخص دیگری را هم در مورد درستی این روش متقاعد کرد.

۲. نوشتن فرمولهای جبری سبب می‌شود که در مورد اصول حاکم بر کار، بصیرتی کسب کنیم. وقتی مثال خاصی را حل می‌کنیم، مثل ۴۷۷۶ ضرب در ۶۳، توجهمان باید بر اعدادی که پیش رو داریم متمرکز شود. جزئیات محاسبه نمی‌گذارد ببینیم چطور تکه‌های تصویر کنار هم قرار می‌گیرند تا نتیجهٔ کلی حاصل شود. اما وقتی از روش جبری استفاده می‌کنیم و اعداد را به صورت حروف نشان می‌دهیم، اوضاع به قرار دیگری است. در اینجا هیچ محاسبهٔ واقعی انجام نمی‌دهیم. نمی‌گوییم «۳ ضرب در ۶ می‌شود ۱۸» یا نظایر آن. در عوض ذهنمان می‌تواند آزادانه نحوهٔ ترکیب اجزای مختلف اعداد برای دستیابی به جواب را ملاحظه کند. به این ترتیب موضوع بهتر فهمیده می‌شود و ژرفتر در ذهن جا می‌گیرد.

برای نشان دادن نحوهٔ کارکرد روش تراختنبرگ، لازم خواهد بود اعداد را «بگسترانیم» به طوری که نقش هر یک از رقمهای عدد را بتوانیم ببینیم. مثلاً عدد ۳۵۷ را در نظر می‌گیریم. معنی آن سه تا صد، بعلاوهٔ پنج تا ده، بعلاوهٔ هفت تا یک است:

$$۳\ ۵\ ۷ = ۳ \times ۱۰۰ + ۵ \times ۱۰ + ۷$$

به همین ترتیب، عدد ۷۰٤ را هم می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$۷\ ۰\ ۴ = ۷ \times ۱۰۰ + ۰ \times ۱۰ + ۴$$

معنی این مقدار در قالب پول، ۷ اسکناس صد تومانی، هیچ اسکناس ده تومانی، ٤ سکهٔ یک تومانی است.

هر عددی از ردهٔ چند صد ــ از صد تا هزار ــ را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$a \times ۱۰۰ + b \times ۱۰ + c$$

هر یک از حروف a، b و c نشانهٔ یک رقم است. این یک رقم می‌تواند صفر، یا ۹، یا هر عدد صحیحی بین این دو باشد. پس حرف a نشانهٔ رقمی از صفر تا ۹ است، و b و c هم نشانهٔ رقمهایی از همین نوعند ، که ضمناً می‌توانند یکسان یا متفاوت باشند:

$$a = ۷$$

$$b = ۷$$

$$c = ۷$$

به این ترتیب، عدد ۷۷۷ حاصل می‌شود:

$$۷\ ۷\ ۷ = (۷ \times ۱۰۰) + (۷ \times ۱۰) + ۷$$

عددهای طولانیتر، مثلا عدد شش رقمی، را هم می‌توانیم به همین شیوه بنویسیم:

$$(a \times ۱۰۰۰۰۰) + (b \times ۱۰۰۰۰) + (c \times ۱۰۰۰) + (d \times ۱۰۰) + (e \times ۱۰) + f$$

در همهٔ این عبارتها علامت × را به معنای ضرب به کار برده‌ایم. مثلاً "$a\times100$" را «a ضرب در صد» می‌خوانیم. اما راحت‌تر آن است که × را ننویسیم. روش رایجتر هم این است که به جای "$a\times100$" بنویسیم "$100a$" و بخوانیم «صد a». همین که ۱۰۰ و عدد a کنار هم نوشته شده‌اند بدان معناست که در یکدیگر ضرب می‌شوند. پس عدد شش رقمی را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f$$

در شیوهٔ معمولی نوشتن، که به جای حروف، ارقام به کار می‌روند، این عدد به صورت $abc\,def$ خواهد بود. صورت گستردهٔ عددها را برای محاسبات بعدی لازم خواهیم داشت.

همچنین توجه کنید که در صورت تمایل می‌توانیم جلو عدد مورد نظر صفری بگذاریم، زیرا با این کار عدد تغییری نمی‌کند. ممکن است بخواهیم این کار را برای گذاشتن یک صفر اضافی جلو عدد انجام دهیم، همان طور که در فصل مربوط به ضرب، این کار را می کردیم. در این صورت، مثلاً عدد ۳۵۷ چنین خواهد شد:

$$357 = (0\times1000) + (3\times100) + (5\times10) + 7$$

به یاد دارید که، حاصل ضرب هر عددی در صفر، همان صفر است. پس در معادلهٔ بالا، (1000×0) برابر با صفر است و بسته به میل خود می‌توانیم آن را بنویسیم یا ننویسیم. اینجا آن را می‌نویسیم زیرا می‌خواهیم عمل ضرب را شرح دهیم و در این روش یک صفر اضافی جلو عدد مفروض گذاشته می‌شود. اعداد سه رقمی، هر چه باشند، به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$(0\times1000) + (a\times100) + (b\times10) + c$$

یا اگر ترجیح بدهیم، به صورت زیر:

$$(1000\times0) + 100a + 10b + c$$

دستور ضرب اعداد در یازده

اکنون بد نیست آنچه را گفتیم برای آزمایش «دستور ضرب اعداد در یازده» به کار ببریم. لابد به یاد دارید که این دستور ساده چنین است «با همسایه جمع کنید» و منظور از همسایه در هر مرحله رقمی است که بلافاصله در سمت راست رقمی که به آن رسیده‌ایم قرار دارد. ضمناً این را هم می‌دانیم که باید صفری جلو عدد مفروض بگذاریم و دستور بالا را در مورد این صفر هم اجرا کنیم. آخرین رقم عدد مفروض، که در منتهی‌الیه سمت راست واقع است، طبعاً هیچ همسایه‌ای ندارد، بنابراین چیزی با این رقم جمع نمی‌شود. برای مشاهدهٔ کارکرد این دستور، عددی چهار رقمی اختیار می کنیم،

$$\begin{aligned} N &= (۰\times ۱۰۰۰۰)+(a\times ۱۰۰۰)+(b\times ۱۰۰)+(c\times ۱۰)+d \\ &= (۱۰۰۰۰\times ۰)+۱۰۰۰a+۱۰۰b+۱۰c+d \end{aligned}$$

عبارت بالا نشان دهندهٔ همهٔ عددهای چهار رقمی ممکن است، و انتخاب یک عدد چهار رقمی خاص، به معنای اختیار کردن چهار مقدار خاص برای a، b، c، و d است. ما به‌این حروف مقدار خاصی نسبت نمی دهیم زیرا فعلاً می خواهیم راجع به همهٔ عددهای چهار رقمی یکجا صحبت کنیم. کاری که می‌خواهیم انجام دهیم ضرب کردن این عدد کلی در ۱۱ است (۱۱ برابر است با ۱۰ بعلاوهٔ ۱):

$$۱۱=۱۰+۱$$

پس هر وقت عددی را در ۱۱ ضرب می کنیم، عملاً آن را در ۱۰ و سپس در ۱ ضرب و دو نتیجه را با هم جمع می کنیم:

$$\begin{aligned} ۳\ ۵\times ۱\ ۱ &= ۳\ ۵\times(۱۰+۱) \\ &= (۳\ ۵\times ۱۰)+(۳\ ۵\times ۱) \end{aligned}$$

اما با ضرب کردن هر عدد در ۱۰، فقط صفری در طرف راست آن اضافه می‌شود (۱۰ × ۳۵ می‌شود ۳۵۰). پس:

$$۳۵ \times ۱۱ = ۳۵۰ + ۳۵ = ۳۸۵$$

درستی این دستور که «برای ضرب کردن در ۱۰، صفری در طرف راست اضافه شود» با توجه به صورت گستردهٔ اعداد و افزودن یک صفر (که مقدارش را تغییر نمی‌دهد!) معلوم می‌شود:

$$۳۵ = (۳ \times ۱۰) + (۵ \times ۱) + ۰$$

در ۱۰ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ۳۵ \times ۱۰ &= (۳ \times ۱۰) \times ۱۰ + (۵ \times ۱) \times ۱۰ + ۰ \times ۱۰ \\ &= (۳ \times ۱۰۰) + (۵ \times ۱۰) + ۰ \\ &= ۳۵۰ \end{aligned}$$

اکنون همین کار را در مورد عدد چهار رقمی کلی ــ نه یک عدد خاص، بلکه هر عددی باشد ــ انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} ۱۰ \times N &= ۱۰ \times (۱۰۰۰۰ \times ۰ + ۱۰۰۰a + ۱۰۰b + ۱۰c + d) \\ &= ۱۰۰۰۰۰ \times ۰ + ۱۰۰۰۰a + ۱۰۰۰b + ۱۰۰c + ۱۰d + ۰ \end{aligned}$$

ضرب کردن در ۱۰ صفری به هر یک از مضروبهای ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و غیره اضافه می‌کند که همهٔ رقمها را یک خانه به سمت چپ انتقال می‌دهد و صفری در منتهی‌الیه سمت راست باقی می گذارد.

حالا عدد کلی را در ۱ ضرب می کنیم. ضرب کردن هر عدد در یک، تغییری در آن نمی‌دهد. پس داریم:

$$۱ \times N = ۱۰۰۰۰ \times ۰ + ۱۰۰۰a + ۱۰۰b + ۱۰c + d$$

سرانجام، این عبارت مربوط به $1\times N$ را به عبارت قبلی مربوط به $10\times N$ می‌افزاییم تا $11\times N$ به دست آید:

$$11\times N = 100000\times 0 + 10000a + 1000b + 100c + 10d$$
$$+ 0 + 10000\times 0 + 1000a + 100b + 10c + d$$

این اعداد را دو تا دو تا جمع می کنیم، به این صورت که به هر جمله، جمله‌ای را که زیرش قرار گرفته می‌افزاییم:

$$11\times N = 0\times 100000 + (a+0)\times 10000 + (b+a)\times 1000$$
$$+ (c+b)\times 100 + (d+c)\times 10 + d + 0$$

از طرف دیگر در حساب معمولی همیشه این خاصیت برقرار است که $a+b=b+a$ بدون توجه به اینکه a و b چه اعدادی باشند. مثلاً $3+5=5+3$. حاصل هر دوی این جفتها ۸ است. پس می‌توانیم ترتیب جفتهای حروفی را که با هم جمع می‌شوند برعکس کنیم. معادلهٔ مربوط به $N\times 11$ با این کار به صورت زیر در می اید:

$$11\times N = 0\times 100000 + (0+a)\times 10000 + (a+b)\times 1000$$
$$+ (b+c)\times 100 + (c+d)\times 10 + d + 0$$

این همان «دستور ضرب اعداد در یازده» است. برای ضرب کردن اعداد در ۱۱، به یکایک ارقام عدد مفروض «همسایه»اش را می‌افزاییم. همسایهٔ a رقم b است، زیرا عدد مفروض در شیوهٔ معمولی نوشتن، به صورت $abcd$ است. همسایهٔ b رقم c است. در اینجا هم، هر رقم را با همسایه‌اش جمع کرده‌ایم و معادلهٔ مربوط به $N\times 11$ همان دستور ضرب اعداد در یازده است که قبلاً به کار می‌بردیم. به این ترتیب درستی این دستور ثابت می‌شود.

چرا صفری جلوی عدد مفروض گذاشتیم؟ برای به حساب آوردن «ده بر یک» که ممکن است در محاسبه داشته باشیم. توجه کنید که در

مورد ده بر یک باید به روش معمولی عمل کنیم. فرض کنید b برابر با ۷ و c برابر با ۸ باشد. در این صورت بخشی از جواب، جملهٔ $(b + c) \times ۱۰۰$ خواهد بود که می‌شود $۱۰۰ \times (۸ + ۷)$ و حاصل آن ۱۰۰۰ بعلاوهٔ ۵۰۰ (یا ۱۵۰۰) است. پس این جمله علاوه بر مرتبهٔ «صدگان» جواب در مرتبهٔ «هزارگان» هم به اندازهٔ عدد ۱، اثر می گذارد. این ۱ را در گفتگوی عادی «ده بر یک» می‌نامیم. جملهٔ هزارگان جواب در معادلهٔ بالا $۱۰۰۰ \times (a + b)$ است. اما رقم ۱ را از جملهٔ صدگان به‌اینجا نقل کرده‌ایم، پس به ازای $b = ۷$ و $c = ۸$، خواهیم داشت $۱۰۰۰ \times (۱ + b + a)$. معلوم می‌شود که رقم ۱ از عدد ۱۵ یا هر عدد دیگری که داریم، باید به مرتبهٔ بالاتر منتقل شود.

هنگامی که عدد مفروض در محدودهٔ ۹۰۰۰ باشد، انتظار می‌رود که درآخرین مرحله ده بر یکی داشته باشیم. به همین علت است که باید صفری جلوی آن بگذاریم. فرض کنید a = ۹ و b = ۸ به طوری که عدد مفروض در محدودهٔ ۹۸۰۰ قرار گیرد. آن را در ۱۱ ضرب می کنیم. در مرتبهٔ هزارگان چه خواهیم داشت؟ می‌نویسم $a + b = ۹ + ۸ = ۱۷$ که اگر c رقم بزرگی باشد، احتمالاً ده بر یکی هم به این مجموع باید افزود. در هر صورت، مجموع دست کم ۱۷ است. اینجا باید ده بر یک را به مرتبهٔ بالاتر منتقل کنیم. پس در مرتبهٔ ده هزارگان چه خواهیم داشت؟ داریم $۱ + a + ۰$ و چون در این مثال $a = ۹$ است، حاصل ۱۰ خواهد بود. بدین ترتیب یک رقم ۱ به مرتبهٔ صدهزارگان منتقل می‌شود. این مرتبه به صورت $۱۰۰۰۰۰ \times (۱+۰)$ در می آید. می‌بینیم که با گذاشتن صفری جلوی عدد مفروض جایی برای منتقل کردن این وجود خواهد داشت. این کل کاری است که صفر جلو عدد انجام می‌دهد و کم کاری هم نیست. اگر رقم منتقل شده را فراموش کنیم جواب پاک غلط در می آید.

آنچه گفته شد در مورد همهٔ عددهای چهار رقمی صادق است. در

مورد عددهای پنج رقمی و سایر اعداد اوضاع از چه قرار است؟ برای پاسخگویی به سؤال دو راه وجود دارد که هر دو نتیجه بخش هستند:

۱. با توجه به اینکه از موضوع چهار رقمی بودن عدد مفروض استفاده‌ای نکردیم، براحتی می‌توانیم بگوییم که «همین استدلال مسلماً برای اعدادی با هر طول صادق است». مثلاً عدد پنج رقمی، یک حرف بیشتر خواهد داشت و به صورت $abcde$ خواهد بود. اما نحوهٔ ضرب کردن عدد در ۱۰، افزودن خود عدد، و دسته‌بندی حروف به صورت جفتهایی چون $(a + b)$ و غیره عیناً به همان صورت است. پس همان استدلال بخوبی صادق خواهد بود.

۲. روش شُسته رُفته‌ای برای نوشتن اعداد با هر طول وجود دارد و با استفاده از آن همهٔ جنبه‌ها در نظر گرفته می‌شود. کمی بعد به این موضوع خواهیم پرداخت. فعلاً نیاز واقعی به آن نداریم و بهتر است آن را قدری به تعویق بیندازیم.

اعمال جبری

وقتی عبارتی جبری به صورت $1000a + 100b + 10c + d$ نوشتیم، با آن چکار می‌خواهیم بکنیم؟ نوشتن به این صورت، هیچ اطلاع تازه‌ای به ما نمی‌دهد. همیشه باید کاری روی این عبارت انجام شود: یا باید آن را با عبارتهای دیگر ترکیب کنیم، همان طور که چند بند بالاتر عددی را به منظور ضرب کردن با ۱۱ ترکیب کردیم، یا در غیر این صورت باید آن را به طریق دیگری تغییر دهیم. در هر حال، این کار زیر عنوان رسمی و نسبتاً برجستهٔ «اعمال جبری» خوانده می‌شود.

بی شک در مدرسه با این مطلب در جبر یا در حساب برخورد کرده‌اید. شاید بخشی از آن تنها در مثالها آمده و هیچ گاه بروشنی بیان نشده بود ولی در هر صورت حتماً به نحوی مطرح شده بود. اما شاید

برخی انواع عملهای ممکن برایتان تازگی نداشته باشد و همچنین ممکن است وسوسه شوید که بعضی از انواع نادرست عملها را به کار ببندید. بعضی از دگرگونیها در آرایش ظاهری اعداد و حروف بخردانه به نظر می‌رسد ولی عملاً منجر به جواب غلط می‌شود. پس برای یادآوری آن مطالب بد نیست فهرستی از راههای مجاز تغییر دادن عبارتهای جبری را ذکر کنیم:

دسته‌بندی به صورت پرانتز یا کروشه

این کار را اندکی پیشتر، در «دستور ضرب اعداد در یازده» انجام دادیم. آنجا عبارت $(a+b) \times ۱۰۰۰$ و عبارتهای نظیر آن داشتیم. حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن a مساوی با ۲ و b مساوی با ۳ باشد؛ در این صورت $a+b$ برابر با ۵ است. دراین‌حالت $(a+b) \times ۱۰۰۰$ برابر با ۵۰۰۰ است. این روال طبیعی، سادهٔ کار است.

با وجود این، باید قدری مراقب بود. در عبارتهای پیچیده خطر اشتباه کردن وجود دارد مگر آنکه دستورهای خاصی را به یاد داشته باشیم یا مبانی موضوع را خوب بدانیم.

در استفاده از پرانتز یا کروشه در واقع تنها یک نکتهٔ اساسی وجود دارد. در برخورد با پرانتز یا کروشه باید آنچه را درون آنهاست یک عدد بینگاریم. علامتهای به کار رفته هم به طور طبیعی همین مفهوم را القا می‌کنند. فرض کنید به عنوان مثال $۲\times(۵+۱)$ را داشته باشیم. می‌خواهیم ۵+۱ را به عنوان یک مفهوم منفرد در نظر بگیریم، بنابراین، آن را داخل پرانتز می‌گذاریم. سپس به جای (۵+۱) عدد منفرد نظیرش را که ۶ است می‌نویسیم و داریم:

$$۲\times(۵+۱)=۲\times۶$$
$$=۱۲$$

اکنون فرض کنید داخل کروشه یا پرانتز تفریقی داشته باشیم، مثل

(۱-۵)×۲ . همان اصل را به کار می‌بندیم و داریم

$$۲ \times (۵-۱) = ۲ \times ۴$$
$$= ۸$$

واژهٔ «پرانتز» را برای علامت کمانی شکل و واژهٔ «کروشه» را برای علامت گوشه‌دار به کار می‌بریم. خیلی وقتها درون کروشه پرانتز داریم، مثل این حالت:

$$۲ \times [(۵+۱)-(۳-۲)]$$

در این مورد چه باید بکنیم؟ اصل بر این است که آنچه را یکجا دسته‌بندی شده، به عنوان یک عدد تصور کنیم. در نتیجه باید کار را از درونی‌ترین دسته‌بندی آغاز کرد. یعنی فوراً نمی‌توانیم با [(۲-۳)-(۱+۵)] کاری بکنیم، زیرا ابتدا نمی‌دانیم که مقدار عددهای داخل کروشه چقدر است. باید از جایی شروع کنیم که نتیجه‌اش بلافاصله معلوم است. این جا ۱+۵ است که به جایش ۶ می گذاریم. به همین ترتیب می‌دانیم که ۲-۳ می‌شود ۱. پس می‌توانیم با اطمینان بنویسیم

$$۲ \times [(۵+۱)-(۳-۲)] = ۲ \times [۶-۱]$$

پس کار تقریباً تمام شده زیرا ۱-۶ برابر است با ۵ و بنابراین

$$۲ \times [(۵+۱)-(۳-۲)] = ۲ \times [۶-۱]$$
$$= ۲ \times ۵$$
$$= ۱۰$$

از اینجا به این دستور می‌رسیم که: از درونی‌ترین دسته‌ها آغاز کنید به سمت بیرون بیایید.

وقتی به جای اعداد از حروف استفاده می کنیم وضع قدری فرق دارد، زیرا معلوم است که با محاسبهٔ واقعی نمی‌توانیم از دست پرانتزها بگریزیم. مثلاً $(a + b) \times ۱۰۰۰$ را نمی‌توانیم با انجام عمل جمع واقعی ساده کنیم،

زیرا نمی‌خواهیم هیچ مقادیر خاصی برای a و b در نظر بگیریم. در این مورد، احتمالاً باید عبارت را به همین صورت نگاه داریم.

با این حال خیلی وقتها راحت‌تر آن است که با شیوهٔ دیگری از دست پرانتزها خلاص شویم. این شیوه، «حذف پرانتزها» نام دارد و در مثال بالا چنین خواهد بود

$$۲ \times (۵ + ۱) = ۲ \times ۵ + ۲ \times ۱$$

که پرانتزها را حذف کرده‌ایم و برای جبران این حذف هر آنچه را درون پرانتز بوده در ۲ ضرب کرده‌ایم. توجه کنید که با این کار به نتیجهٔ درست هم می‌رسیم:

$$\begin{aligned} ۲ \times (۵ + ۱) &= ۲ \times ۵ + ۲ \times ۱ \\ &= ۱۰ + ۲ \\ &= ۱۲ \end{aligned}$$

نتیجهٔ ۱۲ همان چیزی است که قبلاً هم از ضرب ۲ در ٦ به دست آوردیم.

در کار با حروف، وضعی به شکل زیر خواهیم داشت:

$$a\,(x + y + z) = ax + ay + az$$

اینجا همه چیز را در عدد a ضرب کرده‌ایم. در طرف چپ علامت تساوی حاصل ضرب مجموع $z + y + z$ در a را داریم. در طرف راست، حاصل ضرب جداگانهٔ هر یک از این سه حرف در a وجود دارد. اگر $a = ۳$ و $x = ۵$، $y = ۲$، و $z = ٤$ باشد (این اعداد را بدون دلیل خاصی، صرفاً به عنوان مثال اختیار کرده‌ایم)، خواهیم داشت:

$$۳(۵ + ۲ + ۴) = ۳ \times ۵ + ۳ \times ۲ + ۳ \times ۴$$

که می‌شود $۳ \times ۱۱ = ۱۵ + ۶ + ۱۲$

یا $۳۳ = ۳۳$

پس اینجا روش ضرب کردن در یکایک جمله‌ها، نتیجهٔ درست داده، همان طور که همیشه باید بدهد.

وقتی فقط عمل جمع داریم، کافی است پرانتزها را برداریم

$$۲ + (۵ + ۱) = ۲ + ۵ + ۱$$

که می‌شود $۲ + ۶ = ۷ + ۱$

یا $= ۸$

وجود علامت منها درون پرانتز مشکلی ایجاد نمی کند. باز هم کافی است فقط پرانتزها را حذف کنیم:

$$۲ + (۵ - ۱) = ۲ + ۴$$

$$۲ + ۴ = ۶$$

اما وجود علامت منها بیرون از پرانتز، جلوی کل پرانتز، به‌معنای آن است که باید همهٔ آنچه را درون پرانتز است به منزلهٔ یک عدد منفرد، تفریق کنیم ولی این کار قدری درد سر دارد. وقتی پرانتزها را بر می‌داریم، باید همهٔ علامتهای داخل پرانتز را بر عکس کنیم. همهٔ علامتهای مثبت به منفی و همهٔ منفی‌ها به مثبت تبدیل می‌شوند. مثل آنچه در زیر می‌بینید:

$$۸ - (۵ - ۱ + ۳ - ۲) = ۸ - ۵ + ۱ - ۳ + ۲$$

در سمت چپ دو علامت منفی داریم، ۱- و ۲-، و یک علامت مثبت، ۳+. عدد ۵ هم دارای علامت مثبت محسوب می‌شود. هر گاه جلوی عددی علامتی گذاشته نشود، نه مثبت و نه منفی، در این صورت علامت آن مثبت دانسته می‌شود.

توجه کنید که علت درست بودن این کار آن است که در طرف چپ معادله:

۸ - (۵-۱+۳-۲) می‌شود ۸- (٤+۱) = ۸-۵ = ۳

و در طرف راست:

۸-۵+۱-۳+۲ می‌شود ۳+۱-۳+۲= ۳

طرف چپ معادله با ۳ برابر است، طرف راست هم مساوی با ۳، پس معادله درست است.

مشابه این موضوع برای حروف به صورت زیر خواهد بود:

$$a-(m-n+s-t)=a-m+n-s+t$$

توجه کنید که در صورت تمایل می‌توانیم خلاف این کار را انجام دهیم. به جای حذف پرانتزها می‌توانیم در جایی که پرانتزی وجود ندارد پرانتز بگذاریم و گاه این کار مفید واقع می‌شود. اینکه پرانتزی حذف شود یا پرانتز تازه‌ای گذاشته شود، به وضع خاص مورد نظر بستگی دارد. می‌دانیم که:

$$۲(a+b+c)=۲a+۲b+۲c$$

دو عبارتی که یکی در طرف چپ و دیگری در طرف راست علامت تساوی واقعند. با یکدیگر برابرند و می‌توانیم در هر مسئله یا محاسبه‌ای یکی از آنها را به جای دیگری بگذاریم. پس اگر ضمن حل مسئله‌ای متوجه شویم که عبارت $۲a + ۲b + ۲c$ داریم، در صورت تمایل حق داریم به جای آن $۲(a + b + c)$ بگذاریم. این کار «بیرون کشیدن ۲» یا «فاکتور گرفتن از ۲» است و خیلی وقتها چنین کاری مفید واقع می‌شود.

خیلی وقتها دو عبارت داخل پرانتز در کنار یکدیگر داریم، به این صورت:

$(a+d)+(c-d)$: جمع

$(a+b)-(c-d)$: یا تفریق

$(a+b)(c-d)$: یا ضرب

ردیف آخر در واقع همان $(a+b)\times(c-d)$ است که معمولاً هنگام کار با حروف به جای اعداد، علامت ضرب را حذف می کنند. در همهٔ این موارد دو کار باید انجام گیرد:

۱. حذف یکی از دو جفت پرانتز ــ به طور اختیاری ــ بدون تغییر دادن جفت دیگر، یعنی تنها یکی از پرانتزها را حذف می‌کنیم؛ سپس

۲. جذف جفت دیگر پرانتزها.

مثلاً، در یک جمع ساده خواهیم داشت:

جمع :

$$(a+b)+(c-d)=a+b+(c-d)$$
هنوز $(c-d)$ را یک کمیت به شمار می‌آوریم!
$$=a+b+c-d$$

تفریق :

$$(a+b)-(c-d)=a+b-(c-d)$$
$$=a+b-c+d$$
علامت d عوض می‌شود

ضرب :

$$(a+b)\times(c-d)=(a+b)(c-d)$$
$$=a(c-d)+b(c-d)$$
هنوز $(c-d)$ را یک عدد به شمار می‌آوریم
$$=ac-ad+bc-bd$$

معادله‌ها

برای عمل کردن روی معادله‌ها، از یک اصل اساسی در اوضاع مختلف استفاده می کنیم. ماهیت اصل مزبور این است: عبارتی که در طرف چپ علامت تساوی نوشته شده نشان دهندهٔ یک کمیت است، و آنچه در طرف راست نوشته شده، صورت دیگری برای نمایش همان است. مثلاً:

$$a+۲b-۱=۱۵$$

یعنی اینکه a + ۲b-۱ صورت دیگری برای نوشتن کمیت ۱۵ است. هر کاری که با a + ۲b-۱ بکنیم، مثلاً دو برابر کردن یا افزودن ۱ به آن، باید روی ۱۵ در طرف دیگر علامت تساوی هم انجام شود تا رابطهٔ تساوی برقرار بماند:

$$a+۲b-۱=۱۵$$

$$۲(a+۲b-۱)=۳۰ \quad \text{: دو برابر}$$

$$a+۲b-۱+۱=۱۶ \quad \text{: بعلاوهٔ ۱}$$

$$(a+۲b-۱)(a+۲b+۱)=۱۵\times ۱۵ \quad \text{: به توان دو}$$

خلاصه کنیم: هر کاری که در طرف چپ معادله‌ای می‌کنیم باید درطرف راست آن هم انجام شود. اما همیشه به یاد داشته باشید که همهٔ آنچه در طرف چپ علامت تساوی قرار گرفته باید یک کمیت منفرد به حساب آید و در مورد عبارت طرف راست هم همین طور. یعنی باید طوری در مورد آن عمل کرد که گویی داخل پرانتز قرار گرفته است، چنانکه واقعاً هم در بالا برای دو برابر کردن و به توان دو رساندن معادله، پرانتزها را گذاشتیم.

با استفاده از آنچه در بخشهای قبل گفته شد کارهای دیگری هم می‌توانیم بکنیم، مثلاً:

$2a+4b-2=30$: دو برابر کردن معادله

$a+2b=16$: «جمع کردن» معادله با «۱»

$(a+2b-1)^2=225$: مجذور کردن معادله

عبارت موجود در معادلهٔ آخر، که در آن یک عدد ۲ قدری بالاتر از ردیف نوشته شده، چیزی است که قبلاً در فصل مربوط به جذر و مجذور به آن برخورد کرده‌ایم. این ۲ ی کوچک «به‌توان دو» خوانده‌می‌شود و وقتی کنار عبارتی قرار می گیرد به معنای آن است که این عبارت در خودش ضرب می‌شود. عبارت 7^2 یعنی ۴۹، زیرا باید ۷ را در خودش ضرب کنیم. چون ۲ تا ۷ در یکدیگر ضرب می‌شود، این عدد ۲ را می‌نویسیم.

این اصل اساسی که هر کار ی با یک طرف معادله کردیم باید با طرف دیگرش هم بکنیم، بسته به کاری که می کنیم، شکلهای گوناگونی به خود می گیرد. بخصوص دو شکل خاص هست که زیاد به کار می‌رود:

۱. افزودن عدد یکسانی به دو طرف معادله. این کار شامل تفریق عدد یکسانی از هر دو طرف نیز می‌شود، زیرا تفریق کردن معادل است با افزودن عددی منفی. مثلاً:

$$x-1=5$$

هر دو طرف را با ۱ جمع می کنیم، و داریم

$$x-1+1=5+1$$

یعنی

$$x=6$$

اغلب از این کار به عنوان «بردن عددی به طرف دیگر» یاد می‌شود. عملاً هم در اینجا عدد ۱ از عبارت $x-1$ را به طرف راست می‌بریم و آن را به ۵ می‌افزاییم. در طرف چپ منهای ۱ داشتیم، که در طرف راست تبدیل به بعلاوهٔ ۱ شد. همیشه همین طور است. این را می‌توانیم یک دستور کلی بدانیم و واقعاً هم چنین دستوری داریم که:

هنگام انتقال به طرف دیگر، علامت تغییر می‌کند.

همین قدر که متوجه می‌شویم در مثال ما چگونه x - ۱ تبدیل به x - ۱+۱ شده که با x+۰ برابر است، به این دستور تسلط یافته‌ایم، بی آنکه بخواهیم آن را از بر کنیم. آنچه اینجا اتفاق افتاد این بود که در طرف چپ چیزی را افزودیم که برای از بین بردن منهای ۱ لازم بود ــ عدد ۱ را اضافه کردیم ــ و به این ترتیب منهای ۱ را در طرف چپ حذف کردیم. برای آنکه تساوی برقرار بماند باید ۱ را به طرف راست هم اضافه کنیم، که افزودیم. در هر معادله، هر یک از جمله‌ها را می‌توانیم به همین طریق به طرف دیگر معادله منتقل کنیم.

۲. ضرب یا تقسیم کردن دو طرف معادله به طرز یکسان. مثلاً

$$۳+۴=۷$$

$$۵(۳+۴)=۳۵ \quad \text{:ضرب در ۵}$$

$$۵\times۷=۳۵ \quad \text{:که می‌شود}$$

$$۱۵+۲۰=۳۵ \quad \text{:یا}$$

در جبر وقتی هم که به جای اعداد، حروف را به کار می‌بریم، همین شیوه دنبال می‌شود، مانند مثال زیر:

$$x^۲+x+\frac{۳}{۴}=\frac{۷}{۴}$$

$$۴\left(x^۲+x+\frac{۳}{۴}\right)=۴\times\frac{۷}{۴}=۷ \quad \text{: ضرب در ۴}$$

$$۴x^۲+۴x+۳=۷$$

با این کار مخرجها حذف می‌شوند و معادله ساده‌تر می‌شود. معادلهٔ جدید، هم ارز همان معادلهٔ کسردار است ولی اعمال بعدی روی آن راحت‌تر انجام می‌شود.

مثال ۱: در آغاز این فصل معمایی مطرح کردیم. اکنون بد نیست با استفاده از جبر آن را مستقیما حل کنیم.
در این معما سه عدد داشتیم ــ طول سه تخته، که به صورت عدد بیان می‌شود ــ و این اعداد طبق صورت معما دارای خواص زیرند:

۱. می‌دانیم که اولین عدد ۱ است.
۲. دومی برابر است با اولی بعلاوهٔ یک سوم سومی، و
۳. سومی برابر است با مجموع دوتای اول.

نخستین عدد از این اعداد را x، دومی را y و سومی را z می‌نامیم. سه حکمی را که در بالا بیان شد می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} &(۱)\ x = ۱ \\ &(۲)\ y = x + \tfrac{۱}{۳}z \\ &(۳)\ z = x + y \end{aligned}$$

برای راحت شدن از دست x، در دو معادلهٔ دیگر هر جا x داریم معادلهٔ (۱)، $x=۱$ را به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} &(۲)\ y = ۱ + \tfrac{۱}{۳}z \\ &(۳)\ z = ۱ + y \end{aligned}$$

با رسیدن به این صورت جدید (۲) می‌توانیم y را از (۳) حذف کنیم. در (۳) به جای y معادلش را می گذاریم:

$$\begin{aligned} (۳)\ z &= ۱ + (۱ + \tfrac{۱}{۳}z) \\ &= ۲ + \tfrac{۱}{۳}z \end{aligned}$$

این معادله شامل کسر است و کار کردن با کسر به‌راحتی کار کردن با اعداد صحیح نیست، پس کسرها را از بین می‌بریم. با ضرب کردن در

۳، داریم:

$$۳z = ۳ \times ۲ + ۳ \times \frac{۱}{۳} z$$

$$۳z = ۶ + z$$

از هر دو طرف z را تفریق می کنیم (یا z را به طرف دیگر می‌بریم):

$$۳z - z = ۶ + z - z$$

$$۲z = ۶$$

هر دو طرف را بر ۲ تقسیم می کنیم، و بخشی از جواب به دست می آید:

$$z = ۳$$

حالا y چقدر است؟ آن را با استفاده از معادلهٔ (۳) می‌توانیم پیدا کنیم:

$$z = ۱ + y$$

که می‌شود: $$۳ = ۱ + y$$

از هر دو طرف ۲ را تفریق می کنیم:

$$۲ = y$$

یعنی: $$y = ۲$$

مقدار x چقدر است؟ می‌دانیم که x برابر با ۱ است، زیرا در مسئله خاص مقدارش داده شده است.

$$x = ۱$$
$$y = ۲$$
$$\underline{z = ۳}$$

طول کُلی تخته هم ۶ در می آید.

مثال ۲: این مثال از یک کتاب ریاضی ایران قدیم گرفته شده است:

ملکه‌ای یک شب گردنبندی از مروارید به گردن بسته بود. ناگهان گردنبند پاره شد و یک سوم مرواریدها بر کف اتاق ریخت. یک چهارم مرواریدها هم روی تخت افتاد و بیست مروارید در رشته باقی ماند. در آغاز چند مروارید روی رشته وجود داشت؟

تعداد مرواریدهای روی رشته قبل از پاره شدن را با x نشان می‌دهیم. تعداد کل مرواریدها:

همه روی رشته $x =$ قبل از حادثه

یک سوم روی زمین، یک چهارم روی تخت، ۲۰ تا روی رشته $\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۴}x+۲۰ =$ بعد از حادثه

اما این دو عبارت مربوط به قبل و بعد از حادثه باید با هم برابر باشند، زیرا همهٔ مرواریدها را در نظر گرفته‌ایم. تساوی زیر را می‌نویسیم:

$$x=\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۴}x+۲۰$$

با ضرب کردن دو طرف در ۱۲، کسرها را از بین می‌بریم:

$$۱۲x=۱۲\times\frac{۱}{۳}x+۱۲\times\frac{۱}{۴}x+۱۲\times ۲۰$$

یعنی: $$۱۲x=۴x+۳x+۲۴۰=۷x+۲۴۰$$

از هر دو طرف معادله $۷x$ را تفریق می‌کنیم:

$$۵x = ۲۴۰$$

یعنی: $$x = ۴۸$$

گردنبند در آغاز ۴۸ مروارید داشته است. براحتی می‌توانید امتحان کنید که گردنبندی دارای ۴۸ مروارید با صورت مسئله جور در می آید.

روش تراختنبر گ از دیدگاه جبر

دستور ضرب اعداد در شش

از این روشهای تغییر شکل دادن معادله‌ها استفاده می کنیم و نشان می دهیم که دستور ضرب اعداد در شش و سایر دستورهای این روش واقعاً جواب درست را می‌دهند. ضمناً با این کار معلوم می‌شود که جواب درست چگونه از این دستور به دست می آید و این موضوع جالبی است زیرا موجب می‌شود دید چیره‌تری نسبت به دستور مورد نظر پیدا کنیم.

دستور ضرب اعداد در شش می گوید «با نصف همسایه جمع می کنیم، اگر فرد باشد پنج تا هم اضافه می کنیم» یعنی اگر خود عدد فرد باشد، و اگر عدد فرد نباشد این پنج را اضافه نمی کنیم. با این کار حاصل ضرب اعداد در شش به دست می آید. برای رسیدن به این دستور، شش را به شکل خاصی می‌نویسیم:

$$۶=۵+۱$$

$$۶=\frac{۱}{۲}\times ۱۰+۱$$

٦ را به صورت بالا می‌نویسیم. عددی را که باید در ٦ ضرب شود چطور می‌نویسیم؟ در صورت تمایل می‌توانیم این عدد را N بنامیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم (مثلاً ٤٥٢٨؛ اما نمی‌خواهیم اولین رقم را محدود کنیم که ٤ باشد، پس آن را a می‌نامیم، به همین ترتیب رقمهای دیگر را هم b، c، d می‌خوانیم):

$$N=a\ b\ c\ d$$

$$N=a\times ۱۰۰۰+b\times ۱۰۰+c\times ۱۰+d$$

$$=۱۰۰۰a+۱۰۰b+c+d$$

در اینجا N را به عنوان عددی چهار رقمی گرفته‌ایم، ولی این فقط به خاطر

مشخص بودن کار است. اگر عدد را پنج رقمی می گرفتیم، شروع آن ۱۰۰۰۰ ضرب در a تا آخر، می شد.

می خواهیم این عدد N را در ۶ ضرب کنیم. برای جلوگیری از اشتباه، ضرب دو عدد را به صورت نقطه‌ای بین آن دو نشان می‌دهیم و مثلاً حاصل ضرب ۵ در ۷ را به صورت ۵.۷ نشان می‌دهیم. حالا N را در ۶ ضرب می کنیم:

زیرا ۶ برابر است با $\frac{۱}{۲}\cdot ۱۰+۱$

$$۶\cdot N=\left(\frac{۱}{۲}\cdot ۱۰+۱\right)\cdot N$$

پرانتزها را حذف می‌کنیم

$$=\frac{۱}{۲}\cdot ۱۰\cdot N+N$$

به جای عدد چهار رقمی، صورت گسترده‌اش را می گذاریم:

$$۶\cdot N=\frac{۱}{۲}\cdot ۱۰\cdot (a\cdot ۱۰۰۰+b\cdot ۱۰۰+c\cdot ۱۰+d)$$
$$+۱\cdot (a\cdot ۱۰۰۰+b\cdot ۱۰۰+c\cdot ۱۰+d)$$

حالا پرانتزهای معادله را در هر دو جا حذف می کنیم:

$$۶\cdot N=\frac{۱}{۲}\cdot ۱۰\cdot a\cdot ۱۰۰۰+\frac{۱}{۲}\cdot ۱۰\cdot b\cdot ۱۰۰+\frac{۱}{۲}\cdot ۱۰\cdot c\cdot ۱۰$$
$$+\frac{۱}{۲}\cdot ۱۰\cdot d+a\cdot ۱۰۰۰+b\cdot ۱۰۰+c\cdot ۱۰+d$$

در اولین جملهٔ پس از علامت تساوی می‌توانیم ۱۰ و ۱۰۰۰ رادر یکدیگر ضرب کنیم تا ۱۰۰۰۰ به دست آید، چنانکه

$$\frac{۱}{۲}\cdot ۱۰\cdot a\cdot ۱۰۰۰ \text{ بشود } \rightarrow \frac{۱}{۲}\cdot a\cdot ۱۰۰۰۰$$

ضربهای مشابهی هم می‌توانیم در جمله های دیگر انجام دهیم. نتیجه به صورت صفحهٔ بعد خواهد بود:

$$۶\cdot N=\frac{۱}{۲}\cdot a\cdot ۱۰۰۰۰+\frac{۱}{۲}\cdot b\cdot ۱۰۰۰+\frac{۱}{۲}\cdot c\cdot ۱۰۰+\frac{۱}{۲}\cdot d\cdot ۱۰+a\cdot ۱۰۰۰+b\cdot ۱۰۰+c\cdot ۱۰+d$$

اکنون به نقطهٔ حساس ماجرا رسیده‌ایم. ترتیب قرار گرفتن جمله‌ها را عوض می کنیم. دو جمله‌ای که به صورت «چیزی ضرب در ۱۰۰۰» هستند کنار هم قرار می گیرند؛ آنها هم که چیزی ضرب در ۱۰۰ هستند کنار هم، تا آخر:

$$\begin{aligned}۶\cdot N=&\frac{۱}{۲}\cdot a\cdot ۱۰۰۰۰\\&+\frac{۱}{۲}\cdot b\cdot ۱۰۰۰+a\cdot ۱۰۰۰\\&+\frac{۱}{۲}\cdot c\cdot ۱۰۰+b\cdot ۱۰۰\\&+\frac{۱}{۲}\cdot d\cdot ۱۰+c\cdot ۱۰\\&+d\end{aligned}$$

حالا می‌توانیم، همان طور که چند صفحه قبل دیدیم، پرانتزها را وارد کنیم. در دومین سطر بالا، دو جمله با یکدیگر جمع می‌شوند و هر جمله به صورت چیزی ضرب در هزار است. پس می‌توانیم از این ۱۰۰۰ «فاکتور» بگیریم و آنچه را که می‌ماند داخل پرانتز ببریم:

$$\frac{۱}{۲}\cdot b\cdot ۱۰۰۰+a\cdot ۱۰۰۰=\left(\frac{۱}{۲}\cdot b+a\right)\cdot ۱۰۰۰$$

همین کار در سطرهای دیگر هم انجام می‌شود:

$$\begin{aligned}۶\cdot N=&\frac{۱}{۲}\cdot a\cdot ۱۰۰۰۰\\&+\left(a+\frac{۱}{۲}\cdot b\right)\cdot ۱۰۰۰+\end{aligned}$$

$$+\left(b+\frac{۱}{۲}\cdot c\right)\cdot ۱۰۰$$

$$+\left(c+\frac{۱}{۲}\cdot d\right)\cdot ۱۰$$

$$+\left(d+\frac{۱}{۲}\cdot ۰\right)\cdot ۱$$ زیرا هر چیزی ضرب در صفر، می‌شود صفر

الگوی عمل در اینجا روشن است. جملهٔ $\frac{۱}{۲}\cdot ۰$ را برای کامل شدن الگو اضافه کردیم؛ همیشه اگر بخواهیم حق داریم به هر چیزی صفر را بیفزایم، زیرا اضافه کردن صفر، عدد را کم یا زیاد نمی‌کند.

این الگو هنوز کامل نیست. برای کامل کردن آن می‌توانیم یک جملهٔ صفر هم در آغاز به سطر اول بیفزاییم. جملهٔ $\frac{۱}{۲}\cdot a\cdot ۱۰۰۰۰$ را به صورت $۰+\frac{۱}{۲}\cdot a\cdot ۱۰۰۰۰$ می‌نویسیم. در این صورت:

$$۶\cdot N=\left(۰+\frac{۱}{۲}\cdot a\right)\cdot ۱۰۰۰۰$$

$$+\left(a+\frac{۱}{۲}\cdot b\right)\cdot ۱۰۰۰$$

$$+\left(b+\frac{۱}{۲}\cdot c\right)\cdot ۱۰۰$$

$$+\left(c+\frac{۱}{۲}\cdot d\right)\cdot ۱۰$$

$$+\left(d+\frac{۱}{۲}\cdot ۱\right)\cdot ۱$$

«دستور ضرب اعداد در شش» در بالا بخوبی دیده می‌شود. عدد اولیهٔ N در نوشتن معمولی به صورت عدد چهار رقمی $abcd$ بود به طوری که a رقم مرتبهٔ هزارگان بود تا آخر. به جای a در مرتبه هزارگان جواب، داریم $(a+\frac{۱}{۲}\cdot b)\cdot ۱۰۰۰$ یعنی رقم موجود در این مرتبه، بعلاوهٔ نصف همسایهٔ طرف راست آن که $(\frac{۱}{۲}\cdot b)$ است. به همین ترتیب در همهٔ

مرتبه‌های دیگر نیز «عدد را با همسایه‌اش جمع می کنیم.»

اگر عدد مفروض N فقط شامل رقمهای زوج، نظیر ۲ و ٦، باشد قضیه به همین جا ختم می‌شود. اما اگر یک ۳ یا ۷ داشته باشیم اوضاع از چه قرار خواهد بود؟ دستور در این باره می گوید «اگر عدد فرد باشد، آن را با همسایه جمع می کنیم و پنج تا هم می‌افزاییم». در این حالت یکی از عبارتهای $\frac{1}{2}\cdot a$ ، $\frac{1}{2}\cdot b$ و غیره کسری خواهد بود زیرا نصف ۷ یا چیزی از این قبیل است.

اکنون به طریقی چنین وضع ممکنی را در نظر می گیریم. فرض می کنیم یکی از رقمها، مثلاً b فرد است و به جای آن عبارت $2n+1$ می گذاریم. هر عدد صحیح فرد را می‌توانیم به این صورت بنویسیم. مثلاً ۷ برابر است با $2.3+1$، و ۹ با $2.4+1$ برابراست. در اینجا n همان چیزی است که آن را «نیمهٔ کوچکتر» عدد فرد خوانده‌ایم. درمعادلات بالا به جای b عبارت $2n+1$ را می گذاریم و معلوم می‌شود که استدلال بالا در اینجا هم به نتیجه می‌رسد. می‌نویسیم:

$$6\cdot N=\left(0+\frac{1}{2}\cdot a\right)\cdot 10000$$

$$+\left(a+n+\frac{1}{2}\right)\cdot 1000$$

$$+\left(2n+1+\frac{1}{2}\cdot c\right)\cdot 100$$

$+$ سایر جمله‌ها

$$=\left(0+\frac{1}{2}a\right)\cdot 10000+(a+n)\cdot 1000+500$$

$$+\left(2n+1+\frac{1}{2}\cdot c\right)\cdot 100$$

$+$ سایر جمله‌ها

$$=\left(0+\frac{1}{2}a\right)\cdot 10000+(a+n)\cdot 1000+$$

$$+\left(b+\frac{۱}{۲}\cdot c+۵\right)\cdot ۱۰۰$$ (به‌جای $۲n+۱$ همان b را می‌گذاریم)

$+$ سایر جمله‌ها $+$

از اینجا معلوم می‌شود همان‌طور که در دستور هم داشتیم باید از «نیمهٔ کوچکتر» استفاده کنیم و ۵ را بیفزاییم. پس درستی این دستور ثابت می‌شود.

اثبات «دستور ضرب اعداد در شش» برای توضیح هر چه بیشتر موضوع به طور مفصل بیان شد. این کار را دیگر تکرار نمی‌کنیم، زیرا با همین روش، می‌توانیم سایر دستورهای تراختنبرگ را هم به دست آوریم. با درک این دستور ضرب اعداد در شش، کافی است اثبات چند مورد دیگر از روش تراختنبرگ را به اختصار بیان کنیم.

ضرب بدون جدول در حالت کلی

سایر «دستورها» کلاً به روشی همانند آنچه در بخش گذشته دیدیم اثبات می‌شوند. البته دستورهای مربوط به ضرب اعداد در هشت و نه قدری تفاوت دارند. به طور خلاصه:

۱. «دستور ضرب اعداد در هفت» خیلی شبیه دستور ضرب در شش است و فقط در این مورد باید عدد را دو برابر کنیم. در نتیجه، طرز یافتن دستور ضرب در هفت شبیه یافتن دستور ضرب در شش است که در بخش قبل بیان شد، فقط در اینجا به جای ٦.N باید V.N بگذاریم و ۷ را به صورت $\frac{۱}{۲}.۱۰+۲$ بنویسیم، همان طور که ٦ را به صورت $\frac{۱}{۲}.۱۰+۱$ می‌نوشتیم.

۲. «دستور ضرب اعداد در پنج» هم به همین شیوه اثبات می‌شود و فقط در یک چیز متفاوت است. به جای $٦.N=(\frac{۱}{۲}\cdot۱۰+۱).N$ این بار

صورت ساده‌تر ۱۰.N. $\frac{۱}{۲}$ =۵.N را داریم.

اثبات دو دستور مربوط به ضرب اعداد در هفت و در پنج همانند آنچه در بخش قبل دیدیم با انجام تغییرات لازم، صورت می گیرد و در صورت تمایل می‌توانید به قصد تمرین یا سرگرمی این کار را بکنید.

۳. دستورهای مربوط به ضرب در نُه و در هشت به روش دیگری اثبات می شوند، یعنی در یکجا چنانکه خواهیم دید «شگرد» دیگری وارد کار می‌شود.

دستور ضرب اعداد در نُه

لابد به یاد دارید که برای ضرب کردن اعداد در نُه، بدون استفاده از جدول ضرب، به صورت زیر عمل می کنیم:

(۱) رقم سمت راست را از ۱۰ کم می کنیم.

(۲) هر رقم دیگر را از ۹ تفریق می کنیم و سپس همسایه را به حاصل می‌افزاییم.

(۳) وقتی به رقم آخر در انتهای سمت چپ جواب رسیدیم، رقم سمت چپ عدد مفروض منهای ۱ را می گذاریم.

ضمن انجام این کارها ممکن است به طور عادی ده بر یکی داشته باشیم (رقم بزرگتری به مرتبهٔ بعد نقل نمی‌شود).

حالا ببینیم این دستور چطور به دست می آید. رقم ۹ را می‌توانیم به صورت ۱ ــ ۱۰ بنویسیم. این کار را می کنیم، زیرا از این راه به دستور مورد نظر می‌رسیم. ضمناً به ازای هر عدد a، مقدار $۹a$ یا ۹ ضرب در a برابر است با $۱۰a - a$.

می‌توانیم عددی را که در ۹ ضرب می‌شود N بنامیم و آن را به صورت گسترده‌ای که قبلاً داشته‌ایم، بنویسیم:

$$۹.N = ۹ \cdot (a \cdot ۱۰۰۰ + b \cdot ۱۰۰ + c \cdot ۱۰ + d)$$
$$= ۹ \cdot a \cdot ۱۰۰۰ + ۹ \cdot b \cdot ۱۰۰ + ۹ \cdot c \cdot ۱۰ + ۹ \cdot d$$

حالا با استفاده از اینکه ۹ برابر است با ۱۰ منهای ۱، $9a=10a-a$ تا آخر، می‌نویسیم:

$$9\cdot N=10\cdot a\cdot 1000-a\cdot 1000+10\cdot b\cdot 100-b\cdot 100$$
$$+10\cdot c\cdot 10-c\cdot 10+10\cdot d\cdot 1-d\cdot 1$$
$$=a\cdot 10000-a\cdot 1000+b\cdot 1000-b\cdot 100+c\cdot 100$$
$$-c\cdot 10+d\cdot 10-d$$

این شبیه کاری است که در بخش قبل دستور ضرب در شش کرده‌ایم.

اکنون برای رسیدن به دستور ضرب در نُه باید از نکتهٔ تازه‌ای استفاده کنیم. همیشه می‌توانیم یک عدد را جمع و همان عدد را تفریق کنیم، زیرا این کار مقدار را تغییر نمی‌دهد مثلاً اگر به عدد ۲۵ عدد ۲ را بیفزاییم و همین ۲ را هم کم کنیم، داریم ۲-۲+۲۵ که با همان ۲۵ برابر است. جمع و تفریق کردن یک عدد به منزلهٔ جمع کردن با صفر است که مقدار عدد را تغییر نمی‌دهد: ۲۵ بعلاوهٔ صفر همان ۲۵ است.

پس اگر بخواهیم، حق داریم مثلاً ۲۵ را به صورت ۲-۲+۲۵ یا به صورت ۷-۷+۲۵ یا هر چیزی از این قبیل بنویسیم.

این کار بیهوده به نظر می‌رسد؟ چنین برداشتی نادرست است. وقتی با مجموع چند جمله سرو کار داریم این صورت می‌تواند مفید واقع شود. در این گونه موارد می‌توانیم جملهٔ تفریق شده، مثل ۲- را با یک گروه از جمله های دیگر دسته‌بندی کنیم و جملهٔ افزوده شده، مثل ۲+ را با گروه دیگری از جمله‌ها. این نوع دسته‌بندی گاه، که بخت با ما یار باشد، منجر به ساده شدن هر دو گروه از جمله‌ها می‌شود.

در این مثال مربوط به دستور ضرب اعداد در نُه، ۹۰۰۰ را جمع و تفریق می‌کنیم، همین‌طور ۹۰۰ را، همچنین ۹۰ را و ۹ را، به صورت زیر:

$$9\cdot N=a\cdot 10000-9000+9000-a\cdot 1000+b\cdot 1000$$
$$-900+900-b\cdot 100+c\cdot 100-90+90$$
$$-c\cdot 10+d\cdot 10-9+9-d$$

سپس به دسته‌بندی جمله‌های مرتبهٔ «هزارگان» و جمله‌های مرتبهٔ «صدگان» و غیره می‌پردازیم که نتیجه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
۹\cdot N = a\cdot(۱۰۰۰۰) &+ (۹-a+b)\cdot ۱۰۰۰ + (۹-b+c)\cdot ۱۰۰ \\
&+ (۹-c+d)\cdot ۱۰ + (۹-d)\cdot ۱ \\
&- (۹۰۰۰+۹۰۰+۹۰+۹)
\end{aligned}
$$

مجموع عددهای داخل پرانتز درآخرین سطر ۹۹۹۹ است که آن را به صورت ۱ - ۱۰۰۰۰ می‌نویسیم. بنابراین:

$$
\begin{aligned}
۹\cdot N &= a\cdot ۱۰۰۰۰ + (۹-a+b)\cdot ۱۰۰۰ + (۹-b+c)\cdot ۱۰۰ \\
&\quad + (۹-c+d)\cdot ۱۰ + (۹-d)\cdot ۱ - ۱۰۰۰۰ + ۱ \\
&= (a-۱)\cdot ۱۰۰۰۰ + (۹-a+b)\cdot ۱۰۰۰ \\
&\quad + (۹-b+c)\cdot ۱۰۰ + (۹-c+d)\cdot ۱۰ + (۱۰-d)\cdot ۱
\end{aligned}
$$

این دقیقاً همان «دستور ضرب اعداد در نُه» است که به جای کلمات با علامتها بیان شده است.

دستور ضرب اعداد در هشت

رقم ۸ را به صورت ۲ - ۱۰ می‌نویسیم، همان‌طور که ۹ را به صورت ۱ - ۱۰ نوشتیم. سپس همان شیوهٔ بخش قبل را دنبال می کنیم، فقط آنجا که به جمع و تفریق کردن یک عدد می‌رسیم روال کار قدری فرق می کند. قبلاً اعداد ۹۰۰۰، ۹۰۰، ۹۰ و ۹ را جمع و تفریق می کردیم. اکنون برای دستور ضرب اعداد در هشت، دو برابر این عددها را جمع و تفریق می کنیم که عبارت‌اند از ۱۸۰۰۰، ۱۸۰۰، ۱۸۰ و ۱۸. نتیجه این می‌شود که باید حاصل تفریق از ۹ (یا در مرحلهٔ اول، حاصل تفریق از

۱۰) را دو برابر کنیم، و رقم سمت چپ جواب ۲ تا کمتر از رقم سمت چپ عدد مفروض است، نه یکی. این هم دقیقاً همان دستور ضرب اعداد در هشت است.

مجذور کردن اعداد

در یکی از فصلهای گذشته روشهایی برای یافتن مجذور هر عدد، یعنی ضرب کردن هر عدد در خودش بیان کردیم. آنجا بحث را با دو نوع کاملاً خاص از اعداد شروع کردیم:

۱. عددهای دو رقمی که رقم دومشان ۵ است، مثل ۳۵. برای ضرب کردن ۳۵ در ۳۵، رقم ۳ را در رقم یکی بیشتر از آن، یعنی ٤ ضرب می کنیم، حاصل ۱۲ می‌شود. به دنبال این ۱۲، می‌نویسیم ۲۵ و جواب را که ۱۲۲۵ است خواهیم داشت.

به زبان علامتهای جبری، این گونه اعداد به صورت $a.۱۰+۵$ هستند. نتیجهٔ مطلوب، یعنی مجذور عدد عبارت است از $(a.۱۰+۵)^۲$ که برابر است با $(a.۱۰+۵)\ (a.۱۰+۵)$.

پرانتزها را بسط می‌دهیم:

$$(a \cdot ۱۰+۵) \cdot (a \cdot ۱۰+۵)=a \cdot ۱۰۰ \cdot (a \cdot ۱۰+۵) +۵ \cdot (a \cdot ۱۰+۵)$$
$$=a \cdot a \cdot ۱۰۰+a \cdot ۵۰+a \cdot ۵۰+۲۵$$
$$=a \cdot a \cdot ۱۰۰+a \cdot ۱۰۰+۲۵$$

حالا دو جملهٔ اول را دسته‌بندی می کنیم و چنانکه در فصل قبل دیدیم بین آنها از a فاکتور می گیریم و پرانتزهای لازم را می گذاریم. عبارت بالا به این صورت در می آید:

$$(a\cdot 10+5)^2=a\cdot(a\cdot 100+100)+25$$
$$=a\cdot(a+1)\cdot 100+25$$

این همان دستور مورد نظر است که با علامتها بیان شده است. زیرا a(a+۱) همان رقم دهگان ضرب در رقم یکی بیشتر است و از ضرب ۱۰۰ معلوم می‌شود که حاصل این ضرب تداخلی با ۲۵ نمی کند (برای اینکه براثر ضرب کردن هر عدد در ۱۰۰، دو صفر به دنبال آن قرار می گیرد).

۲. اگر اولین رقم عدد دو رقمی ۵ باشد، مثل ۵۶، این ۵ را مجذور می کنیم می‌شود ۲۵ و سپس رقم یکان را (که در مورد ۵۶، رقم ۶ است) به آن می‌افزاییم. نتیجه، دو رقم اول جواب است: در مورد ۵۶، بخشی از جواب به این طریق به دست می آید ۳۱؟؟ = ۵۶^2. برای تعیین دو رقم آخر جواب، کافی است رقم یکان عدد مفروض را مجذور کنیم؛ در مورد ۵۶، رقم ۶ را مجذور می کنیم که می‌شود ۳۶. این ۳۶ بقیهٔ جواب است و عدد کامل ۳۱۳۶ است.

چنین عددی به صورت $(5.10+a)^2$ است که برابر می‌شود با $(5.10+a).(5.10+a)$. مثل حالت قبل، پرانتزها را بسط می‌دهیم:

$$(5\cdot 10+a)^2=5\cdot 10\cdot 5\cdot 10+5\cdot 10\cdot a+5\cdot 10\cdot a+a\cdot a$$
$$=25\cdot 100+100\cdot a+a^2$$
$$=(25+a)\cdot 100+a^2$$

این عبارت به زبان علامتها همان چیزی را می گوید که در دستورالعمل بند اول این بخش برای مجذور کردن ۵۶ بیان شد.

۳. برای مجذور کردن هر عدد دو رقمی در حالت کلی، مثلاً در مورد ۷۳، به طریق زیر عمل می کنیم:

(۱) رقم یکان جواب را از مجذور کردن رقم یکان عدد مفروض به دست می آوریم:

(۲) رقم دهگان جواب را با دو برابر کردن حاصل ضرب متوالی عدد مفروض پیدا می کنیم (برای ۷۳، دو برابر ۷ ضرب در ۳، می‌شود ۴۲)؛ و سرانجام

(۳) رقم صدگان و هزارگان جواب از مجذور کردن رقم دهگان عدد مفروض پیدا می‌شود.

پس در مورد ۷۳ می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\text{۷ ۳}^{\text{۲}}}{\text{۵ ۳ }^{\text{۴}}\text{۲ ۹}}$$

چنین عددی در حالت کلی به صورت $a.10+b$ است. آن را مجذور می کنیم:

$$\begin{aligned}(a\cdot 10+b)^2&=(a\cdot 10+b)\cdot(a\cdot 10+b)\\&=a\cdot 10\cdot(a\cdot 10+b)+b\cdot(a\cdot 10+b)\\&=a\cdot 10\cdot a\cdot 10+a\cdot 10\cdot b+b\cdot a\cdot 10+b^2\\&=a^2\cdot 100+2a\cdot b\cdot 10+b^2\end{aligned}$$

این عبارت نهایی هم ارز است با همان دستور کاری که در بالا گفته شد. حاصل ضرب $a.b$ همان حاصل ضرب متوالی یعنی حاصل ضرب رقم یکان در رقم دهگان است. و در معادله دیده می‌شود که باید آن را دو برابر کرد.

عمل ضرب به روش یکان و دهگان

نخست ضرب عددی سه رقمی در عددی یک رقمی را بررسی می کنیم، مثلاً ۶۱۷ ضرب در ۳:

$$\frac{\text{۰ ۶ ۱ ۷} \times \text{۳}}{\text{۱ ۸ ۵ ۱}}$$

این کار چنانکه لابد به یاد می آورید با حرکت دادن یک الگوی د ی در طول عدد ۶۱۷، از راست به چپ انجام می‌شود:

د ی

۰ ۶ ۱ ۷ × ۳

۱

این ۱ رقم «یکان» ۳ ضرب در ۷، یعنی ۲۱ است

و سپس

د ی

۰ ۶ ۱ ۷ × ۳

۵

این ۵ برابر است با رقم یکان ۱ ضرب در ۳ بعلاوهٔ رقم دهگان ۷ ضرب در ۳

و همین کار تا آخر دنبال می‌شود.

اکنون یک عدد سه رقمی را در حالت کلی به صورت جمله‌های جبری در نظر می گیریم. این عدد به صورت $a\ b\ c$ نوشته می‌شود و صورت گستردهٔ آن چنین است:

$$a \cdot ۱۰۰ + b \cdot ۱۰ + c \cdot ۱$$

فرض می کنیم این عدد در n ضرب می‌شود که عددی یک رقمی است. بنابراین، صورت جبری حاصل ضرب مورد نظر چنین است:

$$(a \cdot ۱۰۰ + b \cdot ۱۰ + c \cdot ۱) \cdot n$$

پرانتز را بسط می‌دهیم:

$$(a \cdot ۱۰۰ + b \cdot ۱۰ + c \cdot ۱) \cdot n$$
$$= n \cdot a \cdot ۱۰۰ + n \cdot b \cdot ۱۰ + n \cdot c \cdot ۱$$

هر یک از جمله‌های دوتایی $n.a$، $n.b$ و $n.c$ حاصل ضرب دو عدد یک

رقمی است. حاصل آنها در حالت کلی عددی دو رقمی است، مثلاً ۷ ضرب در ۳ می‌شود ۲۱ که عددی دو رقمی است. برای آنکه رشتهٔ موضوع گم نشود آنها را به صورت عددهای دو رقمی می‌نویسیم. برای این کار، علامتهای جدیدی با زیرنویس به کار می‌بریم. یکی از اینها U_a است که به معنی رقم یکان حاصل ضرب a در مضروب‌فیه n است. عدد n هم مضروب فیه مسئله است و برای نمایش آن به علامت دیگری نیاز نداریم. زیر نویس a در U_a می گوید که باید n را در a ضرب کنیم و حرف U در a به معنای آن است که باید رقم یکان نتیجه را بگیریم. رقم دهگان حاصل ضرب با علامت T_a نشان داده می‌شود و مشابه این علامتها برای b و c هم در نظر گرفته می‌شود :

یکان و دهگان حاصل ضرب

$$n \cdot a = T_a \cdot ۱۰ + U_a$$
$$n \cdot b = T_b \cdot ۱۰ + U_b$$
$$n \cdot c = T_c \cdot ۱۰ + U_c$$

پس حاصل ضرب مطلوب به صورت زیر در می آید :

$$(a \cdot ۱۰۰ + b \cdot ۱۰ + c \cdot ۱) \times n$$
$$= (T_a \cdot ۱۰ + U_a) \cdot ۱۰۰ + (T_b \cdot ۱۰ + U_b) \cdot ۱۰ +$$
$$(T_c \cdot ۱۰ + U_c) \cdot ۱$$

پرانتزها را بسط می‌دهیم:

$$(a \cdot ۱۰۰ + b \cdot ۱۰ + c \cdot ۱) \times n$$
$$= T_a \cdot ۱۰۰۰ + U_a \cdot ۱۰۰ + T_b \cdot ۱۰۰ + U_b \cdot ۱۰ + T_c \cdot ۱۰ + U_c$$
$$= T_a \cdot ۱۰۰۰ + (U_a + T_b) \cdot ۱۰۰ + (U_b + T_c) \cdot ۱۰ + U_c$$

با یادآوری اینکه:

الف) حروف T و U رقمهای یکان و دهگان حاصل ضرب هر رقم در n هستند؛ و

ب) زیرنویس نشان می‌دهد که n در کدام رقم از عدد مفروض ضرب می‌شود،

معلوم می‌شود که معادلهٔ اخیر بیانگر عمل ضرب به روش یکان و دهگان است (حروف U و T به منزله حروف ی و د هستند که قبلاً برای بیان این روش به کار رفته‌اند). به عنوان مثال، جملهٔ ۱۰.(U_b+T_c) را در نظر می گیریم:

U_b = رقم یکان حاصل ضرب b در عدد n

T_c = رقم دهگان حاصل ضرب c در عدد n.

سپس این عمل را برای ضربی که به صورت معمولی نوشته شده انجام می‌دهیم:

$$\underline{a\ \ b\ \ c}\ \times\ n$$

علامتهای U_b و T_c را روی خرفهای مربوط به آنها قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccccc} & U_b & T_c & & \\ \hline a & b & c & \times & n \end{array}$$

با گذاشتن این علامتها در جای درست‌شان، دیگر نیازی به زیرنویسها هم نخواهد بود:

$$\begin{array}{ccccc} & U & T & & \\ \hline a & b & c & \times & n \\ & * & & & \end{array}$$

با این کار رقمی از جواب که درمحل ستاره قرار می‌گیرد به دست می‌آید

بقیهٔ رقمهای جواب هم دقیقاً به همین ترتیب از سایر جمله‌های معادله به دست می‌آیند.

عمل ضرب در عددهای طولانیتر

فرض کنید می‌خواهیم ۶۱۷ را در ۲۳ ضرب کنیم. از الگوی د ی برای یافتن هر رقم از جواب استفاده می‌کنیم. هر رقم از جواب با جمع کردن دو عدد حاصل از الگوی د ی به صورت زیر پدیدار می‌شود:

د ی

د ی

۰ ۰ ۶ ۱ ۷ × ۲ ۳

·۱

۱۱؛ ۶۱ با ۳ می‌دهد ۸ = ۰۳ + ۱۸

۱۷ با ۲ می‌دهد ۳ = ۱۴ + ۰۲

و داریم ۱ = ۳ + ۸

صورت کامل حل این مثال چنین است:

۰ ۰ ۶ ۱ ۷ × ۲ ۳

۱ ۴ ·۱ ۹ ۱

فرض کنید عدد سه رقمی دلخواهی، مثلاً abc، را می‌خواهیم در عددی دو رقمی دلخواهی، مثلاً mn ضرب کنیم. صورت گستردهٔ این ضرب چنین است:

$$(a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1) \times (m \cdot 10 + n)$$

پرانتزها را بسط می‌دهیم؛ جواب مطلوب به صورت زیر است:

$$a \cdot 100 \cdot m \cdot 10 + a \cdot 100 \cdot n + b \cdot 10 \cdot m \cdot 10 + b \cdot 10 \cdot n + c \cdot m \cdot 10 + c \cdot n$$

$$= a \cdot m \cdot ۱۰۰۰ + a \cdot n \cdot ۱۰۰ + b \cdot m \cdot ۱۰۰ + b \cdot n \cdot ۱۰ + c \cdot m \cdot ۱۰ + c \cdot n \cdot ۱$$

در نخستین جمله $a.m$ داریم که حاصل ضرب دو رقم در یکدیگر است. این حاصل ضرب در حالت کلی عددی دو رقمی است. باید همهٔ این اعداد دو رقمی مربوط به $a.m$، $a.n$، $b.m$ تا آخر را به صورت عددهای دو رقمی بنویسیم. این کار را کمی پیشتر هنگام ضرب کردن در عددی یک رقمی انجام دادیم. این کار را با استفاده از علامتهای T_a و U_a و غیره انجام شد.

ولی حالا به زیرنویس دیگری نیاز داریم زیرا عدد مفروض را در عددی که بیش از یک رقم دارد ضرب می کنیم. در نصف دفعات رقم m و در نصف دیگر رقم n در جمله‌ها ظاهر می‌شود. در مثال بالا که عددی را در ۲۳ ضرب می کردیم، در نصف دفعات با جفتی کار می کردیم که شامل ۲ بود و در نصف دفعات دیگر با جفتی شامل رقم ۳ از عدد ۲۳. برای آنکه به یاد داشته باشیم که در هر لحظه با کدام یکی کار می کنیم باید زیرنویس دیگری را هم وارد کنیم و برای این منظور علامتی به صورت U_{am} داریم. البته این تنها یک رقم است هر چند که در نوشتنش سه حرف به کار رفته است؛ این دو پانویس را تنها برای راحتی به کار می‌بریم تا یادمان باشد کدام عددها را داریم در یکدیگر ضرب می کنیم.

عبارتهای دو رقمی مورد نیاز ما به قرار زیرند:

$$a \cdot m = T_{am} \cdot ۱۰ + U_{am}$$

$$a \cdot n = T_{an} \cdot ۱۰ + U_{an}$$

$$b \cdot m = T_{bm} \cdot ۱۰ + U_{bm}$$

$$b \cdot n = T_{bn} \cdot ۱۰ + U_{bn}$$

$$c \cdot m = T_{cm} \cdot ۱۰ + U_{cm}$$

$$c \cdot n = T_{cn} \cdot ۱۰ + U_{cn}$$

پس جواب مطلوب عمل ضرب مذکور به صورت زیر در می آید:

$$(T_{am}\cdot 10+U_{am})\cdot 1000+(T_{an}\cdot 10+U_{an})\cdot 100$$
$$+(T_{bm}\cdot 10+U_{bm})\cdot 100+(T_{bn}\cdot 10+U_{bn})\cdot 10$$
$$+(T_{cm}\cdot 10+U_{cm})\cdot 10+(T_{cn}\cdot 10+U_{cn})$$

حالا پرانتزها را بسط می‌دهیم و با تغییر دادن ترتیب جمله‌ها به نتیجهٔ نهایی زیر می‌رسیم:

$$\text{جواب}=T_{am}\cdot 10000+(T_{an}+U_{am}+T_{bm})\cdot 1000$$
$$+(U_{an}+T_{bn}+U_{bm}+T_{cm})\cdot 100$$
$$+(U_{bn}+T_{cn}+U_{cm})\cdot 10+U_{cn}$$

این همان بیان جبری روشی جمع کردن نتایج دو جفت د ی (UT) در هر مرحله از ضرب است. اگر تعداد رقمهای دو عددی که در یکدیگر ضرب می‌شوند بیش از اینها باشد باز هم همین شیوهٔ اثبات را می‌توانیم به کار بندیم.

نمایش اعداد به طول دلخواه

در چند بخش اخیر، با صورت کلی اعداد سرو کار داشتیم مثل عدد $abcd$. این عدد به طور عادی به صورت $a.1000+b.100+c.10+b$ نوشته می‌شود و بیانگر هر عدد چهار رقمی دلخواه است.

این صورت را می‌توانیم کلی‌تر کنیم به طوری که منحصر به عددهای چهار رقمی نباشد. می‌توانیم عبارتی بنویسیم که نشان دهندهٔ هر عددی با هر تعداد رقم باشد. برای این کار باید با دو مطلب آشنا باشیم:

۱. توانهای هر عددی را با نوشتن عدد کوچکی در گوشهٔ بالای سمت راست آن نشان می‌دهیم. قبلاً مجذور ۷ را به صورت 7^2 نوشته‌ایم که در آن ^{2} نشانهٔ آن است که دو عدد ۷ در یکدیگر ضرب می‌شوند، $7^2 = 7\times 7 = 49$. به همین طریق، 7^3 یعنی حاصل ضرب سه ۷ در یکدیگر، $7^3=7\times7\times7=342$. این اصل برای هر توانی چون 7^4، 7^{23} و غیره صادق است.

وقتی این کار را در مورد عدد ۱۰ انجام دهیم متوجه می‌شویم که «نما»ی عدد که قدری بالاتر نوشته می‌شود، نشان می‌دهد که چند صفر به دنبال ۱ قرار گرفته‌اند. مثلاً $10^2=10\times10=100$ که حاصل توان، دو صفر دارد. همچنین 10^4 برابر است با حاصل ضرب چهار ۱۰ در یکدیگر $10^4=10\times10\times10\times10=10000$ که چهار صفر دارد.

۲. علامتی را به کار می‌بریم به صورت Σ که به معنای «تشکیل حاصل جمع» است. این علامت یکی از حروف الفبای یونانی است که «سیگما» نام دارد و معادل "s" انگلیسی است. مثالی از کاربرد آن چنین است:

$$\sum_{n=1}^{3} 2^n = 2^1+2^2+2^3$$

حالا با ترکیب این دو نکته می‌توانیم کلی‌ترین صورت اعداد را بنویسیم. ابتدا باز هم همان عدد چهار رقمی $a.1000+b.100+c.10+d$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از علامت توان، این عبارت را به صورت

$$a\cdot10^3+b\cdot10^2+c\cdot10+d$$

می‌نویسیم (در آخرین جمله، d در ۱ ضرب می‌شود که صفری دنبالش نیست). توانهای ۱۰ برای استفاده از علامت Σ صورت مناسبی دارند زیرا همهٔ آنها را می‌توانیم یکجا با علامت 10^n نشان دهیم. در عدد چهار رقمی، نمای n بترتیب مقادیر ۳، ۲، ۱ و صفر را اختیار می‌کند. ضمناً به

جای a، b، c و d باید حروف جدیدی به صورت زیر بگذاریم:

$$a = a_3 \qquad b = a_2 \qquad c = a_1 \qquad d = a_0$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d = \sum_{n=0}^{n=3} a_n \cdot 10^n$$

اکنون می‌توانیم به سراغ کلی‌ترین صورت عدد برویم، یعنی عددی k رقمی که در آن k می‌تواند هر مقدار دلخواهی باشد. برای این کار کلی‌ترین صورت عدد که آن را N می‌نامیم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$N = \sum_{n=0}^{n=k} a_n \cdot 10^n$$

با استفاده از این علامت و با دنبال کردن همان شیوهٔ استدلالی که در بخشهای قبلی به کار رفت، می‌توانیم دستورهای ضرب را برای اعدادی با هر طول دلخواه به دست آوریم.

دستورالعملهای دیگر روش تراختنبرگ، افزون بر آنچه در بالا آورده شد، نیز با روشهای کلاً از همین نوع به دست می‌آید.

فصل هشتم

پسگفتار

ضمن مطالعهٔ فصلهای قبل با **روش تراختنبرگ برای اعمال اصلی ریاضی** آشنا شدید که در واقع روش تازه‌ای برای انجام بنیادیترین عملهای حساب است. اگر همت کافی به خرج داده باشید، اکنون باید دست کم برداشتی از چگونگی کار در این روش نوظهور ریاضی داشته باشید. مسلماً گهگاه ضمن مطالعه، احساس دشواری کرده‌اید و این امری کاملاً طبیعی است. روش تراختنبرگ با آنچه قبلاً بدان خو کرده‌اید تفاوت دارد، و کنار گذاشتن عادتهای جا افتاده و شیوه‌های قدیمی کار چندان آسانی نیست. اما با قدری شکیبایی می‌توانید بر این مشکل چیره شوید و بهره‌ای که از این راه حاصل می‌شود تلاشهای به کار رفته را چندین برابر جبران می کند.

ارزش این روش جدید را بیش از همه کسانی در خواهند یافت که در کلاسهای ابتدایی حساب درس می‌دهند. چنانکه در فصل اول دیدیم، از این پس مجبور نیستیم شوق طبیعی ذهنهای جوان را با مطالب یکنواخت، طولانی و تکراری پژمرده کنیم. روش قدیمی آنها را وا می‌دارد که وقت خیلی زیادی را برای به خاطر سپردن جدول ضرب صرف کنند. این کار یعنی حفظ کردن ترکیبهای پرشماری از اعداد که

هر یک بتنهایی بی‌معناست و نتیجهٔ طبیعی چنین وضعی ایجاد احساس دلزدگی است. به این ترتیب کل موضوع برای شخص ناخوشایند جلوه می‌کند. اما با بهره گیری از روش نوظهور، می‌توانیم طراوت موضوع را باقی نگاه داریم تا شاگردان جوان به انگیزهٔ ذوق طبیعی خود پیشرفت کنند.

البته در این کتاب مطالب در چارچوب مناسب برای بزرگسالان بیان شده است؛ هنگام عرضهٔ این مطالب به کودکان این چارچوب باید قدری تغییر کند و روی برخی نکات تاکید بیشتری بشود. چگونگی این تغییرات به نوبهٔ خود موضوع جالبی است که در اینجا مجال پرداختن به جزئیات آن را نداریم.

مهمترین نکته‌ای که باید بدان توجه کنیم این است که تمامی این مطالب به شاگردان تدریس شده است. از اواخر دههٔ ۱۹٤٥ به این طرف، پی در پی گروههایی از شاگردان وارد مؤسسه تراختنبرگ شده و آموزش دیده‌اند. در واقع، کار حتی زودتر از این، یعنی وقتی که پروفسور تراختنبرگ خودش به طور خصوصی به چند کودک تعلیم می‌داد آغاز شد. پس از آن، مؤسسهٔ خود را ایجاد کرد و آموزش در قالب کلاسها و با همکاری مربیانی که دستیار او بودند ادامه یافت. به این ترتیب فوت و فنهای شیوهٔ تدریس تکامل یافت و در خلال یک دوران چند ساله به بهترین وجه پرورده شد.

با وجود این نتایج به دست آمده از همان ابتدا دلگرم کننده بود. شاگردان همواره شیفته توانابیهایی نویافتهٔ خود می‌شدند و شوقی که در آنان پدید می آمد موجب پیشرفتهای بعدی می‌شد. به جای آنکه از یکنواختی مطالب روگردان شوند، گوناگونی موضوعها آنها را جلب می کرد. رفته رفته علائق آنان بر اثر موفقیتهایی که کسب می کردند زنده می‌شد. قبلاً هم ضمن خواندن کتاب توجه کرده‌اید که از همان آغاز فصل اول چقدر تازگی وجود دارد که می‌تواند برای شاگردان جذابیت داشته باشد. در هر مرحله نکتهٔ تازه‌ای مطرح می‌شود و در عین حال

معمولا همانندیهایی با مطالب قبلی وجود دارد به طوری که پیوستگی مطلوبی در موضوعها برقرار است. پی بردن به رمز پیشرفت چشمگیر آن کودکان، دشوار نیست.

آنان در درسهای دیگرشان هم جلو افتادند. احساس علاقه یا بی علاقگی روی طیف گسترده‌ای از فعالیتها اثر می گذارد. کسانی که در یک رشته از درس تنبل هستند بزودی از همهٔ درسها بدشان خواهد آمد و «مکتب گریز» خواهند شد. وجود این احساس در انسان امری طبیعی است. به همین ترتیب، کسانی که خوب پیش می‌روند، کسانی که هر روز موفقیت تازه‌ای کسب می کنند و چیز تازه‌ای یاد می گیرند، با روحیه‌ای شاداب به سراغ درسهای دیگر می‌روند. این اشخاص در برخورد با هر درسی اعتماد به نفس دارند و عموماً در این اندیشه‌اند که از هر درسی چه بهره‌ای می‌توانند بگیرند. شیوهٔ درست شروع هم همین است و اگر عامل قوی دیگری آنان را از درس دیگر بیزار نکند، حتماً موفق خواهند شد.

ما دوست داریم که چنین پدیده‌هایی در همهٔ مدارس کشورمان دیده شود. البته واقعیت امر این است که به دلایل گوناگون تغییرات در سطح وسیع همیشه به کُندی صورت می گیرد. به طور معقول نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که هیچ تغییر مهمی در نظام آموزشی کشور ظرف مدتی کمتر از چند دهه صورت بگیرد. اما اگر این کار، ولو بتدریج، صورت بگیرد، چقدر عالی می‌شود! کودکان از رنج این کار گِل رها می‌شوند و درسی که بیشترشان آن را سخت‌ترین درس می‌دانند آسانتر می‌شود. تازه برای بسیاری از آنان، جاذبه‌های نهفته اندک‌اندک نمایان می‌شود.

با این اقدام، تعداد هر چه بیشتری از آنان رفته‌رفته به سوی علوم پایه، که ریاضیات بنیادیترین آنهاست، گرایش می‌یابند و می‌توانیم امیدوار باشیم که سرانجام، این وضع به تأمین ضروری‌ترین نیاز کشور که وجود مهندسان و کارشناسان علوم پایه است، کمک کند.

برای ما بزرگترها دیر است که بخواهیم از مزایای چنین تغییری در

نظام آموزشی به طور مستقیم برخوردار شویم و نمی‌توانیم همپای کودکان از آن بهره بگیریم. اما همین حل مسائل کودکان و مدارس، به طور غیر مستقیم به نفع ما نیز خواهد بود. هر فرد متمدن، عضوی از یک جامعه است. آنچه جامعه را می آزارد، دانسته یا ندانسته فرد را نیز آزار می‌دهد و آنچه به نفع جامعه باشد در درازمدت منافع مستقیمی حتی برای افرادی که مستقیماً درگیر قضیه نیستند به بار خواهد آورد.

مهمتر از این منافع غیر مستقیم، این است که ما بزرگسالان می‌توانیم خودمان هم از روش تراختنبرگ مستقیماً بهره‌مند شویم. شاگردان مؤسسه تراختنبرگ چه کسانی هستند؟ آیا همه‌شان کودکند؟ نه، به هیچ وجه. کلاسهایی برای کودکان و کلاسهایی نیز ویژهٔ بزرگسالان وجود دارد. کسانی که در کلاسهای بزرگسالان شرکت می کنند شور و شوق بیشتری دارند و بیشتراز کودکان ابراز رضایت می کنند. شور و شوق آنان بیشتر است زیرا قدر آنچه را که یاد می گیرند بهتر می‌دانند.

نخستین و مهمترین فایده، جنبهٔ کاملاً کاربردی دارد: افزایش مهارت در انجام محاسبات. امروزه اوضاع در جهتی پیش می‌رود که مهارت و دقت در محاسبه برای همه کس به صورت امری ضروری در می آید. اغلب ما با مشغله‌هایی سرو کار داریم که مستقیماً ریاضی نیستند ولی ریاضیات کم کم در آنها رسوخ می کند. حتی نقاش چهره‌پرداز هم باید مثل همهٔ ما، سیاههٔ پرداخت مالیات را تنظیم کند، بنابراین باید حساب و کتاب درآمد نامنظم خود را داشته باشد. کسی که صاحب و مدیر یک تعمیرگاه است، لابد به اقتضای تجربه و تمایل خود تعمیرات مکانیکی را بلد است ولی ضمناً باید گهگاه هم کار حسابداری بکند. باید حساب نسبتاً پیچیدهٔ لوازم خریداری شده و کارهای انجام گرفته، مالیاتها و حق بیمهٔ کارگران و خیلی چیزهای دیگر را داشته باشد. همهٔ ما کم و بیش چنین وضعی داریم.

در انجام این گونه امور ضروری، سرعت و سهولت روش تراختنبرگ

کمک زیادی می‌تواند بکند. در وهلهٔ نخست استفاده از این روشهای پیشرفتهٔ نویافته سبب کاهش وقت لازم برای این گونه کارها می‌شود. این به نوبهٔ خود مزیت چشمگیری است.

در وهلهٔ دوم، نکته‌ای که اهمیتش از آنچه گفته شد کمتر نیست، این است که در روش نو، روی دقت محاسبه خیلی تأکید می‌شود. چنانکه قبلاً هم گفته‌ایم، کار محاسبه تنها با یافتن جواب درست به پایان می‌رسد و در واقع با اثبات کردن اینکه جواب یافته شده درست است. این اصل در زندگی روزمره کمتر رعایت می‌شود. معمولاً نتیجه‌ها را هیچ امتحان نمی‌کنند؛ یا نهایتاً همان کار را تکرار می‌کنند که امتحان ضعیف و غیر قابل اعتمادی است. روشهای بهتری برای این منظور وجود دارد. در لابه‌لای فصلهای قبلی بارها طرز امتحان کردن را بیان کرده‌ایم که اغلب بر اساس «مجموع ارقام» و بر اساس «باقیماندهٔ تقسیم بر یازده» انجام می‌شود. هر دوی اینها کارامدند. اگر آنها را همراه با یکدیگر به عنوان امتحان مضاعف به کار ببریم، نتیجهٔ کار عالی است. در فصل چهارم (عمل جمع و یافتن جواب درست) نوع خاصی از امتحان را دیدیم که برای عمل خاصی ابداع شده است. در فصل پنجم (عمل تقسیم با سرعت و دقت بیشتر) به نوع دیگری بر یافتن جواب درست تأکید می‌شد. در این فصل، روش کاملی تحت عنوان روش «سادهٔ» تقسیم برای کسانی که آن را سودمند می‌یابند بیان شد و علت آوردنش در این کتاب سهولت یادگیری آن است و اینکه طوری ابداع شده که احتمال اشتباه را به حداقل می‌رساند. همهٔ این تأکیدها بر کسب اطمینان از اینکه اشتباهی در کار نیست، جزئی از روش تراختنبرگ است. هر شهروند عادی در امور روزمره خیلی وقتها دچار اشتباه می‌شود. چیزی لازم است که جلوی این لغزش را بگیرد. ما به خاطر اهمیتی که برای این موضوع قایلیم عمداً روی آن تأکید کرده‌ایم.

در کنار این روش امتحان که غلطها را با آن پیدا و تصحیح می‌کنیم، به لحاظ دیگری نیز دقت کار افزایش می‌یابد. در تمامی این

روش به تقویت تدریجی قدرت تمرکز توجه داشته‌ایم. این کار در دو فصل اول به نحو مفصلتری انجام شد. در فصلهای بعد نیز عمدتاً به صورت تنظیم مرحله به مرحلهٔ مباحث، دنبال شد. عادت به تمرکز مطلوب که از این طریق حاصل می‌شود کلاً از اشتباه کردن جلوگیری می کند و به این ترتیب اشتباههای کمتری، وجود خواهد داشت، که بخواهد از طریق امتحان آشکار شود.

سرانجام، موفقیت در فراگیری این شیوه‌های نوظهور به فراگیرندگان اعتماد به نفس می‌دهد. برای بسیاری از آنان حس اعتماد به نفس، چیز تازه‌ای است. اشخاص بسیاری از فکر هر گونه محاسبه، نوعی واهمه دارند؛ محاسبه را از راههای دشوار انجام می‌دهند و تقریباً در نیمی از موارد به جواب غلط می‌رسند با این طرز برخورد، حل کردن مسئله نوعی «پیروزی» به حساب می آید. وقتی برخورد عوض شود و این اشخاص اعتماد به نفس واقعی و بجا پیدا کنند اوضاع رو به بهبود می‌رود. عمل را به شیوهٔ درست انجام می‌دهند، بر همه چیز تسلط می یابند و همین احتمال وقوع هر گونه اشتباهی را کاهش می‌دهد.

تأثیر کلی همهٔ این عوامل اغلب به صورت بیدار شدن علاقهٔ اشخاص به ریاضیات و کلاً نسبت به موضوعهای مربوط به ریاضیات، نمایان می‌شود. این تجدید حیات به سهم خود حتی مهمتر از همه نتایج عملی دیگری است که از روش تراختنبرگ حاصل می‌شود. آرزو داریم که مردم کشورمان از این مزایای عملی و کلی بهرهٔ کامل ببرند. ما بر این عقیده‌ایم که با گذشت زمان روش تراختنبرگ شهرت و اهمیت هر چه بیشتری خواهد یافت.