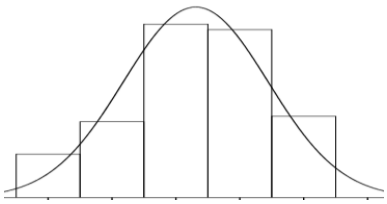
بررسی نرمال بودن داده ها در SPSS

در اغلب آزمون های پارامتری، مفروضات مقدماتی بسیاری وجود دارد که تا این مفروضات تامین نشوند؛ نتایج به دست آمده از آزمون، نامعتبر خواهد بود. در میان این مفروضات مهمترین و شایعترین فرض، فرض نرمال بون داده هاست. منظور از نرمال بودن توزیع داده ها این است که هیستوگرام فراوانی داده ها تقریبا به صورت منحنی نرمال باشد.



برای بررسی اینکه آیا متغیر یا متغیرهایی که در اختیار دارید، دارای توزیع نرمال هستند یا نه ؟ باید چند گام اساسی بر دارید.

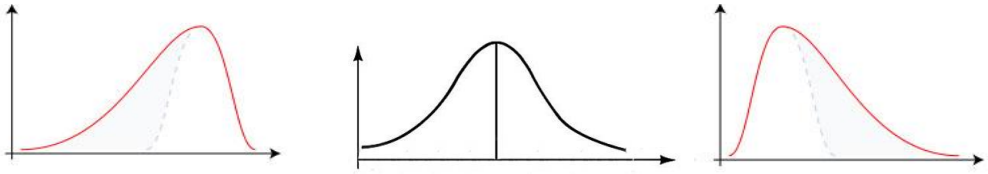
❖ تحلیل توصیفی (بررسی شاخص های توزیع)

ضریب چولگی و ضریب کشیدگی، دو شاخص اساسی توزیع داده ها هستند. که با داشتن این شاخص ها تا حدودی می توان به نرمال بودن یا نبودن توزیع داده ها پی برد.

۱- چولگی یا skewness معیاری از تقارن یا عدم تقارن تابع توزیع می‌باشد. در آمار فرمول های متعددی برای محاسبه ضریب چولگی داده ها وجود دارد که یکی از آنها به صورت زیر است.

$$\text{Skew} = \frac{n}{(n-1)(n-2)}\sum\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)^3$$

در یک توزیع کاملاً متقارن، چولگی صفر است. برای یک توزیع نا متقارن، ضریب چولگی مثبت یا منفی است. (هرچه مقدار چولگی از صفر بیشتر فاصله داشته باشد، عدم تقارن، شدیدتر است)



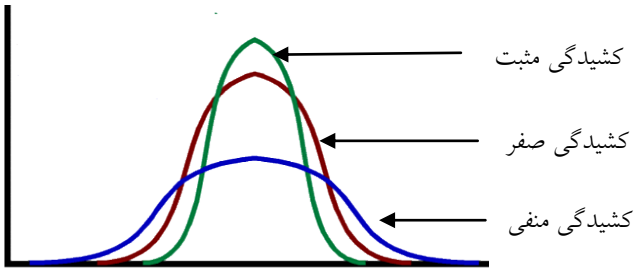
چولگی منفی　　چولگی صفر　　چولگی مثبت

۲- کشیدگی یا kurtosis نشان دهنده ارتفاع یک توزیع است. به عبارت دیگر کشیدگی معیاری از بلندی منحنی در نقطه ماکزیمم است. همیشه کشیدگی را با کشیدگی توزیع نرمال مقایسه می کنند. مقدار

کشیدگی برای توزیع نرمال برابر ۳ می باشد. فرمول های متعددی برای محاسبه ضریب کشیدگی وجود دارد که یکی از آنها به صورت زیر است.

$$\text{Kurtosis} = \left\{\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\sum\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s}\right)^4\right\} - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

بنابراین، کشیدگی مثبت، یعنی قله توزیع مورد نظر از توزیع نرمال بالاتر است و کشیدگی منفی، نشانه پایین تر بودن قله توزیع نسبت به توزیع نرمال است.



در حالت کلی چنانچه مقدار چولگی و کشیدگی داده ها خارج از فاصله (۲ ، ۲-) باشند (البته ممکن است بعضی از آمار دادنان این بازه را کوچکتر یا بزرگتر در نظر بگیرند.)، داده‌ها از توزیع نرمال برخوردار نیستند و می بایست قبل از هر گونه آزمونی که مشروط به فرض نرمال بودن داده ها ست، آن ها را به توزیع نرمال نزدیک کرد. روش هایی وجود دارد که با تغییراتی روی داده ها، توزیع آن ها نرمال می شود. این روش ها را در ادامه همین بحث بررسی می کنیم.

❖ محاسبه چولگی و کشیدگی در spss

❖ **مثال:** در فایل داده های مربوط به فروش خودرو به نام Car_Cales.sav از مجموعه داده های spss، متغیری به نام Sales (قیمت فروش خودرو) وجود دارد که می خواهیم نرمال بودن آن را بررسی کنیم.

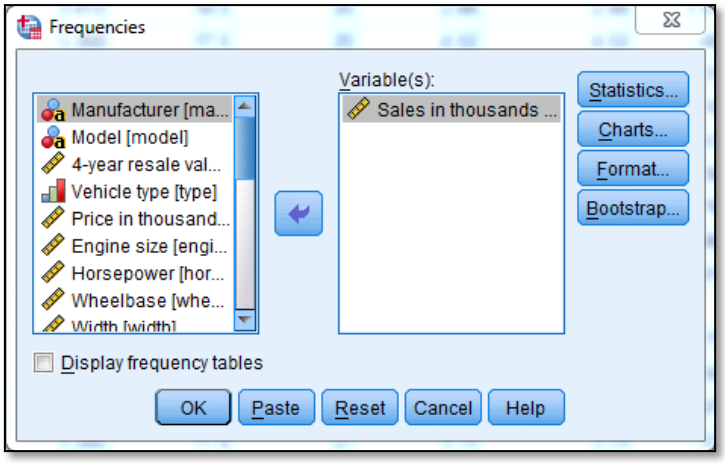
برای این کار فایل داده های Car_Cales.sav را از پوشه داده های spss به آدرس زیر باز کنید:

C:\Program file/IBM/SPSS/Statistics/20/Samples/English/Car_Cales.sav

فرمان زیر را در SPSS اجرا کنید:

Analyze/Descriptive Statistics/Frequencies

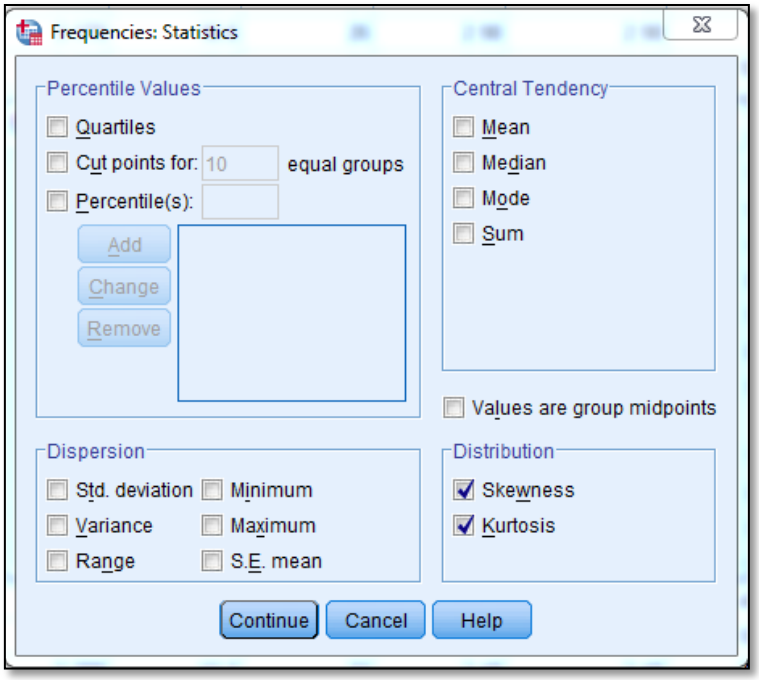
کادر محاوره زیر را مشاهده خواهید کرد.



ابتدا متغیر **Sales** را از فهرست متغیرها در کادر سمت چپ، به کادر سمت راست انتقال دهید.

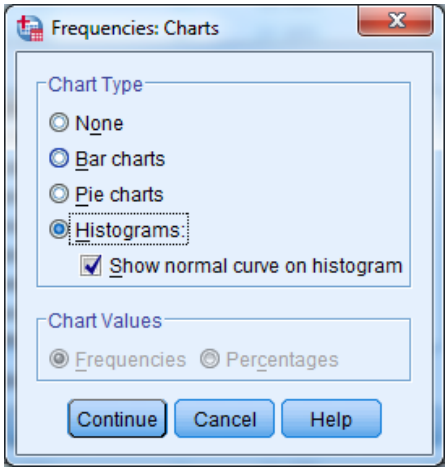
سپس گزینه **Statistics** را کلیک کرده تا به کادر محاوره آن منتقل شوید.

در کادر جدید گزینه‌های **Skewness** و **kurtosis** را فعال کنید.



کلید **Continue** را کلیک کنید تا به کادر محاوره قبلی باز گردید.

روی کلید **Charts** کلیک کنید تا کادر محاوره آن مانند شکل زیر باز شود.



گزینه Histograms: که منجر به رسم نمودار مستطیلی (هیستوگرام) می شود، را انتخاب کنید. متعاقب آن، گزینه Show normal curve on Histogram را نیز فعال کرده و کلید Continue را کلیک کنید.

قبل از انتخاب Ok در کادر محاوره frequency، گزینه Display frequency tables را غیر فعال کنید. دلیل این مورد آن است که در این مثال به جدول توزیع فراوانی نیازی نیست.

OK را کلیک کنید و نتایج را مانند زیر مشاهده نمایید:

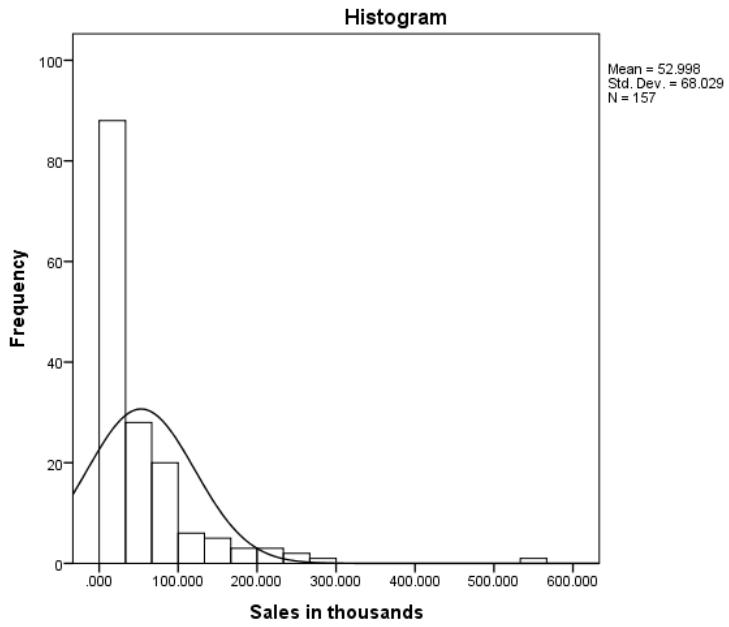
Statistics

Sales in thousands

N	Valid	157
	Missing	0
Skewness		3.409
Std. Error of Skewness		.194
Kurtosis		17.557
Std. Error of Kurtosis		.385

مقدار چولگی مشاهده شده برابر۳/٤۰۹ است و در بازه (۲ ، ۲-) قرار ندارد. یعنی به لحاظ چولگی، متغیر Sales، نرمال نبوده و توزیع آن نامتقارن و به سمت راست چولگی دارد. مقدار کشیدگی آن ۱۷/۵۵۷ شده است و در بازه (۲ ، ۲-) قرار ندارد. این نشان می‌دهد که توزیع متغیر نسبت به توزیع نرمال، کشیدگی زیادی دارد و از حالت نرمال خارج شده است.

با توجه به این دو شاخص که در حالت نرمال قرار ندارند، حدس می زنیم متغیر Sales توزیعی غیر نرمال داشته باشد. این موضوع در نمودار به دست آمده در زیر نیز کاملا مشهود است.



❖ تحلیل استنباطی

پس از بررسی مقدماتی متغیر Sales، حدس ما این بود که توزیع متغیر Sales، نرمال نباشد. اما برای اثبات این ادعا، باید از آزمون های آماری استفاده کنیم. هنگام بررسی نرمال بودن داده‌ها، ما فرض صفر را مبتنی بر اینکه توزیع داده‌ها نرمال است، در نظر می گیریم و مثل همه آزمون ها، آن را در سطح خطای ۵٪ تست می‌کنیم.

در نرم افزار spss آزمونهایی وجود دارند که به کمک آنها می توان نرمال بودن یا نبودن توزیع داده ها را آزمون کرد. یکی از این آزمون ها، آزمون شاپیرو- ویلک است و دیگری آزمون کلموگروف- اسمیرنوف که هر دوی آنها را برای بررسی نرمال بودن متغیر Sales در مثال بالا، مورد استفاده قرار می دهیم. همچنین آزمون دیگری با نام اندرسون- دارلینگ نیز برای بررسی نرمال بودن داده ها استفاده می شود که ما در این مقاله کمتر به آن توجه داریم.

دو آزمون کلموگروف- اسمیرنوف و شاپیرو- ویلک مشابه هم هستند. ولی در عمل تفاوت اندکی با یکدیگر دارند.

الف- اگر حجم نمونه کم است، هر دو آزمون نتایج یکسانی دارند.

ب- اگر حجم نمونه بیشتر از ۲۰۰۰ است، آزمون کلموگروف-اسمیرنوف مناسب تر از شاپیرو است.

❖ آزمون شاپیرو ویلک

شاخص آزمون شاپیرو ویلک (W) از فرمول زیر محاسبه می شود:

$$w = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

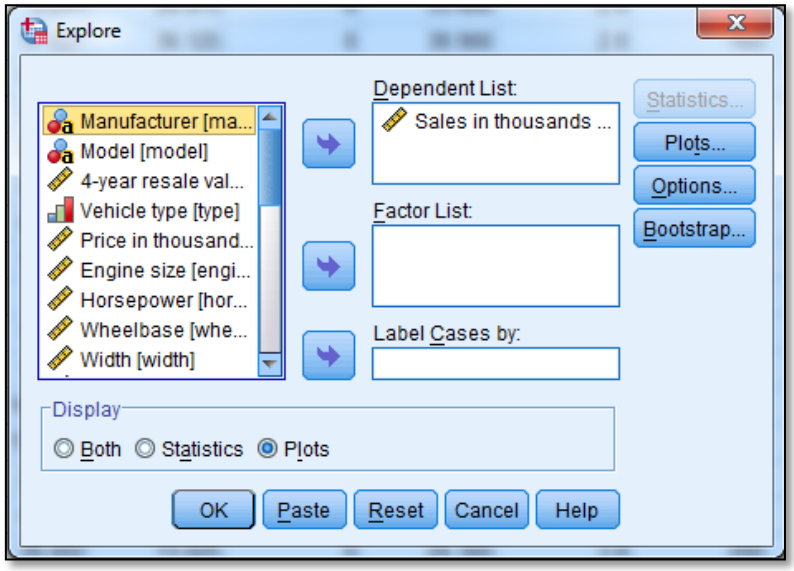
که در آن x_i ها آماره های مرتب هستند.

❖ **مثال:**

در مثال قبل، برای انجام این آزمون در spss، مسیر زیر را دنبال کنید:

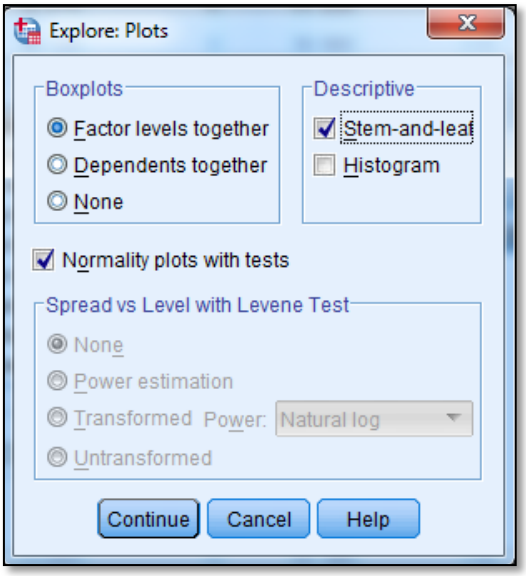
Analyze/Descriptive Statistics/Explore

به کادر محاوره ای مانند شکل زیر منتقل خواهید شد.



متغیر Sales را مطابق شکل، وارد فهرست Dependent List: کنید.

کلید Plots را کلیک کنید تا به کادر محاوره ای مانند شکل زیر منتقل شوید.



در این کادر محاوره، گزینه هایی برای رسم نمودار جعبه ای و نمودار ساق و برگ انتخاب شده است، آنها را تغییر ندهید. این نمودارها به صورت بصری، نرمال بودن یا نبودن متغیر مورد آزمون را تایید می کنند.

اگر گزینه ی Normality plots with tests را علامت دار کنید، هر دو آزمون شاپیرو ویلک و کلموگروف-اسمیرنوف، انجام خواهد شد. کلید Continue را کلیک نمایید تا به کادر محاوره اول برگردید.

در قسمت Display، گزینه Plots را انتخاب کنید و **OK را کلیک نمایید و نتایج به دست آمده را در فایل خروجی spss، مانند زیر مشاهده کنید.**

نتایج شامل جدولی است تحت عنوان Tests of Normality است که سطح معناداری را برای هر دو آزمون گفته شده، مشخص کرده است.

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Sales in thousands	.218	157	.000	.667	157	.000

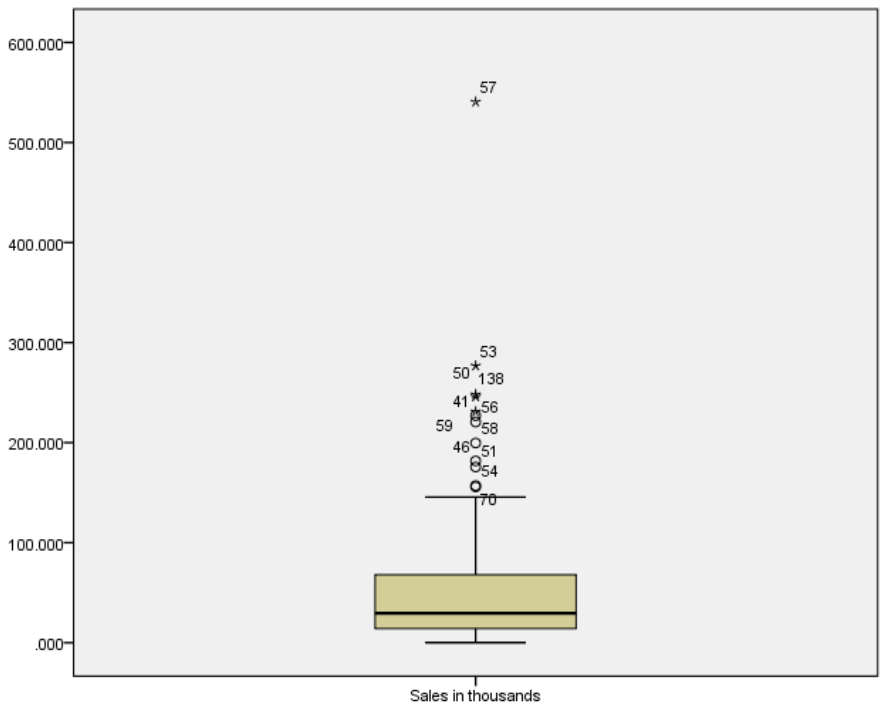
a. Lilliefors Significance Correction

معمولا چنانچه سطح معنی داری در این دو آزمون که در این جدول با sig نمایش داده شده، بیشتر از ۵ درصد باشد، می توان داده ها را با اطمینان بالایی نرمال فرض کرد. در غیر این صورت نمی توان گفت توزیع داده ها، نرمال است. با توجه به جدول فوق و مقادیر سطح معنی داری sig که در هر دو آزمون کلموگروف- اسمیرنوف و شاپیرو- ویلک، کمتر از ۵ درصد شده است، فرض نرمال بودن توزیع متغیر

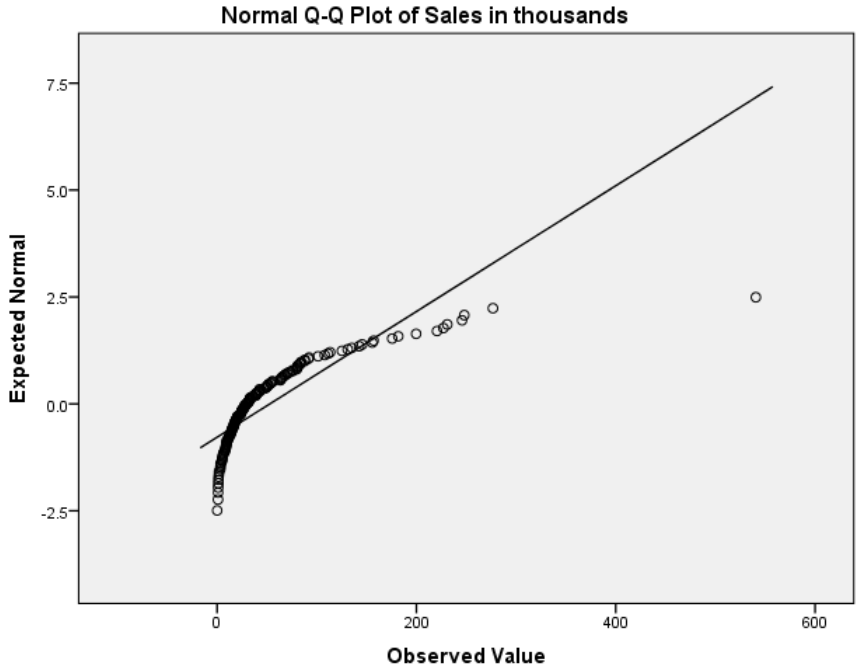
Sales رد می شود. به عبارتی همان گونه که در تحلیل توصیفی پیش بینی کرده بودیم، نمی توان گفت توزیع داده های این متغیر، نرمال است.

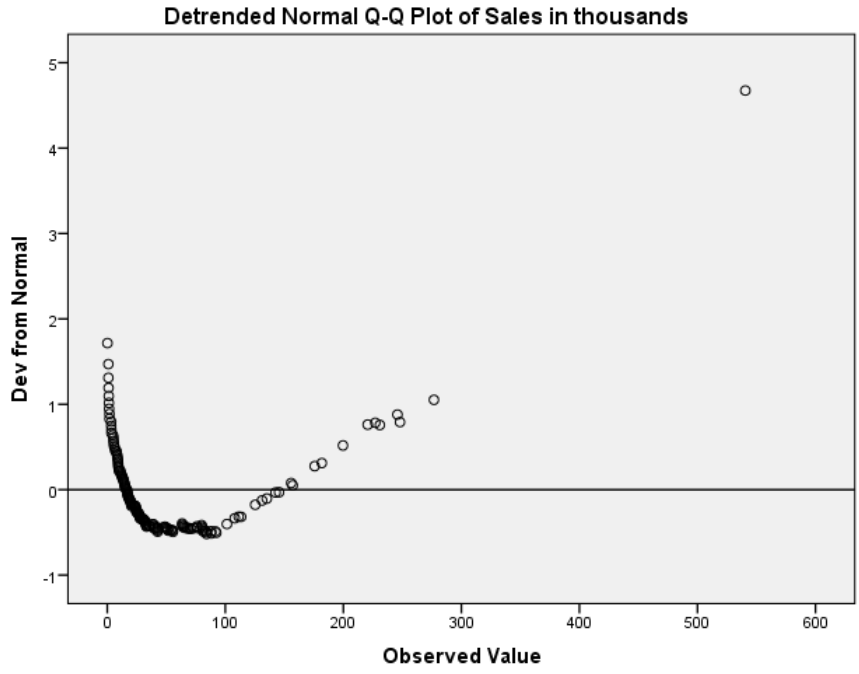
نمودار ساق و برگ و نمودار جعبه ای در زیر این موضوع را تایید می کنند.

```
Sales in thousands Stem-and-Leaf Plot

Frequency    Stem &  Leaf

31.00         0 .  0001111113333455556677888999999
27.00         1 .  111222334444555666677788899
21.00         2 .  000123444445666777789
16.00         3 .  0112222335589999
9.00         4 .  122227899
7.00         5 .  1113455
8.00         6 .  33355678
6.00         7 .  013669
9.00         8 .  000133488
2.00         9 .  12
2.00        10 .  17
2.00        11 .  13
1.00        12 .  5
2.00        13 .  15
2.00        14 .  25
12.00 Extremes    (>=156)

Stem width:    10.000
Each leaf:       1 case(s)
```



دو نمودار زیر که به نمودارهای Q-Q معروف هستند، برای بررسی نرمال بودن یا نبودن توزیع داده ها استفاده می شوند. در این نمودارها یک خط نرمال به عنوان معیار توزیع نرمال ترسیم شده است. هر مقدار نقاطی که نماینده داده ها هستند، به این خط نزدیک تر باشند، نشانه نزدیکی توزیع داده ها به توزیع نرمال است و بر عکس. در هر دو نمودار زیر می بینید که نقاط مربوط به داده ها با خط معیار نرمال بسیار مقایرت دارند. این بدان معناست که داده ها نمی توانند توزیع نرمال داشته باشند.





❖ آزمون کولموگروف–اسمیرنوف

در نرم افزار spss آزمون کلموگروف–اسمیرنوف برای بررسی همتوزیعی داده ها با چهار توزیع نرمال، یکنواخت، پواسن و نمایی طراحی شده است. ما در اینجا قصد داریم تنها از این آزمون برای بررسی نرمال بودن داده ها استفاده کنیم.

در این آزمون، فرض صفر بر نرمال بودن توزیع داده ها بنا شده است. بنا بر این اگر فرض صفر رد شود به معنی غیر نرمال بودن داده ها است.

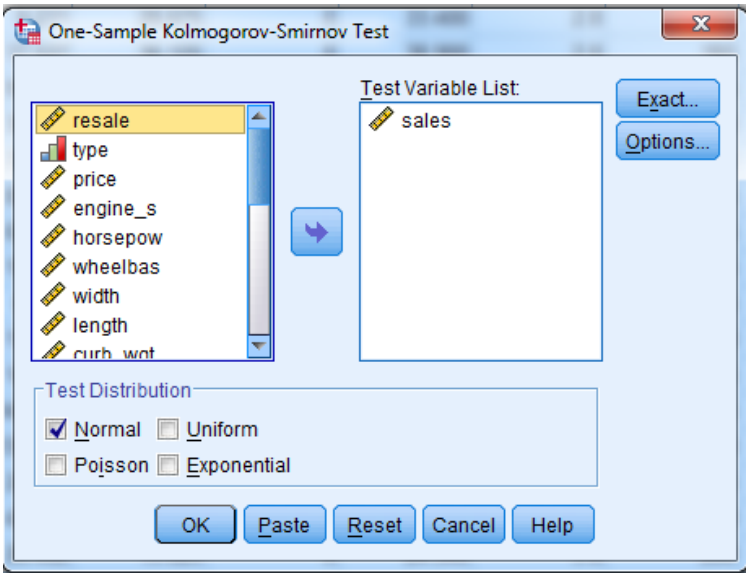
❖ مثال

فرض کنید در مثال قبل می خواهیم یک بار دیگر و تنها به کمک آزمون کلموگروف – اسمیرنوف نرمال بودن یا نبودن توزیع متغیر sales را بررسی کنیم.

مراحل زیر را برای انجام این آزمون دنبال کنید:

از فرمان: Analyze/Nonparametric Test/1 Samples K-S...

به کادر محاوره آزمون کلموگروف – اسمیرنوف مانند شکل زیر وارد شوید.



متغیر sales را به فهرست متغیرهای آزمون (Test Variable List:) وارد کنید.

توجه داشته باشید گزینه Normal در قسمت Test Distribution که به طور پیش فرض انتخاب شده، تغییر نکرده باشد.

اگر گزینه Options را انتخاب کنید، می توانید بعضی از شاخص های توصیفی را محاسبه کنید. در اینجا ما از این گزینه استفاده نکرده ایم.

کلید OK را به کلیک کنید تا آزمون انجام شود. نتایج را در فایل خروجی و مانند جدول زیر مشاهده خواهید کرد.

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Sales in thousands
N		157
Normal Parameters[a,b]	Mean	52.99808
	Std. Deviation	68.029422
Most Extreme Differences	Absolute	.218
	Positive	.197
	Negative	-.218
Kolmogorov-Smirnov Z		2.737
Asymp. Sig. (2-tailed)		.000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

به جدول نتایج و مقدار Asymp. Sig. (2-tailed) دقت کنید. می بینید که مقدار ۰/۰۰۰ نشان از رد فرض صفر دارد. یعنی این فرضیه که "نمونه مورد نظر از توزیع نرمال به دست آمده است"، رد می شود. به عبارتی توزیع این متغیر، نرمال نیست.

❖ **اقدامات بعدی**

در ابتدای این مبحث دیدیم که شاخص های توزیع، نشان از غیر نرمال بودن متغیر Sales داشتند و هر دو آزمون کلموگروف- اسمیرنوف و شاپیرو- ویلک، فرض نرمال بودن داده ها را رد کردند. نمودارهای متعددی نیز این موضوع را به درستی تایید کردند. اکنون برای ما مسجل است که این متغیر نمی تواند نرمال باشد. وقتی با چنین پدیده ای روبرو می شوید ممکن است دو تصمیم بگیرید:

۱- این متغیر را با آزمون های ناپارامتری تحلیل کنید.

۲- بدلیل اهمیت موضوع، ناگزیر باشید این متغیر را به هر صورت ممکن به متغیری نرمال تبدیل نمایید.

❖ **روش های نرمال کردن متغیرها**

روش های گوناگونی برای نرمال کردن داده ها وجود دارد. که از مهمترین آنها می توان به تبدیل لگاریتمی، تبدیل باکس – کاکس، استفاده از نمودار احتمال لگاریتمی، استفاده از نمودار فینی و غیره اشاره کرد.

❖ ۱- تبدیل لگاریتمی

در این روش اگر فرض کنید x_i یک داده باشد، با تبدیل؛

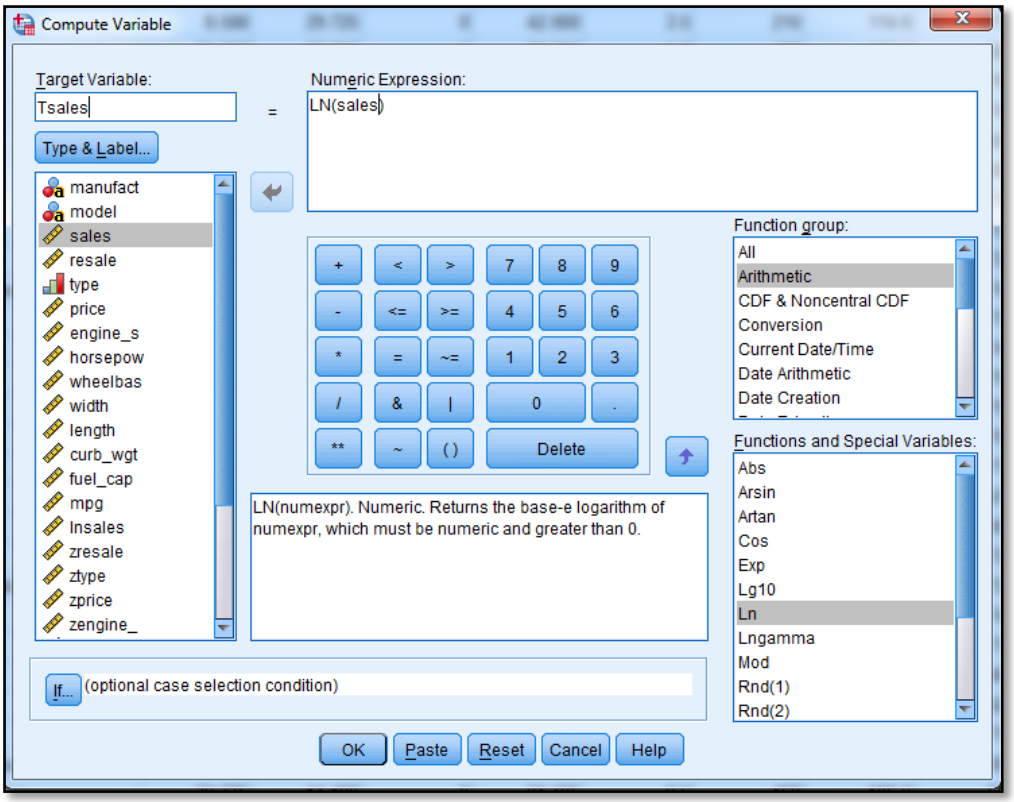
$$y = Ln(x_i)$$

به جای x_i از y_i که مقدار لگاریتم نپرین x_i است استفاده می شود. انتظار زیادی می رود که y_i دارای توزیع نرمال باشد. به این روش، تبدیل لگاریتمی ساده می گویند. در مواردی ممکن است با تبدیل لگاریتمی ساده نتوان توزیع داده ها را به توزیع نرمال نزدیک کرد. کافی است با افزودن و یا کاستن عددی به x_i، آن را به توزیع نرمال نزدیک نمود. این روش، که به روش تبدیل لگاریتمی سه پارامتری معروف است، به صورت زیر تعریف می شود:

$$y = Ln(ax_i \pm b)$$

که معمولا مقدار a را یک در نظر می گیرند و تنها برای b، یک مقدار مثبت یا منفی تعیین می کنند.

در مثال بالا می خواهیم به کمک تبدیل لگاریتمی، داده های متغیر sales را تغییر داده و بررسی کنیم آیا با تبدیل فوق، توزیع این متغیر نرمال خواهد شد. برای این کار از منوی اصلی گزینه Transform و متعاقب آن گزینه Compute Variables... را ناتخاب کنید تا کادر محاوره ای مانند شکل زیر را مشاهده نمایید.



در قسمت Target Variable: یک نام جدید دلخواه برای متغیری که قرار است محتوی لگاریتم داده ها باشد، انتخاب کنید. ما برای آن نام Tsales را برگزیده ایم.

در بخش Function Group:، گروه توابع محاسباتی Arithmetic را انتخاب کنید. در کادر زیر این بخش مجموعه ای از توابع محاسباتی را مشاهده خواهید کرد. شما باید تابع لگاریتم نپر را که با حروف اختصاری Ln نشان داده شده است، انتخاب نمایید. برای این کار دو بار روی آن کلیلک کنید تا به کادر Numeric Expression: منتقل شود. در این حال آن را به صورت Ln(?) مشاهده می نمایید.

اینک کافی است متغیر Sales را از فهرست متغیرها به جای علامت سوال منتقل کنید. این کار را با تایپ کردن نام متغیر به جای علامت سوال، نیز می توانید انجام دهید.

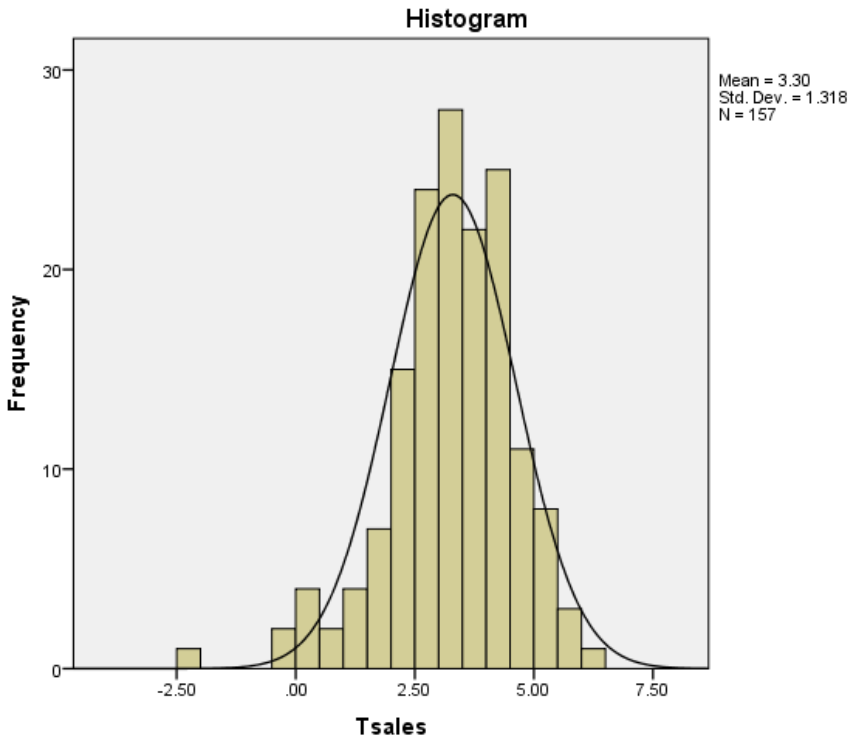
با انجام این مراحل، شما از نرم افزار خواسته اید، لگاریتم نپرین داده های متغیر Sales را محاسبه کرده و در متغیر Tsales ذخیره نماید.

با زدن کلید OK می توانید متغیر جدید را که به فهرست متغیرها اضافه شده، مشاهده نمایید. این متغیر ممکن است دارای توزیع نرمال باشد.

برای بررسی نرمال بودن متغیر جدید Tsales ما ابتدا هیستوگرام آن را از مسیر

Analyze/Frequencies

ترسیم کرده و با انتخاب گزینه های مناسب، توزیع آن را با منحنی نرمال مقایسه کرده ایم. شکل زیر گویای آن است که با احتمال زیادی می توان گفت؛ با این تبدیل، توزیع داده ها نرمال شده است.



برای اثبات اینکه داده ها دارای توزیع نرمال هستند، کافی است متغیر Tsales را به کمک یکی از آزمون های گفته شده در بالا، مورد بررسی قرار دهیم. ما نرمال بودن آن را به کمک آزمون کلموگروف – اسمیرنوف انجام داده ایم که نتایج آن در جدول زیر آمده است.

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Tsales
N		157
Normal Parameters[a,b]	Mean	3.2959
	Std. Deviation	1.31821
Most Extreme Differences	Absolute	.066
	Positive	.042
	Negative	-.066
Kolmogorov-Smirnov Z		.826
Asymp. Sig. (2-tailed)		.503

a. Test distribution is Normal.
b. Calculated from data.

همانگونه که شاهد هستید، معیار تصمیم Asymp. Sig. (2-tailed) با مقدار ۰/۵۰۳، نشان می دهد که فرض نرمال بودن داده ها، پذیرفته است. به عبارتی واقعا داده ها دارای توزیع نرمال هستند.

❖ ۲- تبدیل باکس- کاکس

در این روش ابتدا تبدیلاتی برای پیدا کردن یک مقدار لامبدا (λ) انجام می شود. سپس به صورت کلی به ازای هر مشاهده X_t از تبدیل زیر استفاده می شود.

$$T(X_t)=\frac{X_t^{\lambda}-1}{\lambda}$$

در استفاده از این تبدیل لازم است بدانید؛

۱. اگر مقدار λ ، برابر صفر باشد نیاز به تبدیل نیست،

۲. اگر مقدار λ، برابر ۱- بدست آید، از فرمول بالا استفاده نمی کنیم بلکه از معکوس داده ها استفاده می کنیم.

❖ تبدیل باکس – کاکس در spss

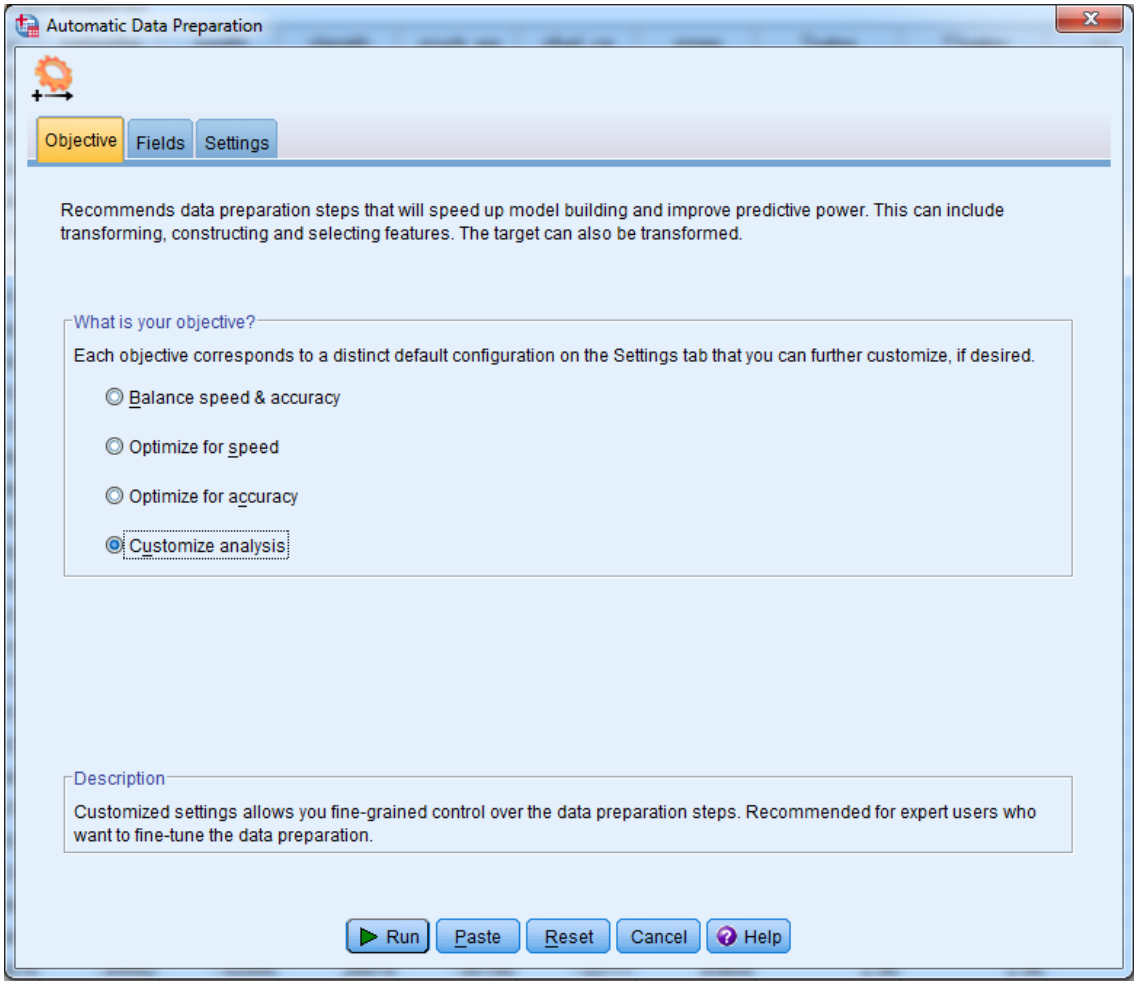
❖ روش اول

اگر از قبل مقداری برای لامبدا به دست آورده اید، برای استفاده از روش باکس- کاکس در spss کافیست از منوی transform گزینه compute variable را انتخاب و در قسمت target یک متغیر جدید تعریف کرده و در بخش Numeric expression: فرمول‌های کاکس باکس را اعمال کنید.

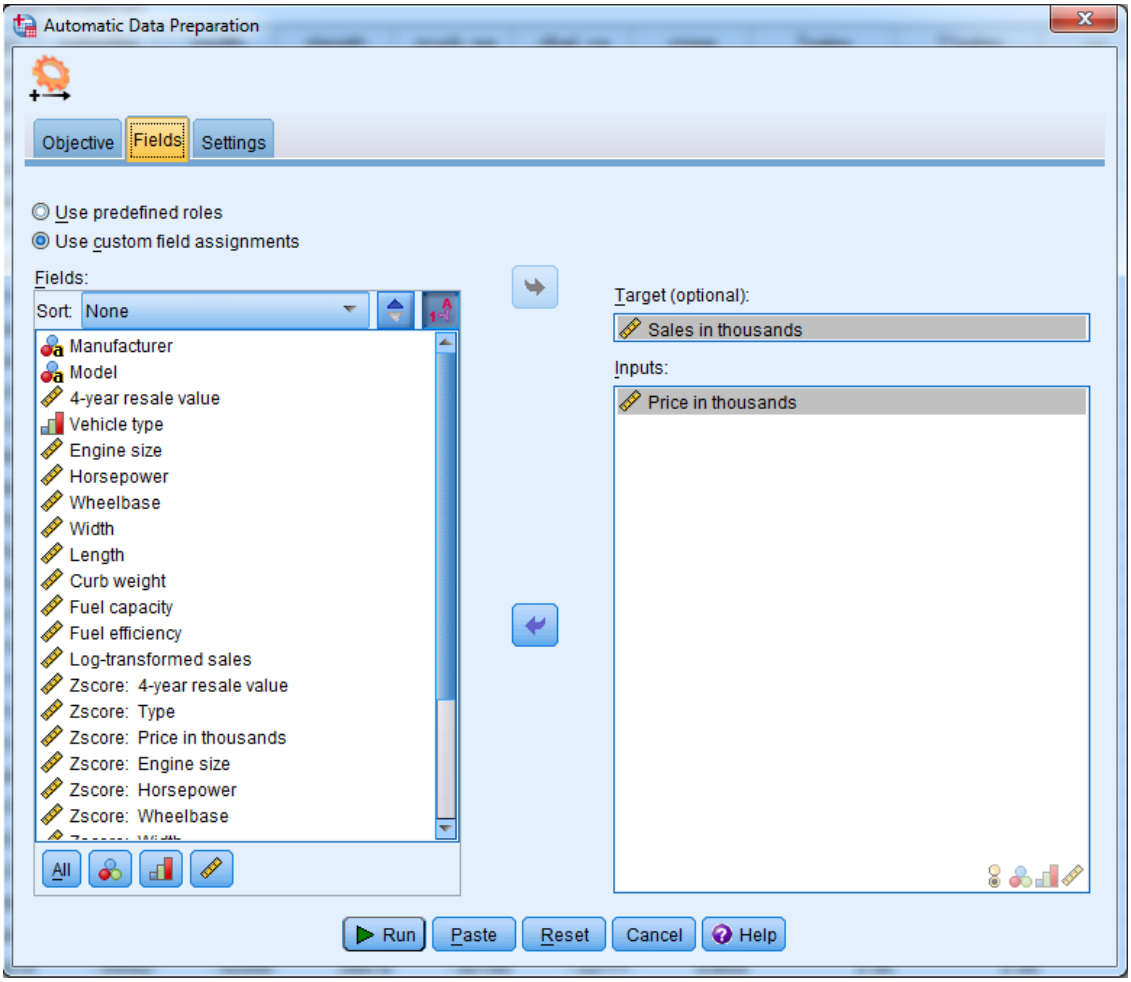
❖ روش دوم

فرض کنید به عنوان مثال می خواهیم متغیر Sales را به روش باکس – کاکس، تبدیل کرده و بررسی کنیم آیا متغیر تبدیل یافته می تواند توزیع نرمال داشته باشد؟ برای این کار مراحل زیر را دنبال می کنیم.

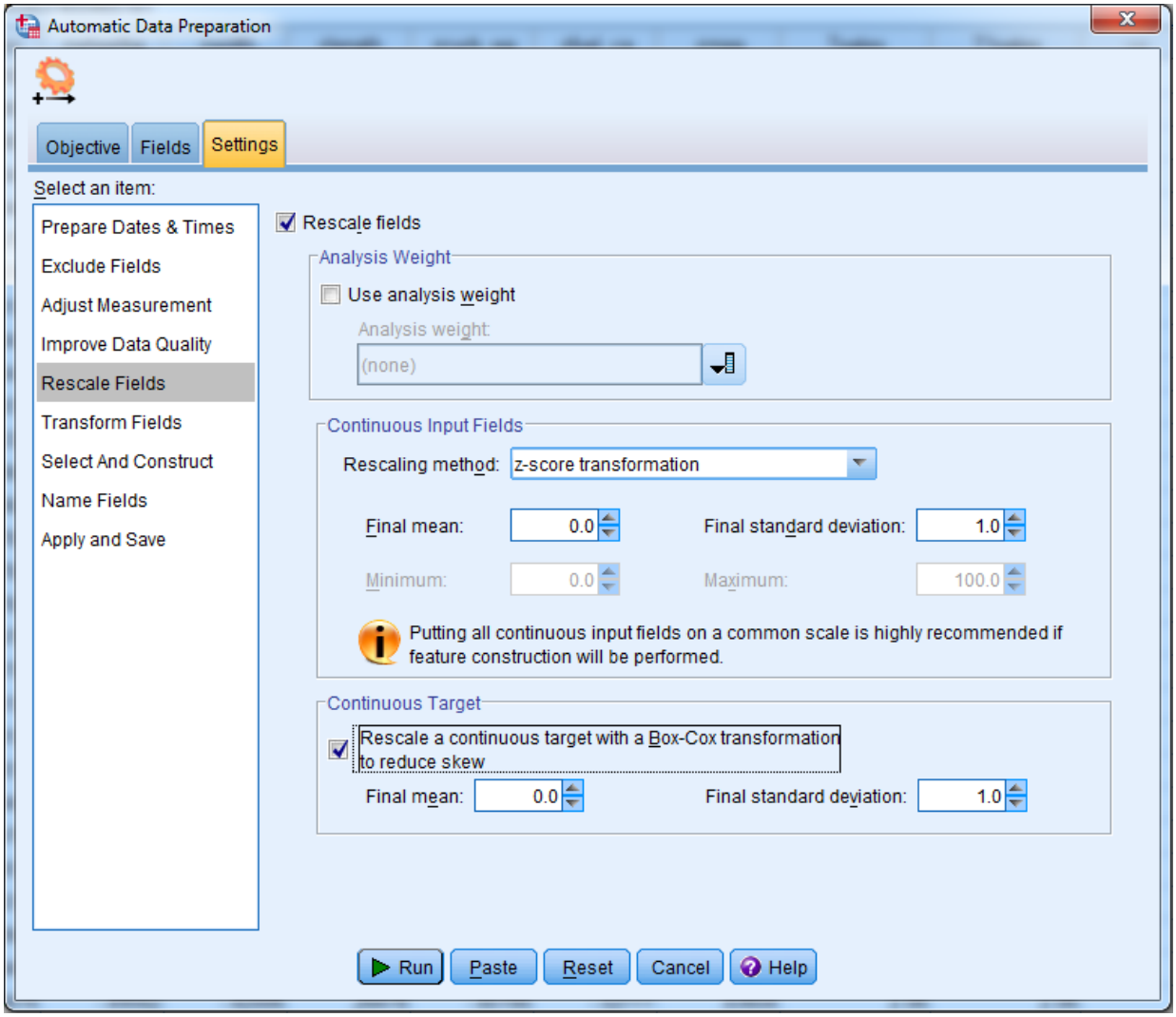
از منوی اصلی spss، گزینه Transform و متعاقب آن گزینه Prepare Data for Modeling را انتخاب کنید و سپس گزینه Automatic... را کلیک کنید تا کادر محاوره ای مانند شکل زیر مشاهده نمایید.



این کادر محاوره، شامل سه برگه است که شما در وحله اول، باید روی برگه Objective واقع باشید. در این برگه، گزینه Customize analysis را انتخاب نمایید.
اینک روی برگه Fields کلیک نمایید تا به شکل زیر، آن را ببینید.



اگر متغیرها را در کادر Target (optional): مشاهده می کنید، آنها را به کادر Fields: منتقل نمایید.
اینک متغیر یا متغیرهایی را که می خواهید به کمک تبدیل باکس – کاکس، تغییر دهید، در قسمت Target (optional): وارد نمایید. ما در این مسئله، متغیر Sales را به این قسمت منتقل می کنیم.
یک متغیر پیوسته و دلخواه، از فهرست متغیرها، به بخش inputs: وارد نمایید. ما متغیر Price را برای این کادر انتخاب کرده ایم.
حال به برگه سوم یعنی برگه Settings بروید که کادر محاوره آن مانند شکل زیر است.



ابتدا در فهرست Select an item: ، آیتم RescalevFields را انتخاب کنید. سپس گزینه:

Rescale a continuous target with a Box-Cox transformation to reduce skew

را علامت دار کنید. سایر گزینه های این کادر محاوره را تغییر ندهید.

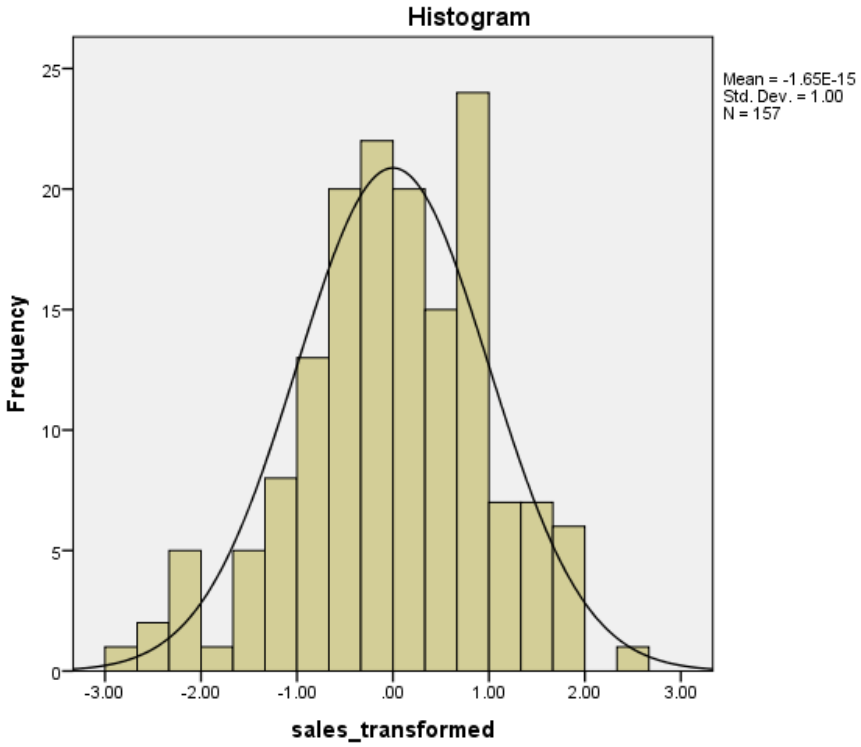
اکنون کلید Run را بزنید تا تبدیل خواسته شده، انجام شود.

می توانید تبدیل یافته ی متغیرها را که به فهرست متغیرهای نرم افزار، اضافه شده اند، مشاهده نمایید. متغیر مورد نظر ما را که به کمک تبدیل باکس – کاکس به دست آمده است، در فهرست متغیرها با نام sales_transformed مشاهده می کنید.

اکنون ما برای اطمینان از اینکه تبدیل فوق توانسته است توزیع متغیر Sales را نرمال کند، ابتدا هیستوگرام متغیر sales_transformed را از مسیر

Analyze/Frequencies

ترسیم کرده و با انتخاب گزینه های مناسب، هیستوگرام توزیع آن را با منحنی نرمال مقایسه کرده ایم. شکل زیر به لحاظ بصری، نرمال بودن توزیع داده های جدید را تایید می کند.



برای اثبات اینکه داده ها دارای توزیع نرمال هستند، کافی است متغیر sales_transformed را به کمک یکی از آزمون های گفته شده در بالا، مورد بررسی قرار دهیم. ما نرمال بودن آن را به کمک آزمون کلموگروف – اسمیرنوف انجام داده ایم که نتایج آن در جدول زیر آمده است.

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		sales_transformed
N		157
Normal Parameters[a,b]	Mean	.0000
	Std. Deviation	1.00000
Most Extreme Differences	Absolute	.041
	Positive	.034
	Negative	-.041
Kolmogorov-Smirnov Z		.516
Asymp. Sig. (2-tailed)		.953

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

همانگونه که شاهد هستید، معیار تصمیم Asymp. Sig. (2-tailed) با مقدار ۰/۹۵۳، قویا نشان می دهد که فرض نرمال بودن داده ها، پذیرفته است. به عبارتی واقعا داده ها دارای توزیع نرمال هستند.
اگر چه روش باکس – کاکس، کاربرد بسیاری دارد، اما باید به معایب آن نیز توجه داشت. این روش در برخی موارد نمی تواند تبدیل مناسبی برای نرمال کردن داده ها پیدا کند. ضمن اینکه از این روش تنها برای داده هایی با مقادیر مثبت، استفاده می شود.

برای رفع چنین مشکلاتی یک تبدیل دیگر به نام تبدیل جانسون (Johnson-Transformation) ارائه شده که از پیچیدگی و کیفیت بیشتری نسبت به تبدیل BOX-COX برخوردار است. البته بهتر است اول روش باکس – کاکس را انجام دهید و اگر تبدیل مناسبی به دست نیامد، سپس از تبدیل جانسون استفاده نمایید. برای انجام این تبدیل، اگر با نرم افزار MINITAB آشنایی جزئی داشته باشید، می توانید این تبدیل را به راحتی روی داده ها اعمال کنید تا داده ها توزیع نرمال پیدا کنند.

اطلاعات بیشتر در مورد این تبدیل را در مقاله ی زیر مطالعه کنید.

"Transforming nonnormal Data to Normality in Statistical Process Control" Y. Chou, A.M. Polansky, and R.L. Mason (1998)

برای اطلاع بیشتر از نرمال سازی داده ها، به کتاب "تحلیل داده های اکتشافی" تألیف دکتر علی اصغر حسنی پاک و مهندس محمد شرف الدین، انتشارات دانشگاه تهران مراجعه شود.