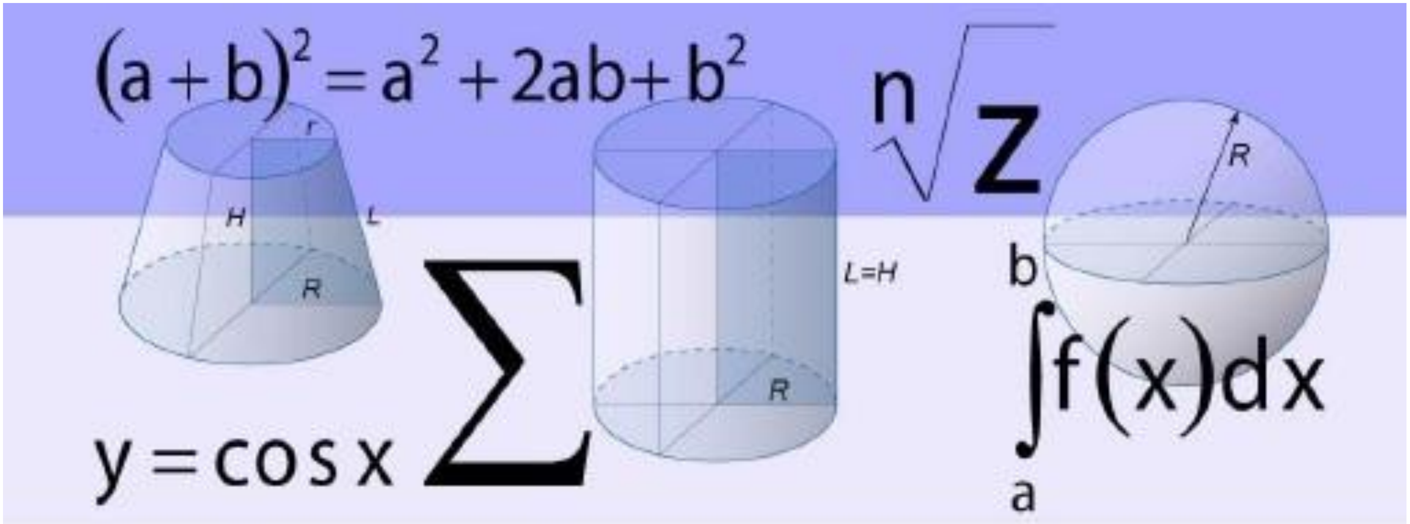


۱۳۰۰ فرمول ریاضی

دوزبانه انگلیسی – فارسی

نوشته: آلکس اسویرین   ترجمه: احسان کوثری نیا

1300 Math Formulas

۱۳۰۰ فرمول ریاضی

دوزبانه انگلیسی – فارسی

نوشته: آلکس اسویرین　　ترجمه: احسان کوثری نیا

This page is intentionally left blank.

این صفحه تعمدا خالی مانده است.

Preface

پیش گفتار

This handbook is a complete desktop reference for students and engineers. It has everything from high school math to math for advanced undergraduates in engineering, economics, physical sciences, and mathematics. The ebook contains hundreds of formulas, tables, and figures from Number Sets, Algebra, Geometry, Trigonometry, Matrices and Determinants, Vectors, Analytic Geometry, Calculus, Differential Equations, Series, and Probability Theory.
The structured table of contents, links, and layout make finding the relevant information quick and painless, so it can be used as an everyday online reference guide.

این دستنامه یک مرجع کامل در دسترس برای دانشجویان و مهندسین به شمار می رود. این کتاب کلیه روابط از ریاضیات دبیرستان تا ریاضیات مهندسی مقطع کارشناسی و پیشرفته، اقتصاد، علوم تجربی و ریاضیات را دربر می گیرد. این مجموعه شامل صدها فرمول، جداول، و شکلهایی مربوط به مجموعه های اعداد، جبر، هندسه، مثلثات، ماتریسها و دترمینانها، بردارها، هندسه تحلیلی، حسابان، معادلات دیفرانسیل، سریها، و نظریه احتمالات است.
فهرست ساختاریافته، ارتباطها، و آرایش این کتاب، موجب یافتن سریع و آسان اطلاعات مرتبط می شود، به گونه ای که می توان از آن به عنوان یک راهنمای مرجع سریع روزمره بهره گرفت.

فهرست
Contents

This page is intentionally left blank.

این صفحه تعمدا خالی مانده است.

Chapter 1 فصل ۱

Number Sets مجموعه های اعداد

1.1 Set Identities ویژگیهای مجموعه

مجموعه ها Sets: A, B, C
مجموعه جهانی Universal set: I
مکمل Complement : A'
زیرمجموعه سره Proper subset: $A \subset B$
مجموعه تهی Empty set: $\varnothing$
اتحاد مجموعه ها Union of sets: $A \cup B$
اشتراک مجموعه ها Intersection of sets: $A \cap B$
تفاضل مجموعه ها Difference of sets: $A \setminus B$

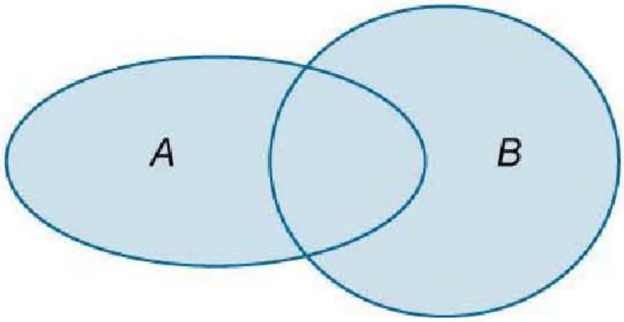
1. $A \subset I$

2. $A \subset A$

3. $A = B$ if (اگر) $A \subset B$ and (و) $B \subset A$.

4. Empty Set مجموعه تهی
$\varnothing \subset A$

5. Union of Sets اجتماع مجموعه ها
$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$

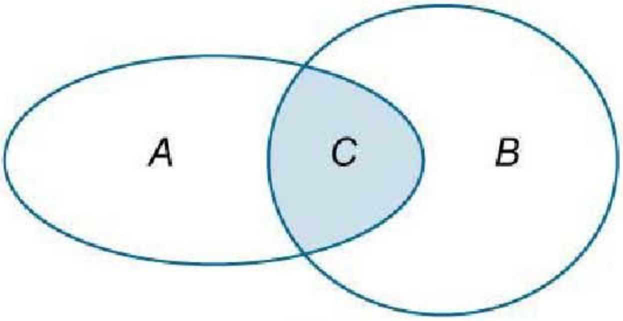


شکل ۱ **Figure 1.**

6. Commutativity جابجا پذیری
$A \cup B = B \cup A$

7. Associativity شرکت پذیری
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

8. Intersection of Sets اشتراک مجموعه ها
$C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$



شکل ۲ **Figure 2.**

9. Commutativity جابجا پذیری
$A \cap B = B \cap A$

10. Associativity شرکت پذیری
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

11. Distributivity توزیع پذیری

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

12. Idempotency تکرار شوندگی

$A \cap A = A$,

$A \cup A = A$

13. Domination غالب شدن

$A \cap \varnothing = \varnothing$,

$A \cup I = I$

14. Identity عینیت

$A \cup \varnothing = A$,

$A \cap I = A$

15. Complement مکمل

$A' = \{x \in I \mid x \notin A\}$

16. Complement of Intersection and Union اشتراک و اجتماع مکمل

$A \cup A' = I$,

$A \cap A' = \varnothing$

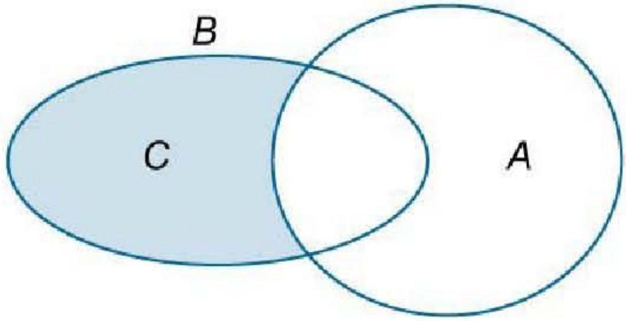
17. De Morgan's Laws قوانین دمورگان

$(A \cup B)' = A' \cap B'$,

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

18. Difference of Sets تفاضل مجموعه ها

$C = B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ and } x \notin A\}$



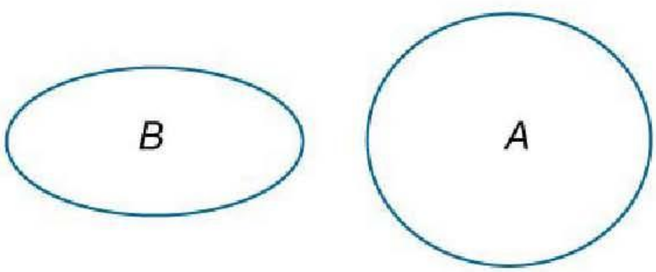
شکل ۳ **Figure 3.**

19. $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$

20. $B \setminus A = B \cap A'$

21. $A \setminus A = \varnothing$

اگر
22. $A \setminus B = A$ if $A \cap B = \varnothing$.



شکل ۴ **Figure 4.**

23. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

24. $A' = I \setminus A$

25. Cartesian Product ضرب کارتزین
$C = A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ and } y \in B\}$

1.2 Sets of Numbers مجموعه های اعداد

Natural numbers: N اعداد طبیعی
Whole numbers: N_0 اعداد کامل
Integers: Z اعداد صحیح
Positive integers: Z^+ اعداد صحیح مثبت
Negative integers: Z^- اعداد صحیح منفی
Rational numbers: Q اعداد گویا
Real numbers: R اعداد حقیقی
Complex numbers: C اعداد مختلط

26. Natural Numbers اعداد طبیعی
Counting numbers: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$. اعداد شمارشی

27. Whole Numbers اعداد کامل
Counting numbers and zero: $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. اعداد شمارشی و صفر

28. Integers اعداد صحیح
Whole numbers and their opposites and zero: اعداد کامل و قرینه های آنها و صفر
$Z^+ = N = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
$Z^- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$,
$Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

29. Rational Numbers اعداد گویا
Repeating or terminating decimals: اعشار مکرر یا تمام شونده

$$Q = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b} \text{ and } a \in Z \text{ and } b \in Z \text{ and } b \neq 0 \right\}.$$

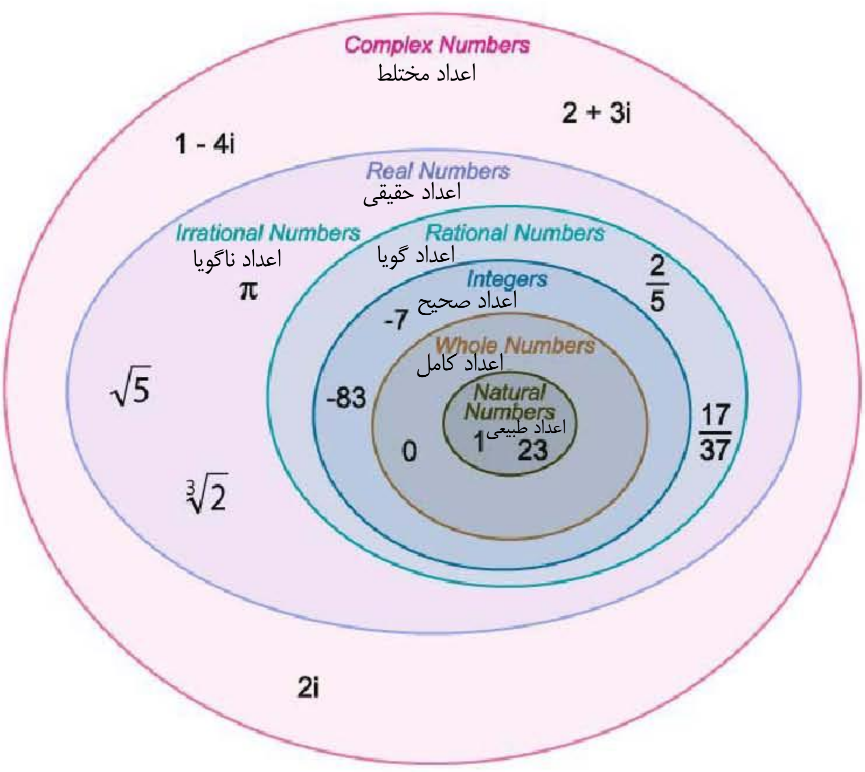
و

30. Irrational Numbers
Nonrepeating and nonterminating decimals.

31. Real Numbers اعداد حقیقی
Union of rational and irrational numbers: R. اجتماع اعداد گویا و ناگویا

32. Complex Numbers اعداد مختلط
$C = \{x + iy \mid x \in R \text{ and } y \in R\}$,
where i is the imaginary unit. که در آن **i** واحد موهومی است.

33. $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$



شکل ۵ **Figure 5.**

1.3 Basic Identities همانیهای اساسی

Real numbers: a, b, c اعداد حقیقی

34. Additive Identity همانی جمع
$a+0=a$

35. Additive Inverse قرینه جمع
$a+(-a)=0$

36. Commutative of Addition جابجاپذیری جمع
$a+b=b+a$

37. Associative of Addition شرکت پذیری جمع
$(a+b)+c=a+(b+c)$

38. Definition of Subtraction تعریف تفریق
$a-b=a+(-b)$

39. Multiplicative Identity همانی ضرب
$a\cdot 1=a$

40. Multiplicative Inverse وارون ضرب
$a\cdot\frac{1}{a}=1,\ a\neq 0$

41. Multiplication Times 0 ضرب در 0
$a\cdot 0=0$

42. Commutative of Multiplication جابجاپذیری ضرب
$a\cdot b=b\cdot a$

43. Associative of Multiplication شرکت پذیری ضرب

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

44. Distributive Law قانون توزیع پذیری

$a(b+c) = ab + ac$

45. Definition of Division تعریف تقسیم

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

1.4 Complex Numbers اعداد مختلط

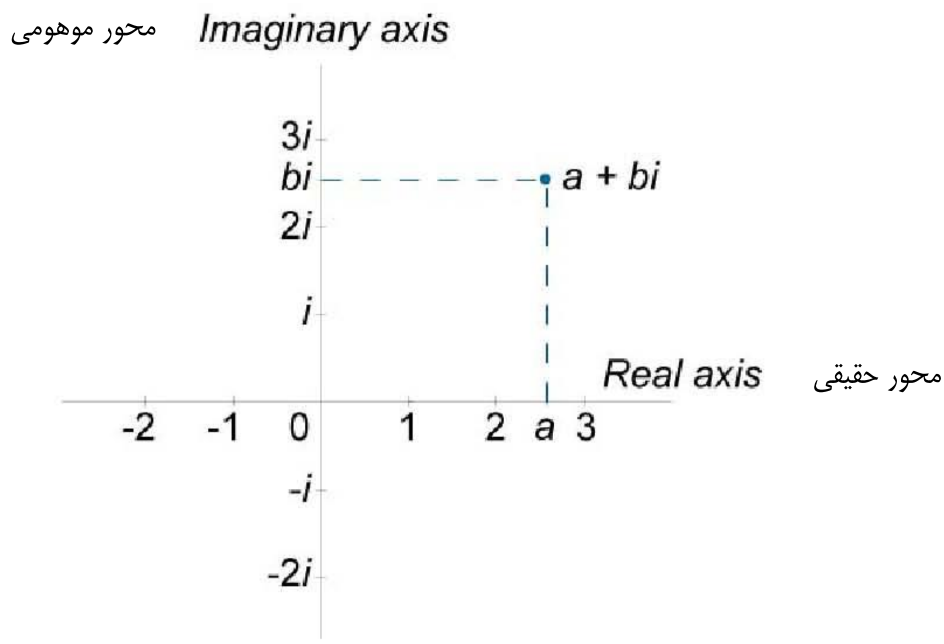
Natural number: n عدد طبیعی
Imaginary unit: i واحد موهومی
Complex number: z عدد مختلط
Real part: a, c بخش حقیقی
Imaginary part: bi, di بخش موهومی
Modulus of a complex number: r, r_1, r_2 مدول عدد مختلط
Argument of a complex number: φ, φ_1, φ_2 آرگومان (زاویه) عدد مختلط

46.

$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^{4n+1} = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{4n+2} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{4n+3} = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{4n} = 1$

47. $z = a + bi$

48. Complex Plane صفحه مختلط



شکل ۶ **Figure 6.**

49. $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

50. $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

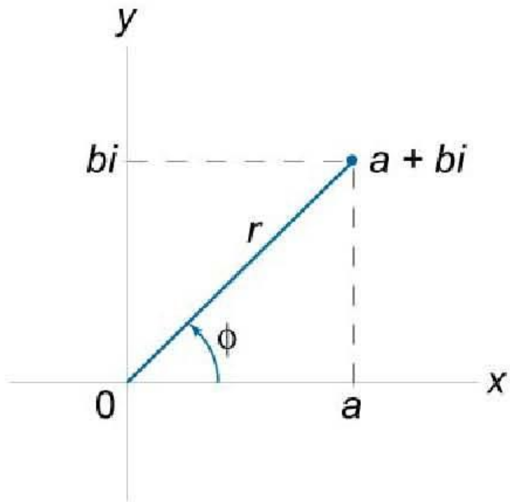
51. $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

52. $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i$

53. Conjugate Complex Numbers مزدوج اعداد مختلط

$\overline{a+bi}=a-bi$

54. $a=r\cos\varphi,\ b=r\sin\varphi$



شکل ۷ **Figure 7.**

55. Polar Presentation of Complex Numbers نمایش قطبی اعداد مختلط

$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

56. Modulus and Argument of a Complex Number مدول و آرگومان عدد مختلط

If $a+bi$ is a complex number, then اگر a+bi یک عدد مختلط باشد، آنگاه

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ (modulus), مدول

$\varphi=\arctan\dfrac{b}{a}$ (argument). آرگومان (زاویه)

57. Product in Polar Representation ضرب در نمایش قطبی

$$z_1\cdot z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

58. Conjugate Numbers in Polar Representation اعداد مزدوج در نمایش قطبی

$$\overline{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=r[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]$$

59. Inverse of a Complex Number in Polar Representation

$$\frac{1}{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{1}{r}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]$$ وارون عدد مختلط در نمایش قطبی

60. Quotient in Polar Representation كسر در نمايش قطبی

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

61. Power of a Complex Number توان عدد مختلط

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$$

62. Formula “De Moivre” فرمول «دموار»

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

63. Nth Root of a Complex Number ریشه n ام عدد مختلط

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

where که در آن

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$

64. Euler’s Formula فرمول اویلر

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

Chapter 2 فصل ۲
Algebra جبر

2.1 Factoring Formulas روابط تجزیه

Real numbers: a, b, c اعداد حقیقی
Natural number: n عدد طبیعی

65. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

66. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

67. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

68. $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$

69. $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

70. $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

71. If n is odd, then اگر n فرد باشد، آنگاه
$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$.

72. If n is even, then اگر n زوج باشد، آنگاه
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,

[این رابطه صحیح نیست! م]

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

2.2 Product Formulas روابط بسط

Real numbers: a, b, c اعداد حقیقی
Whole numbers: n, k اعداد کامل

73. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

74. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

75. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

76. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

77. $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

78. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

79. Binomial Formula فرمول دوجمله ای

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1}b + {}^nC_2 a^{n-2}b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} ab^{n-1} + {}^nC_n b^n,$$

where ${}^nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ are the binomial coefficients.
که در آن ضرایب دوجمله ای می باشند.

80. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

81. $(a+b+c+\ldots+u+v)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + u^2 + v^2 +$
$+2(ab + ac + \ldots + au + av + bc + \ldots + bu + bv + \ldots + uv)$

2.3 Powers توانها

Bases (positive real numbers): a, b پایه ها (اعداد حقیقی مثبت)
Powers (rational numbers): n, m نماها (اعداد گویا)

82. $a^m a^n = a^{m+n}$

83. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

84. $(ab)^m = a^m b^m$

85. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

86. $(a^m)^n = a^{mn}$

87. $a^0 = 1,\ a \neq 0$

88. $a^1 = 1$

89. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

90. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

2.4 Roots ریشه ها

Bases: a, b پایه ها
Powers (rational numbers): n, m نماها (اعداد گویا)
$a, b \geq 0$ for even roots ($n = 2k$, $k \in N$)
برای ریشه های زوج

91. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

92. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$

93. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$

94. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \dfrac{\sqrt[nm]{a^m}}{\sqrt[nm]{b^n}} = \sqrt[nm]{\dfrac{a^m}{b^n}}$, $b \neq 0$.

95. $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$

96. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

97. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$

98. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

99. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

100. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

101. $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$, $a \neq 0$.

102. $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

103. $\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a-b}$

2.5 Logarithms لگاریتم ها

Positive real numbers: x, y, a, c, k اعداد حقیقی مثبت
Natural number: n عدد طبیعی

104. Definition of Logarithm تعریف لگاریتم
$y = \log_a x$ if and only if $x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$.
اگر و تنها اگر

105. $\log_a 1 = 0$

106. $\log_a a = 1$

107. $\log_a 0 = \begin{cases} -\infty & \text{if } a > 1 \\ +\infty & \text{if } a < 1 \end{cases}$

108. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

109. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

110. $\log_a(x^n) = n\log_a x$

111. $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$

112. $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a} = \log_c x \cdot \log_a c,\ c > 0,\ c \neq 1.$

113. $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$

114. $x = a^{\log_a x}$

115. Logarithm to Base 10 لگاریتم پایه ۱۰

$\log_{10} x = \log x$

116. Natural Logarithm لگاریتم طبیعی

$\log_e x = \ln x$,

where $e = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = 2.718281828\ldots$

117. $\log x = \frac{1}{\ln 10}\ln x = 0.434294 \ln x$

118. $\ln x = \frac{1}{\log e}\log x = 2.302585 \log x$

2.6 Equations معادلات

Real numbers: a, b, c, p, q, u, v اعداد حقیقی
Solutions: x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 جوابها

119. Linear Equation in One Variable معادله خطی یک متغیره

$$ax + b = 0,\ x = -\frac{b}{a}.$$

120. Quadratic Equation معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0,\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

121. Discriminant دترمینان

$$D = b^2 - 4ac$$

122. Viete's Formulas فرمولهای ویت

اگر If $x^2 + px + q = 0$, then آنگاه

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}.$$

123. $$ax^2 + bx = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}.$$

124. $$ax^2 + c = 0,\ x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

125. Cubic Equation. Cardano's Formula. معادله درجه سوم. فرمول کاردانو

$$y^3 + py + q = 0,$$

$$y_1 = u + v\,,\ y_{2,3} = -\frac{1}{2}(u+v) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(u+v)i\,,$$

where که در آن

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}}\ ,\ v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}}\ .$$

2.7 Inequalities نابرابریها

متغیرها Variables: x, y, z

اعداد حقیقی Real numbers: $\begin{cases} a, b, c, d \\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \end{cases}, m, n$

دترمینانها Determinants: $D,\ D_x\,,\ D_y\,,\ D_z$

نابرابریها، نمایشهای بازه و نمودارها

126. Inequalities, Interval Notations and Graphs

Inequality نابرابریها	Interval Notation نمایش بازه	Graph نمودار
$a \le x \le b$	$[a, b]$	
$a < x \le b$	$(a, b]$	
$a \le x < b$	$[a, b)$	
$a < x < b$	(a, b)	
$-\infty < x \le b$, $x \le b$	$(-\infty, b]$	
$-\infty < x < b$, $x < b$	$(-\infty, b)$	
$a \le x < \infty$, $x \ge a$	$[a, \infty)$	
$a < x < \infty$, $x > a$	(a, ∞)	

اگر آنگاه

127. If $a > b$, then $b < a$.

یا

128. If $a > b$, then $a - b > 0$ or $b - a < 0$.

129. If $a > b$, then $a + c > b + c$.

130. If $a > b$, then $a - c > b - c$.

و

131. If $a > b$ and $c > d$, then $a + c > b + d$.

132. If $a > b$ and $c > d$, then $a - d > b - c$.

133. If $a > b$ and $m > 0$, then $ma > mb$.

134. If $a > b$ and $m > 0$, then $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

135. If $a > b$ and $m < 0$, then $ma < mb$.

136. If $a > b$ and $m < 0$, then $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$.

137. If $0 < a < b$ and $n > 0$, then $a^n < b^n$.

138. If $0 < a < b$ and $n < 0$, then $a^n > b^n$.

139. If $0 < a < b$, then $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

140. $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$,

که در آن تنها اگر a=b باشد برابری صحیح است.

where $a > 0$, $b > 0$; an equality is valid only if $a = b$.

141. $a + \frac{1}{a} \ge 2$, where $a > 0$; an equality takes place only at $a = 1$.

که در آن برابری تنها در a=1 رخ می دهد.

که در آن

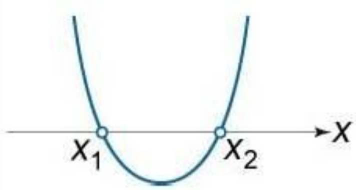
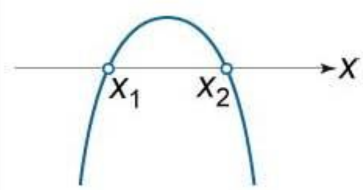
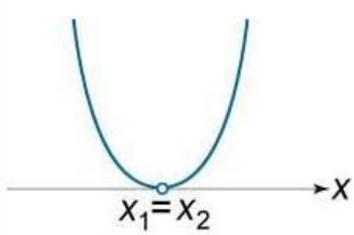
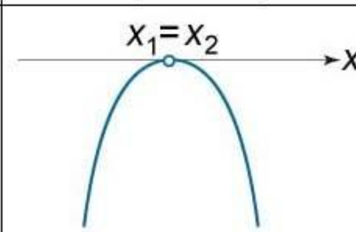
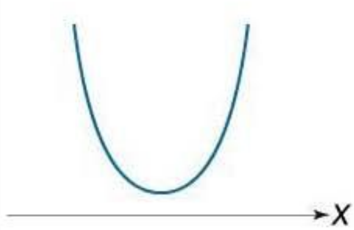
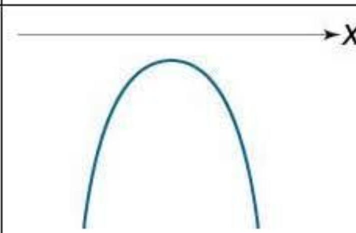
142. $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \le \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, where $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$.

اگر و آنگاه

143. If $ax + b > 0$ and $a > 0$, then $x > -\dfrac{b}{a}$.

144. If $ax + b > 0$ and $a < 0$, then $x < -\dfrac{b}{a}$.

145. $ax^2 + bx + c > 0$

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	 $x < x_1,\ x > x_2$	 $x_1 < x < x_2$
$D = 0$	 $x_1 < x,\ x > x_1$	 $x \in \varnothing$
$D < 0$	 $-\infty < x < \infty$	 $x \in \varnothing$

146. $|a+b| \le |a| + |b|$

اگر آنگاه که در آن

147. If $|x| < a$, then $-a < x < a$, where $a > 0$.

148. If $|x| > a$, then $x < -a$ and و $x > a$, where $a > 0$.

149. If $x^2 < a$, then $|x| < \sqrt{a}$, where $a > 0$.

150. If $x^2 > a$, then $|x| > \sqrt{a}$, where $a > 0$.

151. If $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, then $\begin{cases} f(x) \cdot g(x) > 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$.

152. $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, then $\begin{cases} f(x) \cdot g(x) < 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$.

2.8 Compound Interest Formulas روابط بهره ترکیبی

Future value: A مقدار آینده
Initial deposit: C سپرده اولیه
Annual rate of interest: r نرخ بهره سالیانه
Number of years invested: t تعداد سالهای سپرده گذاری
Number of times compounded per year: n تعداد دفعات ترکیب شده در سال

153. General Compound Interest Formula رابطه عمومی بهره ترکیبی

$$A = C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

154. Simplified Compound Interest Formula رابطه ساده شده بهره ترکیبی
If interest is compounded once per year, then the previous formula simplifies to: اگر بهره یک بار در سال ترکیب شود، آنگاه رابطه پیشین به این رابطه ساده می شود:
$A = C(1+r)^t$.

155. Continuous Compound Interest بهره ترکیبی پیوسته
If interest is compounded continually ($n \to \infty$), then اگر بهره به طور پیوسته ترکیب شود، آنگاه:
$A = Ce^{rt}$.

فصل ۳

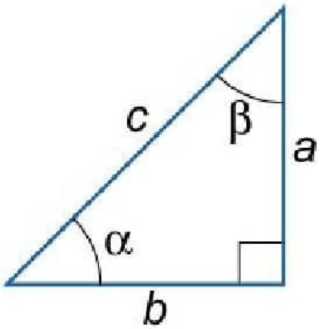
Chapter 3

هندسه

Geometry

3.1 Right Triangle مثلث قائم الزاویه

Legs of a right triangle: a, b ساقهای مثلث قائم الزاویه
Hypotenuse: c وتر
Altitude: h ارتفاع
Medians: m_a , m_b , m_c میانه ها
Angles: α ,β زوایا
Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی
Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی
Area: S مساحت



شکل ۸ **Figure 8.**

156. $\alpha+\beta=90°$

157. $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$

158. $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta$

159. $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta$

160. $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta$

161. $\sec\alpha = \frac{c}{b} = \operatorname{cosec}\beta$

162. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \sec\beta$

163. Pythagorean Theorem قضیه فیثاغورث
$a^2 + b^2 = c^2$

164. $a^2 = fc$, $b^2 = gc$,
where f and c are projections of the legs a and b, respectively, onto the hypotenuse c. که در آن f و c به ترتیب، تصویر شده های ساقهای a و b بر روی وتر c است.

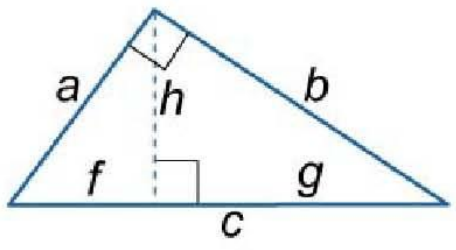


Figure 9. شکل ۹

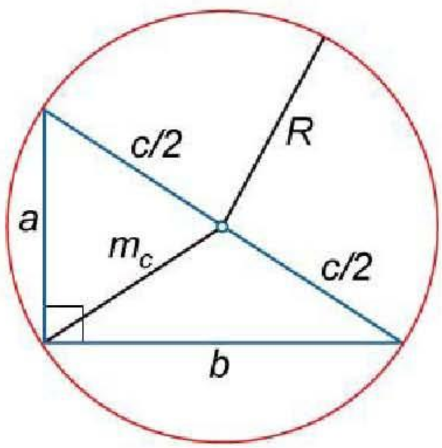
165. $h^2 = fg$, که در آن h ارتفاع از زاویه قائمه است.

where h is the altitude from the right angle.

166. $m_a^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$, $m_b^2 = a^2 - \frac{b^2}{4}$,

where m_a and m_b are the medians to the legs a and b.

که در آن میانه های وارد بر ساقهای a و b اند.



شکل ۱۰ **Figure 10.**

167. $m_c = \frac{c}{2}$,

که در آن where m_c is the median to the hypotenuse c. میانه وارد بر وتر c است.

168. $R = \frac{c}{2} = m_c$

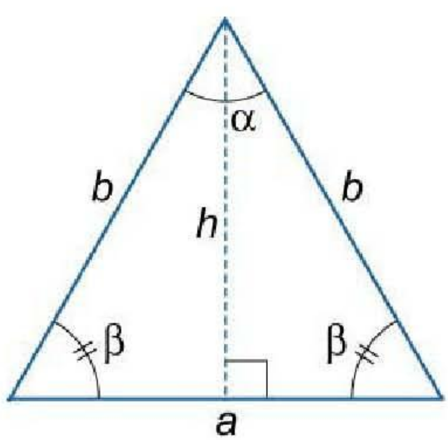
169. $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{ab}{a+b+c}$

170. $ab = ch$

171. $S = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$

3.2 Isosceles Triangle مثلث متساوی الساقین

Base: a قاعده
Legs: b ساقها
Base angle: β زاویه قاعده
Vertex angle: α زاویه روبروی قاعده
Altitude to the base: h ارتفاع وارد بر قاعده
Perimeter: L محیط
Area: S مساحت



شکل ۱۱ **Figure 11.**

172. $\beta = 90° - \frac{\alpha}{2}$

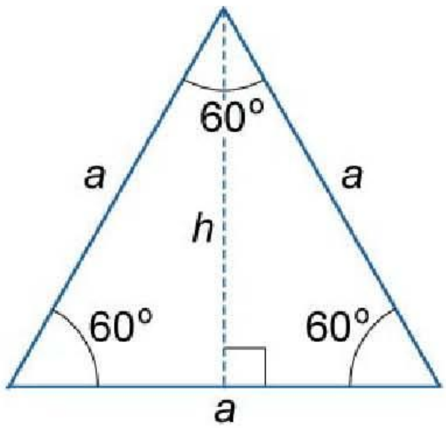
173. $h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$

174. $L = a + 2b$

175. $S = \frac{ah}{2} = \frac{b^2}{2}\sin\alpha$

3.3 Equilateral Triangle مثلث متساوی الاضلاع

Side of a equilateral triangle: a ضلع مثلث متساوی الاضلاع
Altitude: h ارتفاع
Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی
Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی
Perimeter: L محیط
Area: S مساحت



شکل ۱۲ **Figure 12.**

176. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

177. $R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

178. $r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{R}{2}$

179. $L = 3a$

180. $S = \frac{ah}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

3.4 Scalene Triangle مثلث عام

(A triangle with no two sides equal) (مثلثی با هیچ دو ضلع برابر)

Sides of a triangle: a, b, c اضلاع مثلث

Semiperimeter: $p = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط

Angles of a triangle: α, β, γ زوایای مثلث

Altitudes to the sides a, b, c: h_a, h_b, h_c ارتفاعهای وارد بر اضلاع

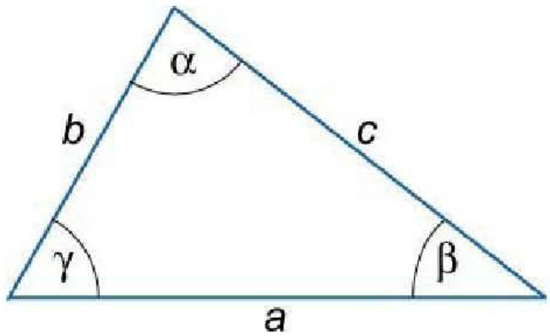
Medians to the sides a, b, c: m_a, m_b, m_c میانه های وارد بر اضلاع

Bisectors of the angles α, β, γ: t_a, t_b, t_c نیمسازهای زوایا

Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی

Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی

Area: S مساحت



شکل ۱۳ **Figure 13.**

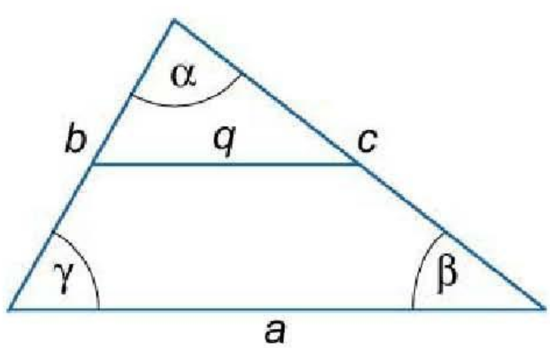
181. $\alpha+\beta+\gamma=180°$

182. $a+b>c\,,$
$b+c>a\,,$
$a+c>b\,.$

183. $|a-b|<c\,,$
$|b-c|<a\,,$
$|a-c|<b\,.$

184. Midline خط نیمه

$q=\frac{a}{2}\,,\ q\,||\,a\,.$



شکل ۱۴ **Figure 14.**

185. Law of Cosines قانون کسینوسها

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

186. Law of Sines قانون سینوسها

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

که در آن R شعاع دایره محیطی است.

where R is the radius of the circumscribed circle.

187. $$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{bc}{2h_a} = \frac{ac}{2h_b} = \frac{ab}{2h_c} = \frac{abc}{4S}$$

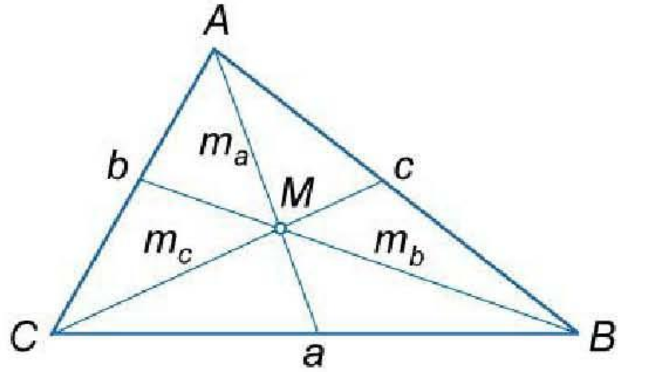
188. $$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p},$$
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

189. $$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

190. $$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

191. $$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta,$$
$$h_b = a\sin\gamma = c\sin\alpha,$$
$$h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha.$$

192. $$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$
$$m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4},$$
$$m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$



شکل ۱۵ **Figure 15.**

193. $$AM = \frac{2}{3}m_a,\ BM = \frac{2}{3}m_b,\ CM = \frac{2}{3}m_c\ \text{(Fig.15)}.$$

194. $$t_a^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2},$$
$$t_b^2 = \frac{4acp(p-b)}{(a+c)^2},$$
$$t_c^2 = \frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}.$$

195. $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$,

$S = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2}$,

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Heron's Formula), (رابطه هِرون)

$S = pr$,

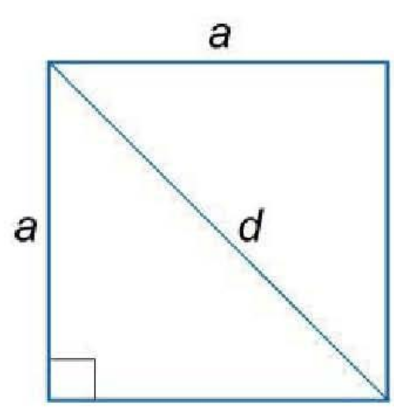
$S = \frac{abc}{4R}$,

$S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$,

$S = p^2 \tan\frac{\alpha}{2} \tan\frac{\beta}{2} \tan\frac{\gamma}{2}$.

3.5 Square مربع

Side of a square: a ضلع مربع
Diagonal: d قطر
Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی
Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی
Perimeter: L محیط
Area: S مساحت



شکل ۱۶ **Figure 16.**

196. $d = a\sqrt{2}$

197. $R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

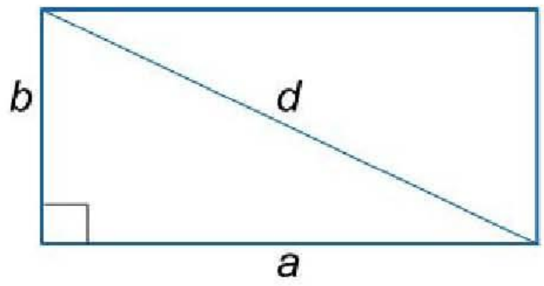
198. $r = \frac{a}{2}$

199. $L = 4a$

200. $S = a^2$

3.6 Rectangle مستطیل

Sides of a rectangle: a, b اضلاع مستطیل
Diagonal: d قطر
Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی
Perimeter: L محیط
Area: S مساحت



شکل ۱۷ **Figure 17.**

201. $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

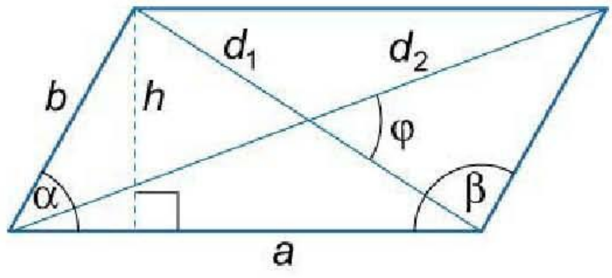
202. $R = \frac{d}{2}$

203. $L = 2(a + b)$

204. $S = ab$

3.7 Parallelogram متوازی الاضلاع

Sides of a parallelogram: a, b اضلاع متوازی الاضلاع
Diagonals: d_1, d_2 قطرها
Consecutive angles: α, β زوایای متوالی
Angle between the diagonals: φ زاویه میان اقطار
Altitude: h ارتفاع
Perimeter: L محیط
Area: S مساحت



شکل ۱۸ **Figure 18.**

205. $\alpha + \beta = 180°$

206. $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

207. $h = b\sin\alpha = b\sin\beta$

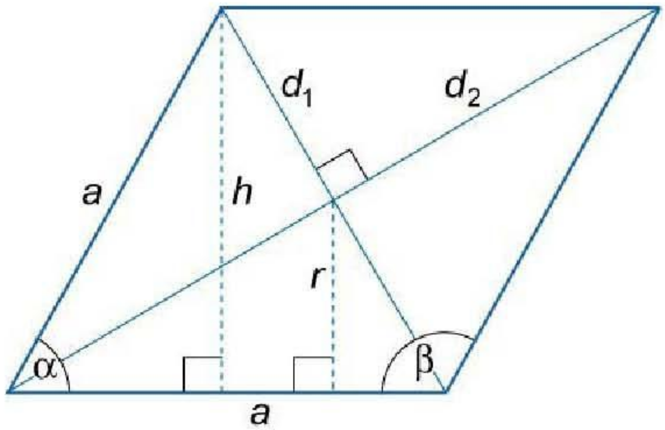
208. $L = 2(a+b)$

209. $S = ah = ab\sin\alpha\,,$

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi\,.$$

3.8 Rhombus لوزی

Side of a rhombus: a ضلع لوزی
Diagonals: d_1, d_2 قطرها
Consecutive angles: α, β زوایای متوالی
Altitude: H ارتفاع
Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی
Perimeter: L محیط
Area: S مساحت



شکل ۱۹ **Figure 19.**

210. $\alpha+\beta=180°$

211. $d_1^2+d_2^2=4a^2$

212. $h=a\sin\alpha=\dfrac{d_1d_2}{2a}$

213. $r=\dfrac{h}{2}=\dfrac{d_1d_2}{4a}=\dfrac{a\sin\alpha}{2}$

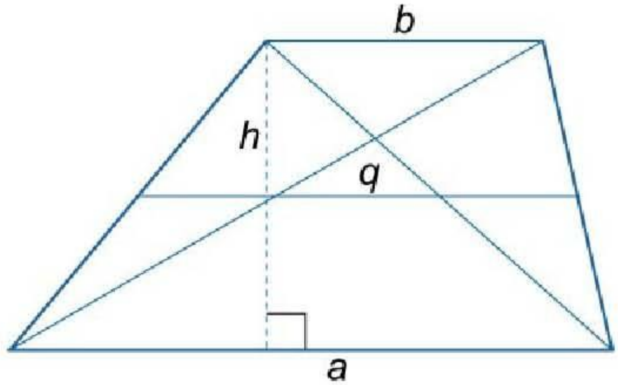
214. $L=4a$

215. $S=ah=a^2\sin\alpha$,

$S=\dfrac{1}{2}d_1d_2$.

3.9 Trapezoid ذوزنقه

Bases of a trapezoid: a, b قاعده های ذوزنقه
Midline: q خط نیمه
Altitude: h ارتفاع
Area: S مساحت



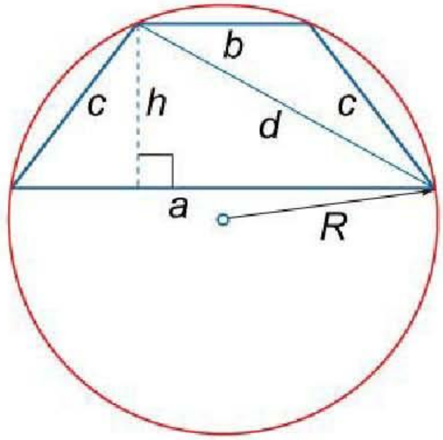
شکل ۲۰ **Figure 20.**

216. $q = \dfrac{a+b}{2}$

217. $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = qh$

3.10 Isosceles Trapezoid ذوزنقه متساوی الساقین

Bases of a trapezoid: a, b قاعده های ذوزنقه
Leg: c ساق
Midline: q خط نیمه
Altitude: h ارتفاع
Diagonal: d قطر
Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی
Area: S مساحت



شکل ۲۱ **Figure 21.**

218. $q = \frac{a+b}{2}$

219. $d = \sqrt{ab + c^2}$

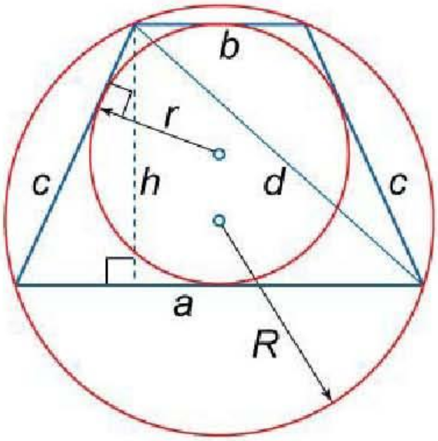
220. $h = \sqrt{c^2 - \frac{1}{4}(b-a)^2}$

221. $R = \frac{c\sqrt{ab+c^2}}{\sqrt{(2c-a+b)(2c+a-b)}}$

222. $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = qh$

3.11 Isosceles Trapezoid with Inscribed Circle ذوزنقه متساوی الساقین با دایره محاطی

Bases of a trapezoid: a, b قاعده های ذوزنقه
Leg: c ساق
Midline: q خط نیمه
Altitude: h ارتفاع
Diagonal: d قطر
Radius of inscribed circle: R شعاع دایره محاطی
Radius of circumscribed circle: r شعاع دایره محیطی
Perimeter: L محیط
Area: S مساحت



شکل ۲۲ **Figure 22.**

223. $a + b = 2c$

224. $q = \frac{a+b}{2} = c$

225. $d^2 = h^2 + c^2$

226. $r=\frac{h}{2}=\frac{\sqrt{ab}}{2}$

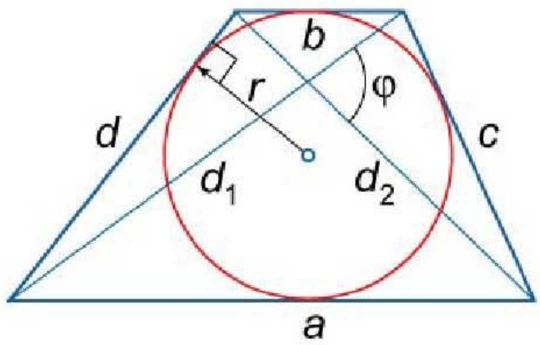
227. $R=\frac{cd}{2h}=\frac{cd}{4r}=\frac{c}{2}\sqrt{1+\frac{c^2}{ab}}=\frac{c}{2h}\sqrt{h^2+c^2}=\frac{a+b}{8}\sqrt{\frac{a}{b}+6+\frac{b}{a}}$

228. $L=2(a+b)=4c$

229. $S=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}=qh=ch=\frac{Lr}{2}$

3.12 Trapezoid with Inscribed Circle ذوزنقه با دایره محاطی

Bases of a trapezoid: a, b قاعده های ذوزنقه
Lateral sides: c, d اضلاع جانبی
Midline: q خط نیمه
Altitude: h ارتفاع
Diagonals: d_1, d_2 قطرها
Angle between the diagonals: φ زاویه میان قطرها
Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی
Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی
Perimeter: L محیط
Area: S مساحت



شکل ۲۳ **Figure 23.**

230. $a+b=c+d$

231. $q=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{c+d}{2}$

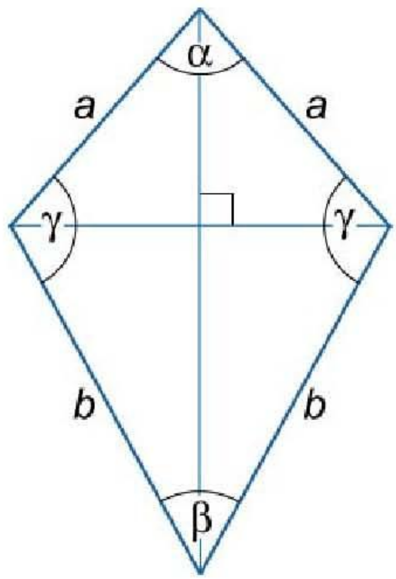
232. $L=2(a+b)=2(c+d)$

233. $S=\dfrac{a+b}{2}\cdot h=\dfrac{c+d}{2}\cdot h=qh\,,$

$S=\dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi\,.$

3.13 Kite کایت (بادبادک)

Sides of a kite: a, b اضلاع کایت
Diagonals: d_1, d_2 قطرها
Angles: α, β, γ زوایا
Perimeter: L محیط
Area: S مساحت



شکل ۲۴   **Figure 24.**

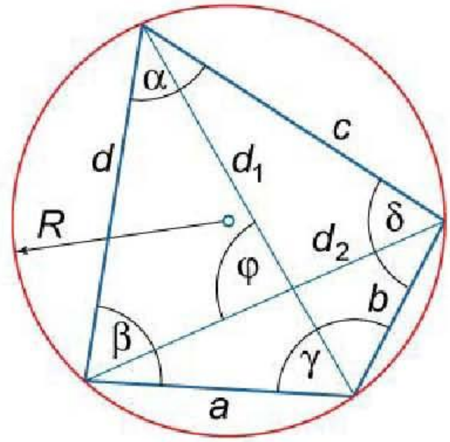
234. $\alpha + \beta + 2\gamma = 360°$

235. $L = 2(a+b)$

236. $S = \frac{d_1 d_2}{2}$

3.14 Cyclic Quadrilateral چهارضلعی محاط در دایره

Sides of a quadrilateral: a, b, c, d   اضلاع چهارضلعی
Diagonals: d_1, d_2 قطرها
Angle between the diagonals: φ زاویه میان قطرها
Internal angles: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ زوایای داخلی
Radius of circumscribed circle: R   شعاع دایره محیطی
Perimeter: L   محیط
Semiperimeter: p   نصف محیط
Area: S   مساحت



شکل ۲۵ **Figure 25.**

237. $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$

238. Ptolemy's Theorem قضیه بطلمیوس
$ac+bd=d_1d_2$

239. $L=a+b+c+d$

240. $R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$,

که در آن where $p=\frac{L}{2}$.

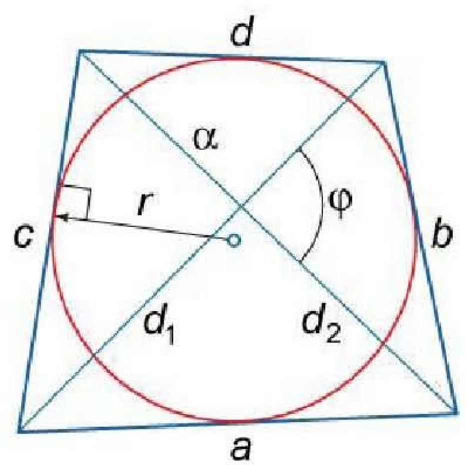
241. $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$,

$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$,

که در آن where $p=\frac{L}{2}$.

3.15 Tangential Quadrilateral چهارضلعی محیط بر دایره (مماسی)

Sides of a quadrilateral: a, b, c, d اضلاع چهارضلعی
Diagonals: d_1, d_2 قطرها
Angle between the diagonals: φ زاویه میان قطرها
Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی
Perimeter: L محیط
Semiperimeter: p نصف محیط
Area: S مساحت



شکل ۲۶ **Figure 26.**

242. $a+c=b+d$

243. $L=a+b+c+d=2(a+c)=2(b+d)$

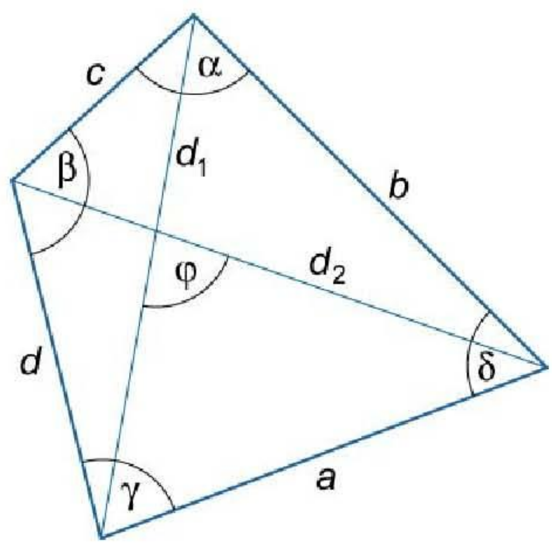
244. $$r=\frac{\sqrt{d_1^2 d_2^2-(a-b)^2(a+b-p)^2}}{2p},$$

که در آن where $p=\frac{L}{2}$.

245. $S = pr = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$

3.16 General Quadrilateral چهارضلعی عمومی

Sides of a quadrilateral: a, b, c, d اضلاع چهارضلعی
Diagonals: d_1, d_2 قطرها
Angle between the diagonals: φ زاویه میان قطرها
Internal angles: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ زوایای داخلی
Perimeter: L محیط
Area: S مساحت



شکل ۲۷ **Figure 27.**

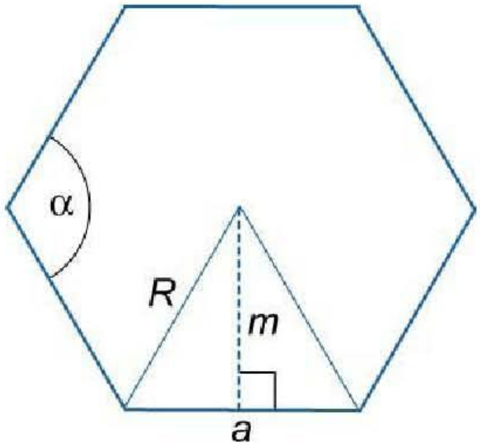
246. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

247. $L = a + b + c + d$

248. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$

3.17 Regular Hexagon شش ضلعی منتظم

Side: a ضلع
Internal angle: α زاویه داخلی
Slant height: m ارتفاع وارد بر ضلع
Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی
Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی
Perimeter: L محیط
Semiperimeter: p نصف محیط
Area: S مساحت



شکل ۲۸ **Figure 28.**

249. $\alpha = 120°$

250. $r = m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

251. $R = a$

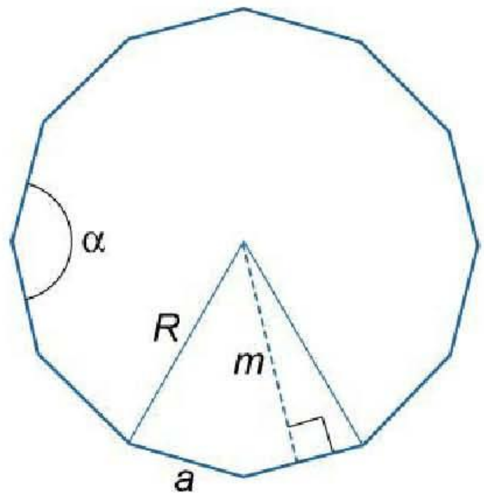
252. $L = 6a$

253. $S = pr = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$,

که در آن where $p = \frac{L}{2}$.

3.18 Regular Polygon چندضلعی منتظم

Side: a ضلع
Number of sides: n تعداد اضلاع
Internal angle: α زاویه داخلی
Slant height: m ارتفاع وارد بر ضلع
Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی
Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی
Perimeter: L محیط
Semiperimeter: p نصف محیط
Area: S مساحت



شکل ۲۹ **Figure 29.**

254. $\alpha = \dfrac{n-2}{2} \cdot 180°$

255. $\alpha = \dfrac{n-2}{2} \cdot 180°$

256. $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}$

257. $r = m = \dfrac{a}{2\tan\dfrac{\pi}{n}} = \sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{4}}$

258. $L = na$

259. $S = \dfrac{nR^2}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$,

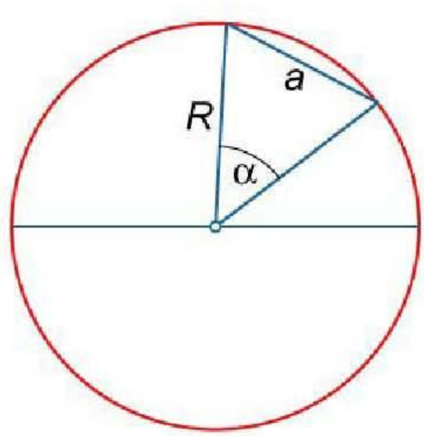
$S = pr = p\sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{4}}$,

که در آن where $p = \frac{L}{2}$.

3.19 Circle دایره

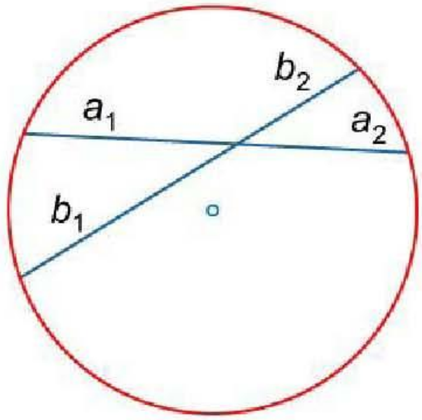
Radius: R شعاع
Diameter: d قطر
Chord: a وتر
Secant segments: e, f پاره خط سکانت
Tangent segment: g پاره خط مماس
Central angle: α زاویه مرکزی
Inscribed angle: β زاویه محاطی
Perimeter: L محیط
Area: S مساحت

260. $a = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$



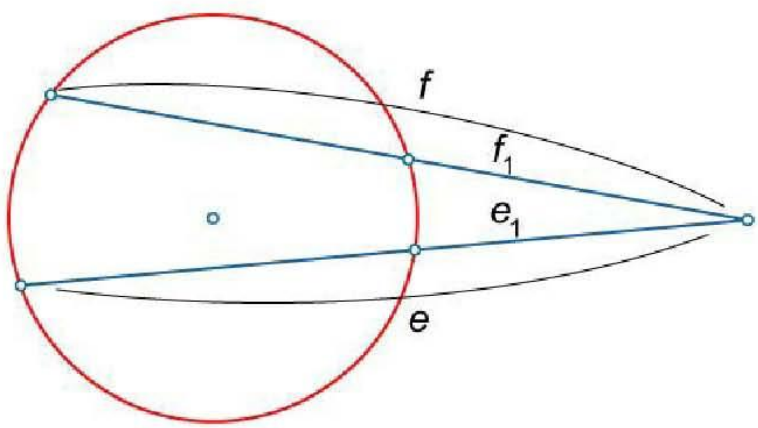
شکل ۳۰ **Figure 30.**

261. $a_1 a_2 = b_1 b_2$



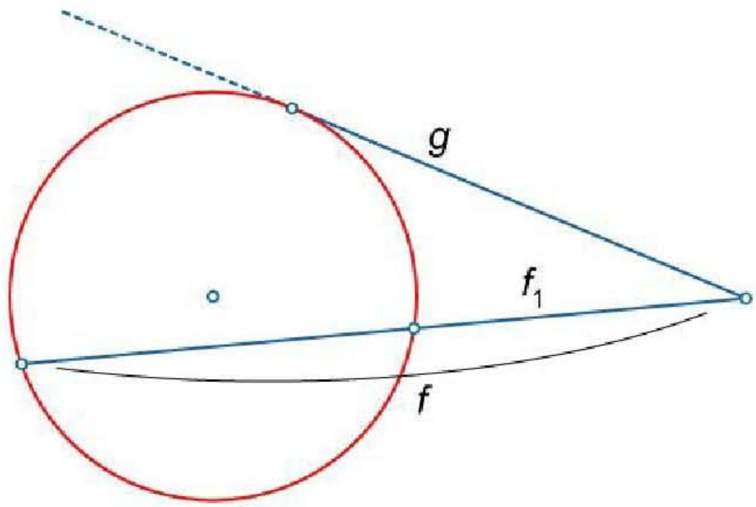
شکل ۳۱ **Figure 31.**

262. $ee_1 = ff_1$



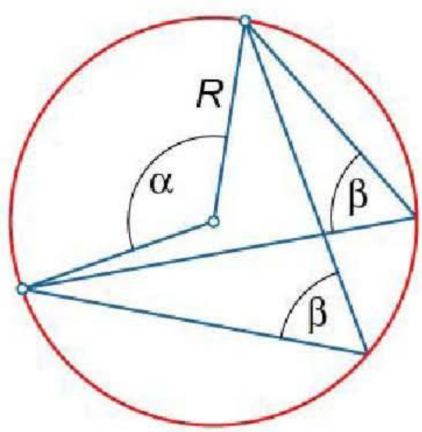
شکل ۳۲ **Figure 32.**

263. $g^2 = ff_1$



شکل ۳۳ **Figure 33.**

264. $\beta = \frac{\alpha}{2}$



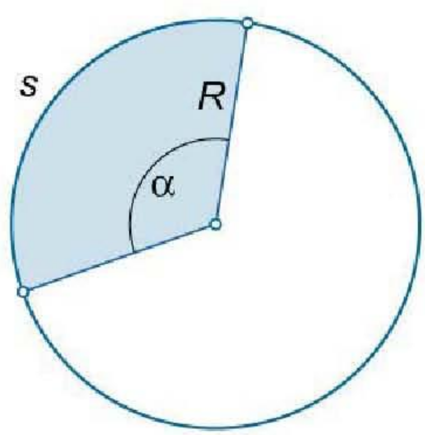
شکل ۳۴ **Figure 34.**

265. $L = 2\pi R = \pi d$

266. $S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{LR}{2}$

3.20 Sector of a Circle قطاع دایره

Radius of a circle: R شعاع دایره
Arc length: s طول کمان
Central angle (in radians): x زاویه مرکزی (برحسب رادیان)
Central angle (in degrees): α زاویه مرکزی (برحسب درجه)
Perimeter: L محیط
Area: S مساحت



شکل ۳۵ **Figure 35.**

267. $s = Rx$

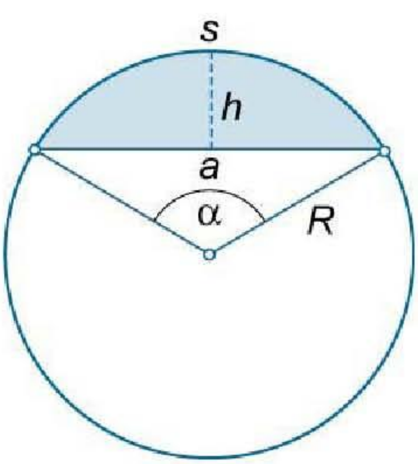
268. $s = \dfrac{\pi R \alpha}{180°}$

269. $L = s + 2R$

270. $S = \dfrac{Rs}{2} = \dfrac{R^2 x}{2} = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{360°}$

3.21 Segment of a Circle برش دایره

Radius of a circle: R شعاع دایره
Arc length: s طول کمان
Chord: a وتر
Central angle (in radians): x زاویه مرکزی (برحسب رادیان)
Central angle (in degrees): α زاویه مرکزی (برحسب درجه)
Height of the segment: h ارتفاع برش
Perimeter: L محیط
Area: S مساحت



شکل ۳۶ **Figure 36.**

271. $a = 2\sqrt{2hR - h^2}$

272. $h = R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}\ ,\ h < R$

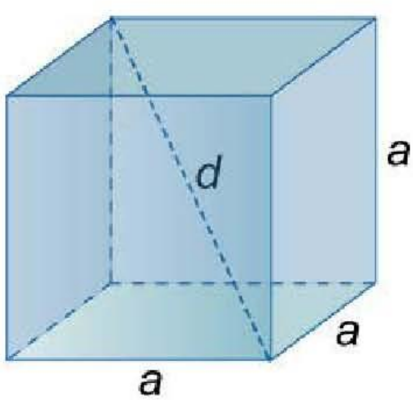
273. $L = s + a$

274. $S = \frac{1}{2}\left[sR - a(R-h)\right] = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\alpha\pi}{180°} - \sin\alpha\right) = \frac{R^2}{2}(x - \sin x),$

$S \approx \frac{2}{3}ha.$

3.22 Cube مکعب

Edge: a یال
Diagonal: d قطر
Radius of inscribed sphere: r شعاع کره محاطی
Radius of circumscribed sphere: r شعاع کره محیطی
Surface area: S مساحت سطح
Volume: V حجم



شکل ۳۷ **Figure 37.**

275. $d = a\sqrt{3}$

276. $r = \frac{a}{2}$

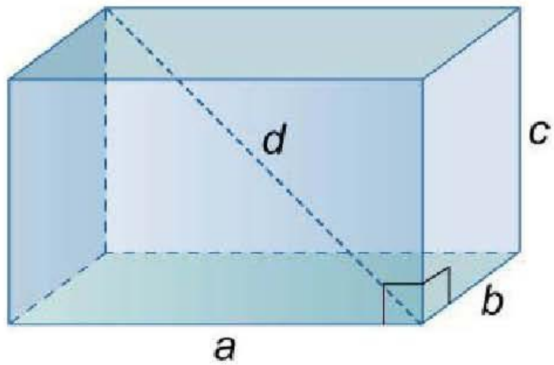
277. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

278. $S = 6a^2$

279. $V = a^3$

3.23 Rectangular Parallelepiped متوازی السطوح مستطیلی

Edges: a, b, c یالها
Diagonal: d قطر
Surface area: S مساحت سطح
Volume: V حجم



شکل ۳۸ **Figure 38.**

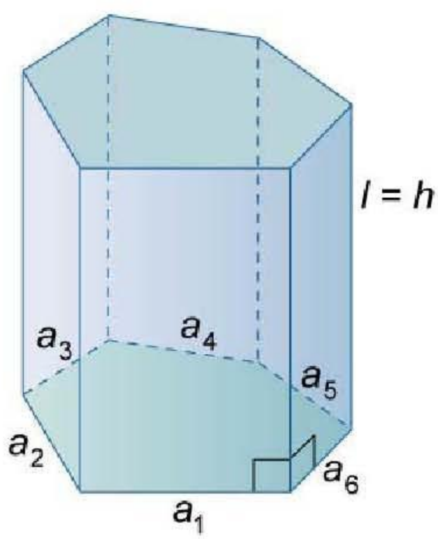
280. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

281. $S = 2(ab + ac + bc)$

282. $V = abc$

3.24 Prism منشور

Lateral edge: l یال جانبی
Height: h ارتفاع
Lateral area: S_L مساحت جانبی
Area of base: S_B مساحت قاعده
Total surface area: S مساحت سطح کل
Volume: V حجم



شکل ۳۹ **Figure 39.**

283. $S = S_L + 2S_B$.

284. Lateral Area of a Right Prism مساحت جانبی منشور قائمه
$S_L = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)l$

285. Lateral Area of an Oblique Prism مساحت جانبی منشور مایل
$S_L = pl$,
where p is the perimeter of the cross section.

که در آن p محیط سطح مقطع است.

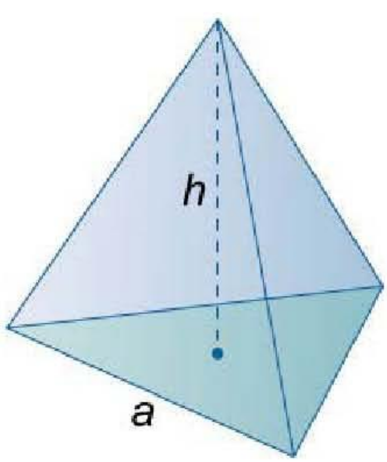
286. $V = S_B h$

287. Cavalieri's Principle اصل کاوالیر
Given two solids included between parallel planes. If every plane cross section parallel to the given planes has the same area in both solids, then the volumes of the solids are equal.

فرض کنید دو جسم سه بعدی بین صفحات موازی قرار دارند. اگر هر صفحه متقاطع موازی با دو سطح مذکور، مساحتهای سطح مقطع یکسانی در هر دو جسم داشته باشد، آنگاه حجمهای دو جسم با هم برابر است.

3.25 Regular Tetrahedron چهاروجهی منتظم

Triangle side length: a طول ضلع مثلث
Height: h ارتفاع
Area of base: S_B مساحت قاعده
Surface area: S مساحت سطح
Volume: V حجم



شکل ۴۰ **Figure 40.**

288. $h = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a$

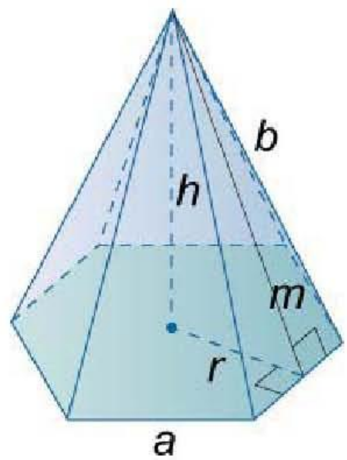
289. $S_B = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

290. $S = \sqrt{3}a^2$

291. $V = \frac{1}{3}S_B h = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$.

3.26 Regular Pyramid هرم منتظم

Side of base: a ضلع قاعده
Lateral edge: b یال جانبی
Height: h ارتفاع
Slant height: m ارتفاع وارد بر ضلع
Number of sides: n تعداد اضلاع
Semiperimeter of base: p نصف محیط قاعده
Radius of inscribed sphere of base: r شعاع کره محاطی قاعده
Area of base: S_B مساحت قاعده
Lateral surface area: S_L مساحت سطح جانبی
Total surface area: S مساحت سطح کل
Volume: V حجم



شکل ۴۱ **Figure 41.**

292. $m=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$

293. $h=\frac{\sqrt{4b^2\sin^2\frac{\pi}{n}-a^2}}{2\sin\frac{\pi}{n}}$

294. $S_L=\frac{1}{2}nam=\frac{1}{4}na\sqrt{4b^2-a^2}=pm$

295. $S_B=pr$

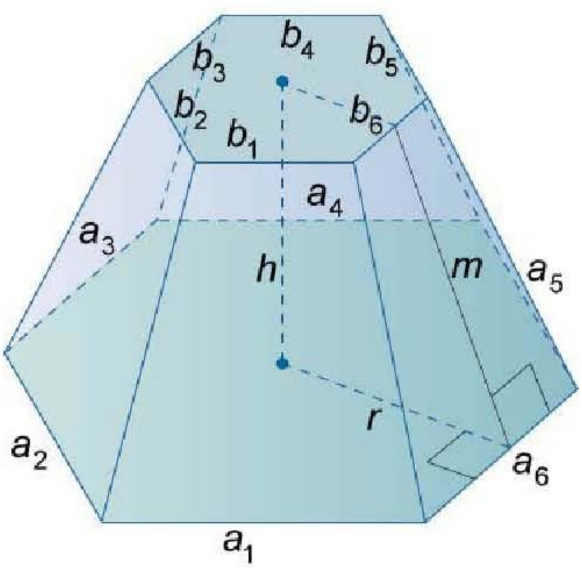
296. $S=S_B+S_L$

297. $V=\frac{1}{3}S_Bh=\frac{1}{3}prh$

3.27 Frustum of a Regular Pyramid هرم منتظم ناقص

طول اضلاع قاعده های پایین و بالا
Base and top side lengths: $\begin{cases} a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \\ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n \end{cases}$

Height: h ارتفاع
Slant height: m ارتفاع وارد بر ضلع
Area of bases: S_1, S_2 مساحت قاعده ها
Lateral surface area: S_L مساحت سطح جانبی
Perimeter of bases: P_1, P_2 محیط قاعده ها
Scale factor: k ضریب مقیاس
Total surface area: S مساحت سطح کل
Volume: V حجم



شکل ۴۲ **Figure 42.**

298. $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = \dfrac{b_3}{a_3} = \ldots = \dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{b}{a} = k$

299. $\frac{S_2}{S_1} = k^2$

300. $S_L = \frac{m(P_1 + P_2)}{2}$

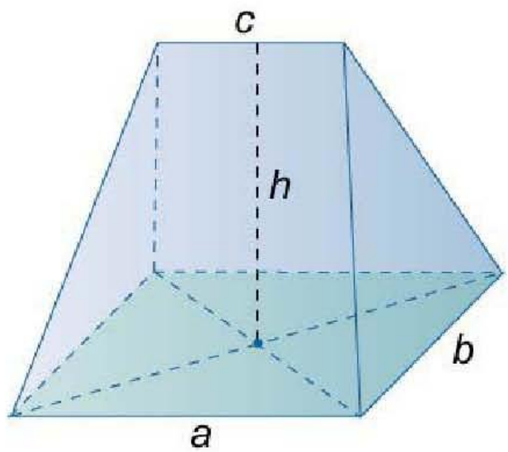
301. $S = S_L + S_1 + S_2$

302. $V = \frac{h}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$

303. $V = \frac{hS_1}{3}\left[1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right] = \frac{hS_1}{3}\left[1 + k + k^2\right]$

3.28 Rectangular Right Wedge گوه مستطیلی قائم

Sides of base: a, b اضلاع قاعده
Top edge: c یال فوقانی
Height: h ارتفاع
Lateral surface area: S_L مساحت سطح جانبی
Area of base: S_B مساحت قاعده
Total surface area: S مساحت سطح کل
Volume: V حجم



شکل ۴۳ **Figure 43.**

304. $S_L = \frac{1}{2}(a+c)\sqrt{4h^2+b^2} + b\sqrt{h^2+(a-c)^2}$

305. $S_B = ab$

306. $S = S_B + S_L$

307. $V = \frac{bh}{6}(2a+c)$

3.29 Platonic Solids احجام افلاطونی (چندوجهی های منتظم)

Edge: a یال
Radius of inscribed circle: r شعاع دایره محاطی
Radius of circumscribed circle: R شعاع دایره محیطی
Surface area: S مساحت سطح
Volume: V حجم

پنج حجم افلاطونی. احجام افلاطونی چندوجهی های محدبی هستند که دارای سطوح یکسان متشکل از چندضلعی های منتظم می باشند.

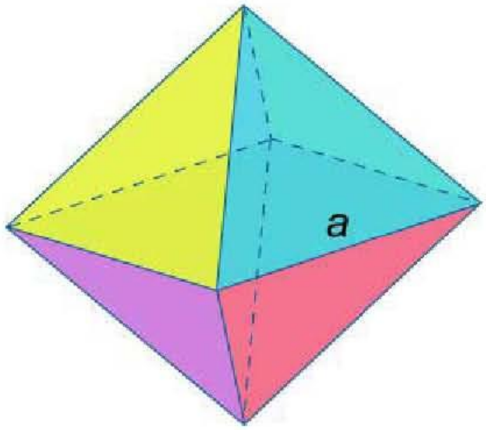
308. Five Platonic Solids

The platonic solids are convex polyhedra with equivalent faces composed of congruent convex regular polygons.

Solid جسم سه بعدی	Number of Vertices تعداد کنجها	Number of Edges تعداد یالها	Number of Faces تعداد سطوح	Section بخش
چهاروجهی منتظم Tetrahedron	4	6	4	3.25
مکعب Cube	8	12	6	3.22
هشت وجهی منتظم Octahedron	6	12	8	3.27
دوازده وجهی منتظم Icosahedron	12	30	20	3.27
Dodecahedron	20	30	12	3.27

بیست وجهی منتظم

Octahedron هشت وجهی منتظم



شکل ۴۴ **Figure 44.**

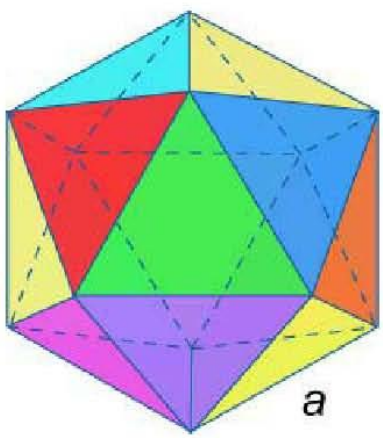
309. $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

310. $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

311. $S = 2a^2\sqrt{3}$

312. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Icosahedron بیست وجهی منتظم



شکل ۴۵ **Figure 45.**

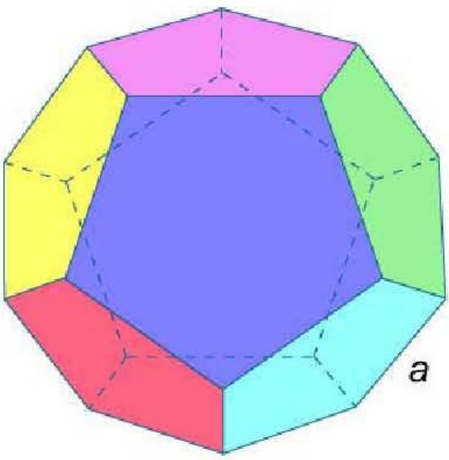
313. $r = \frac{a\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$

314. $R = \frac{a}{4}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}$

315. $S = 5a^2\sqrt{3}$

316. $V = \frac{5a^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$

Dodecahedron دوازده وجهی منتظم



شکل ۴۶ **Figure 46.**

317. $r = \dfrac{a\sqrt{10\left(25 + 11\sqrt{5}\right)}}{2}$

318. $R = \dfrac{a\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{5}\right)}{4}$

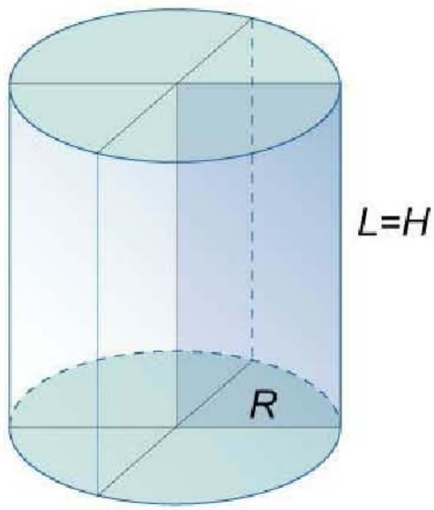
319. $S = 3a^2\sqrt{5\left(5 + 2\sqrt{5}\right)}$

320. $V = \dfrac{a^3\left(15 + 7\sqrt{5}\right)}{4}$

3.30 Right Circular Cylinder استوانه دایره ای قائم

Radius of base: R شعاع قاعده
Diameter of base: d قطر قاعده

Height: H ارتفاع
Lateral surface area: S_L مساحت سطح جانبی
Area of base: S_B مساحت قاعده
Total surface area: S مساحت سطح کل
Volume: V حجم



شکل ۴۷ **Figure 47.**

321. $S_L = 2\pi RH$

322. $S = S_L + 2S_B = 2\pi R(H+R) = \pi d\left(H + \frac{d}{2}\right)$

323. $V = S_B H = \pi R^2 H$

3.31 Right Circular Cylinder with an Oblique Plane Face استوانه دایره ای قائم با وجه مسطح مایل

Radius of base: R شعاع قاعده
The greatest height of a side: h_1 بزرگترین ارتفاع جانبی
The shortest height of a side: h_2 کوتاهترین ارتفاع جانبی
Lateral surface area: S_L مساحت سطح جانبی
Area of plane end faces: S_B مساحت وجوه مسطح انتهایی
Total surface area: S مساحت سطح کل
Volume: V حجم

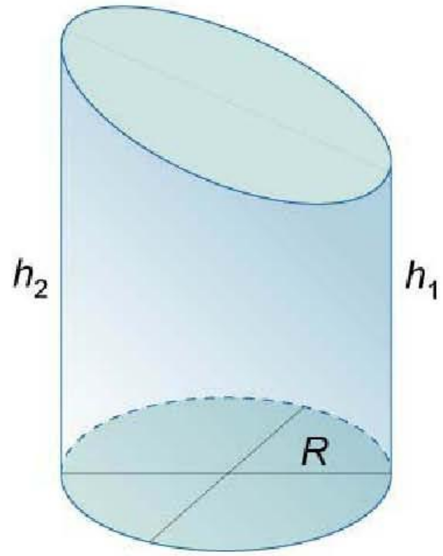


Figure 48. شکل ۴۸

324. $S_L = \pi R(h_1 + h_2)$

325. $S_B = \pi R^2 + \pi R\sqrt{R^2 + \left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right)^2}$

326. $$S = S_L + S_B = \pi R\left[h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right)^2}\right]$$

327. $$V = \frac{\pi R^2}{2}(h_1 + h_2)$$

3.32 Right Circular Cone مخروط دایره ای قائم

Radius of base: R شعاع قاعده
Diameter of base: d قطر قاعده
Height: H ارتفاع
Slant height: m ارتفاع جانبی
Lateral surface area: S_L مساحت سطح جانبی
Area of base: S_B مساحت قاعده
Total surface area: S مساحت سطح کل
Volume: V حجم

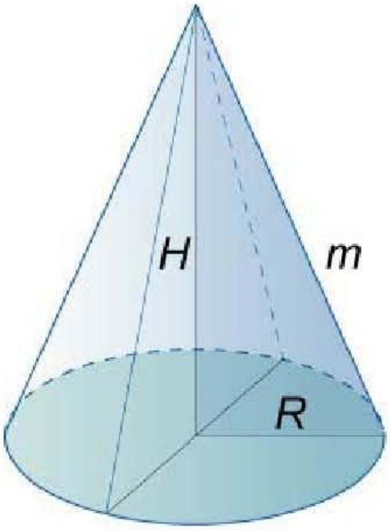


Figure 49. شکل ۴۹

328. $H=\sqrt{m^2-R^2}$

329. $S_L=\pi Rm=\frac{\pi md}{2}$

330. $S_B=\pi R^2$

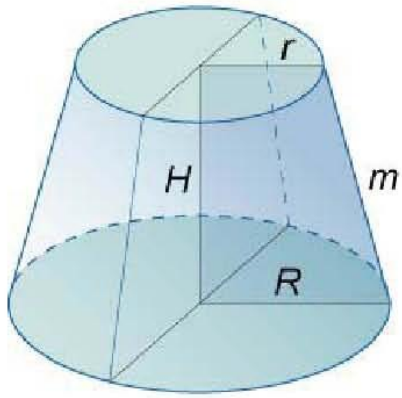
331. $S=S_L+S_B=\pi R(m+R)=\frac{1}{2}\pi d\left(m+\frac{d}{2}\right)$

332. $V=\frac{1}{3}S_BH=\frac{1}{3}\pi R^2H$

مخروط دایره ای قائم ناقص

3.33 Frustum of a Right Circular Cone

Radius of bases: R, r شعاع قاعده ها
Height: H ارتفاع
Slant height: m ارتفاع جانبی
Scale factor: k ضریب مقیاس
Area of bases: S_1, S_2 مساحت قاعده ها
Lateral surface area: S_L مساحت سطح جانبی
Total surface area: S مساحت سطح کل
Volume: V حجم



شکل ۵۰ **Figure 50.**

333. $H=\sqrt{m^2-(R-r)^2}$

334. $\frac{R}{r}=k$

335. $\frac{S_2}{S_1}=\frac{R^2}{r^2}=k^2$

336. $S_L=\pi m(R+r)$

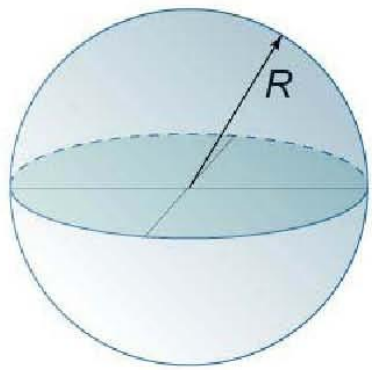
337. $S=S_1+S_2+S_L=\pi\left[R^2+r^2+m(R+r)\right]$

338. $V=\frac{h}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)$

339. $V=\frac{hS_1}{3}\left[1+\frac{R}{r}+\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]=\frac{hS_1}{3}\left[1+k+k^2\right]$

3.34 Sphere کره

شعاع Radius: R
قطر Diameter: d
مساحت سطح Surface area: S
حجم Volume: V



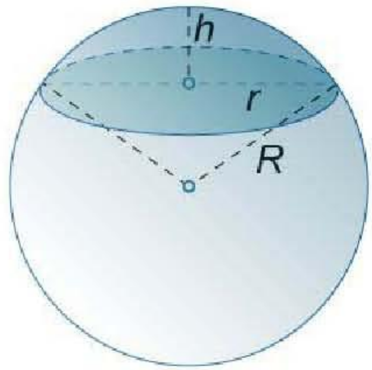
شکل ۵۱ **Figure 51.**

340. $S = 4\pi R^2$

341. $V = \frac{4}{3}\pi R^3 H = \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{1}{3}SR$

3.35 Spherical Cap عرقچین کروی

Radius of sphere: R شعاع کره
Radius of base: r شعاع قاعده
Height: h ارتفاع
Area of plane face: S_B مساحت وجه مسطح
Area of spherical cap: S_C مساحت عرقچین کروی
Total surface area: S مساحت سطح کل
Volume: V حجم



شکل ۵۲ **Figure 52.**

342. $R = \dfrac{r^2 + h^2}{2h}$

343. $S_B = \pi r^2$

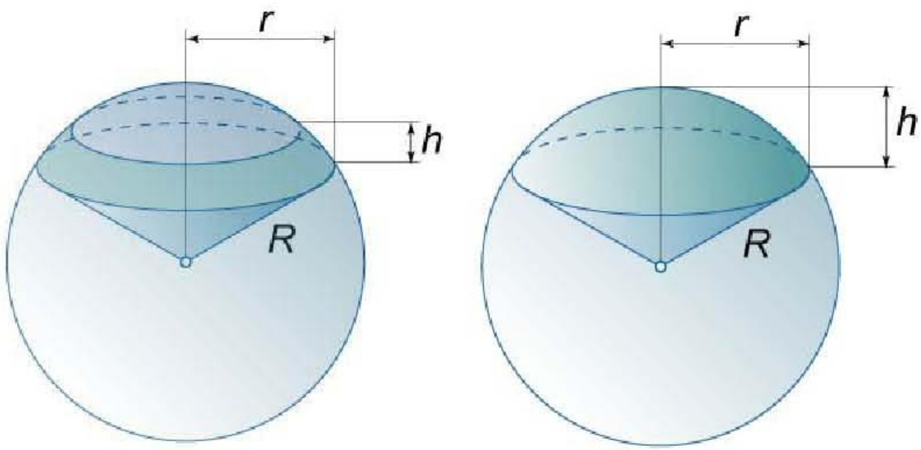
344. $S_C = \pi\left(h^2 + r^2\right)$

345. $S = S_B + S_C = \pi\left(h^2 + 2r^2\right) = \pi\left(2Rh + r^2\right)$

346. $V = \dfrac{\pi}{6} h^2 (3R - h) = \dfrac{\pi}{6} h\left(3r^2 + h^2\right)$

3.36 Spherical Sector قطاع کروی

Radius of sphere: R شعاع کره
Radius of base of spherical cap: r شعاع قاعده عرقچین کروی
Height: h ارتفاع
Total surface area: S مساحت سطح کل
Volume: V حجم



شکل ۵۳ **Figure 53.**

347. $S = \pi R(2h + r)$

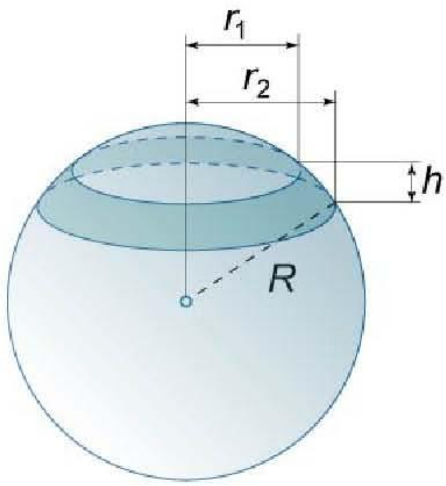
348. $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

Note: The given formulas are correct both for “open” and “closed” spherical sector.

یادداشت: فرمولهای داده شده برای هر دو قطاع کروی «باز» و «بسته» صحیح است.

3.37 Spherical Segment برش کروی

Radius of sphere: R شعاع کره
Radius of bases: r_1, r_2 شعاع قاعده ها
Height: h ارتفاع
Area of spherical surface: S_S مساحت سطح کروی
Area of plane end faces: S_1, S_2 مساحت وجوه انتهایی مسطح
Total surface area: S مساحت سطح کل
Volume: V حجم



شکل ۵۴ **Figure 54.**

349. $S_S = 2\pi Rh$

350. $S = S_S + S_1 + S_2 = \pi\left(2Rh + r_1^2 + r_2^2\right)$

351. $V = \frac{1}{6}\pi h\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right)$

3.38 Spherical Wedge گوه کروی

Radius: R شعاع
Dihedral angle in degrees: x زاویه دوسطحی برحسب درجه
Dihedral angle in radians: α زاویه دوسطحی برحسب رادیان
Area of spherical lune: S_L مساحت قاچ کروی
Total surface area: S مساحت سطح کل
Volume: V حجم

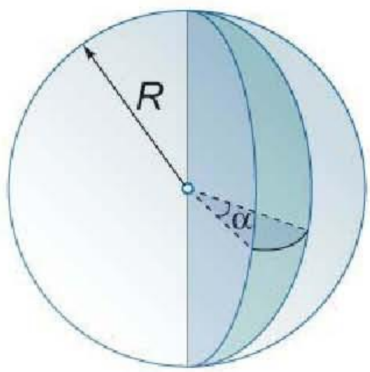


Figure 55. شکل ۵۵

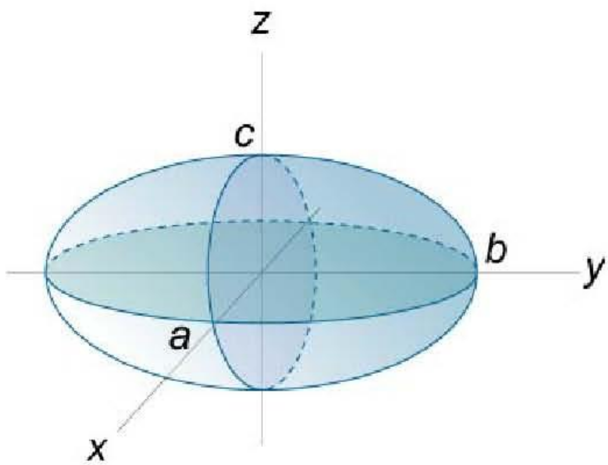
352. $S_L = \frac{\pi R^2}{90}\alpha = 2R^2 x$

353. $S = \pi R^2 + \frac{\pi R^2}{90}\alpha = \pi R^2 + 2R^2 x$

354. $V = \frac{\pi R^3}{270}\alpha = \frac{2}{3}R^3 x$

3.39 Ellipsoid بیضیگون

Semi-axes: a, b, c نیمه–محورها
Volume: V حجم



شکل ۵۶ **Figure 56.**

355. $V = \frac{4}{3}\pi abc$

Prolate Spheroid گوی گون کشیده شده

Semi-axes: a, b, b $(a > b)$ نیمه-محورها
Surface area: S مساحت سطح
Volume: V حجم

356. $S = 2\pi b\left(b + \frac{a \arcsin e}{e}\right),$

که در آن where $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$

357. $V = \frac{4}{3}\pi b^2 a$

Oblate Spheroid گوی گون له شده

Semi-axes: $a, b, b \ (a < b)$ نیمه-محورها
Surface area: S مساحت سطح
Volume: V حجم

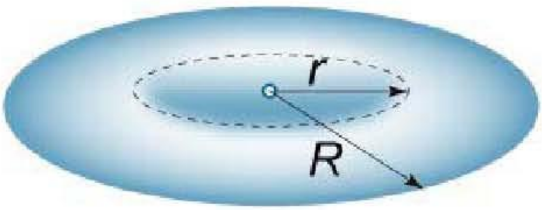
358. $$S = 2\pi b\left(b + \frac{a \operatorname{arcsinh}\left(\frac{be}{a}\right)}{be/a}\right),$$

که در آن where $e = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$.

359. $$V = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

3.40 Circular Torus تیوب دایروی

Major radius: R شعاع اصلی
Minor radius: r شعاع فرعی
Surface area: S مساحت سطح
Volume: V حجم



شکل ۵۷ **Picture 57.**

360. $S = 4\pi^2 Rr$

361. $V = 2\pi^2 Rr^2$

فصل ۴ Chapter 4

مثلثات Trigonometry

Angles: α, β زوایا

Real numbers (coordinates of a point): x, y اعداد حقیقی (مختصات یک نقطه)

Whole number: k عدد کامل

واحدهای رادیان و درجه برای زوایا
4.1 Radian and Degree Measures of Angles

362. رادیان $1\ \text{rad} = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57°17'45''$

363. $1° = \dfrac{\pi}{180}\ \text{rad} \approx 0.017453\ \text{rad}$

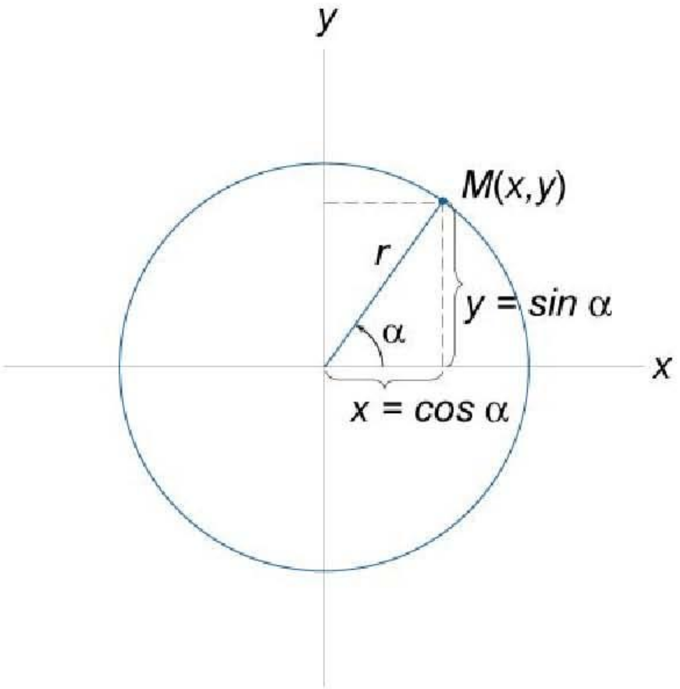
364. $1' = \dfrac{\pi}{180 \cdot 60}\ \text{rad} \approx 0.000291\ \text{rad}$

365. $1'' = \dfrac{\pi}{180 \cdot 3600}\ \text{rad} \approx 0.000005\ \text{rad}$

366.

زاویه (درجه)	Angle (degrees)	0	30	45	60	90	180	270	360
زاویه (رادیان)	Angle (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

4.2 Definitions and Graphs of Trigonometric Functions تعاریف و نمودارهای توابع مثلثاتی



شکل ۵۸ **Figure 58.**

367. $\sin\alpha = \frac{y}{r}$

368. $\cos\alpha = \frac{x}{r}$

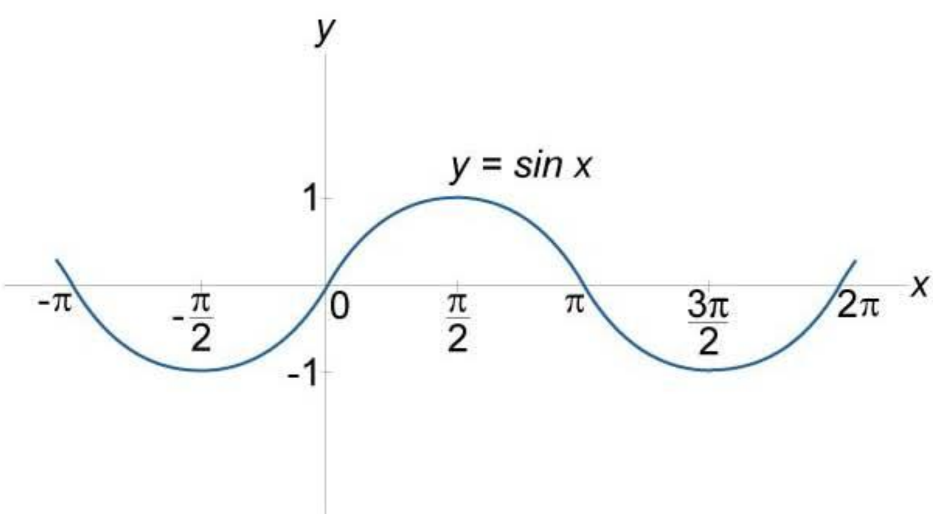
369. $\tan\alpha = \frac{y}{x}$

370. $\cot\alpha = \frac{x}{y}$

371. $\sec\alpha = \dfrac{r}{x}$

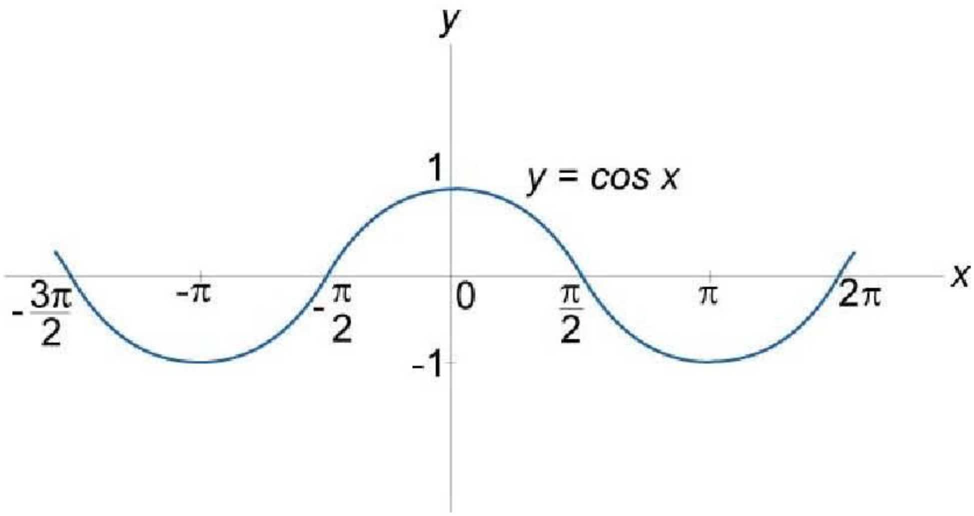
372. $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{r}{y}$

373. Sine Function تابع سینوس
$y = \sin x\,,\ -1 \le \sin x \le 1.$



شکل ۵۹ **Figure 59.**

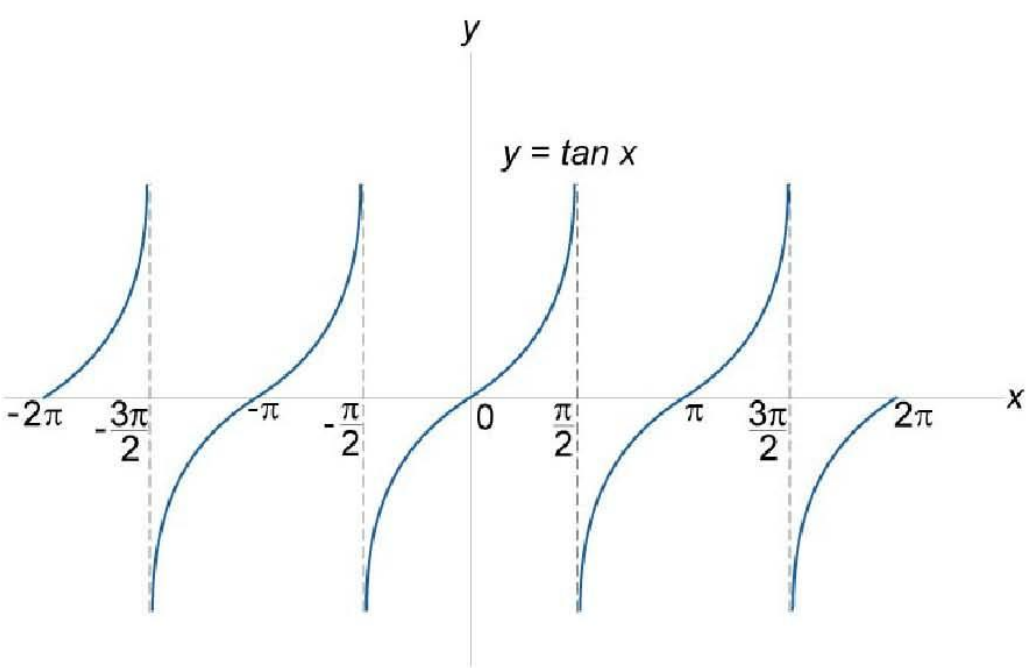
374. Cosine Function تابع کسینوس
$y = \cos x\,,\ -1 \le \cos x \le 1.$



شکل ۶۰ **Figure 60.**

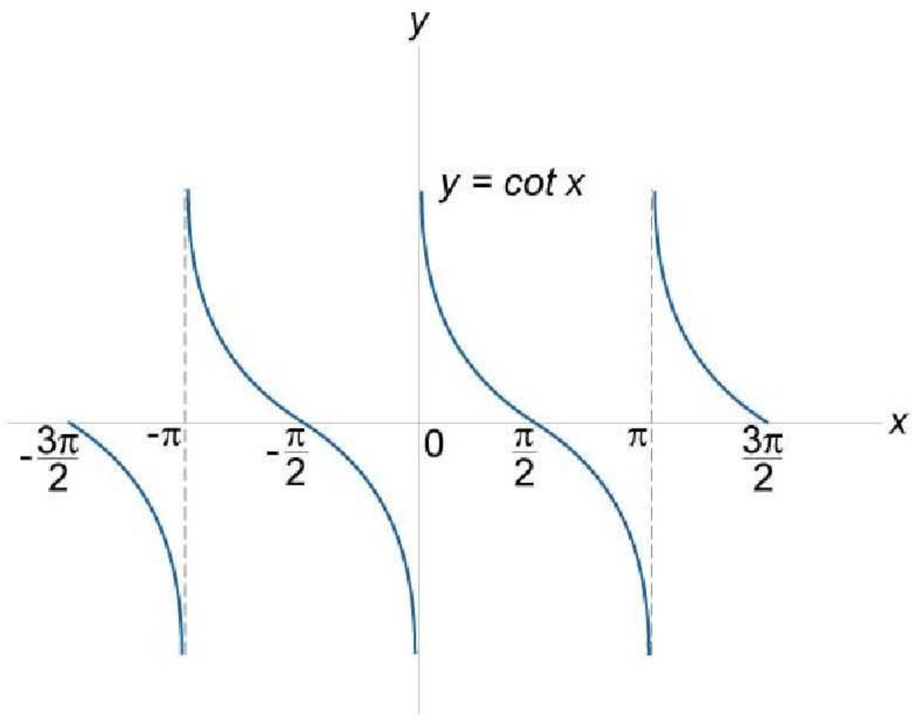
375. Tangent Function تابع تانژانت

$$y = \tan x,\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ -\infty \le \tan x \le \infty.$$



شکل ۶۱ **Figure 61.**

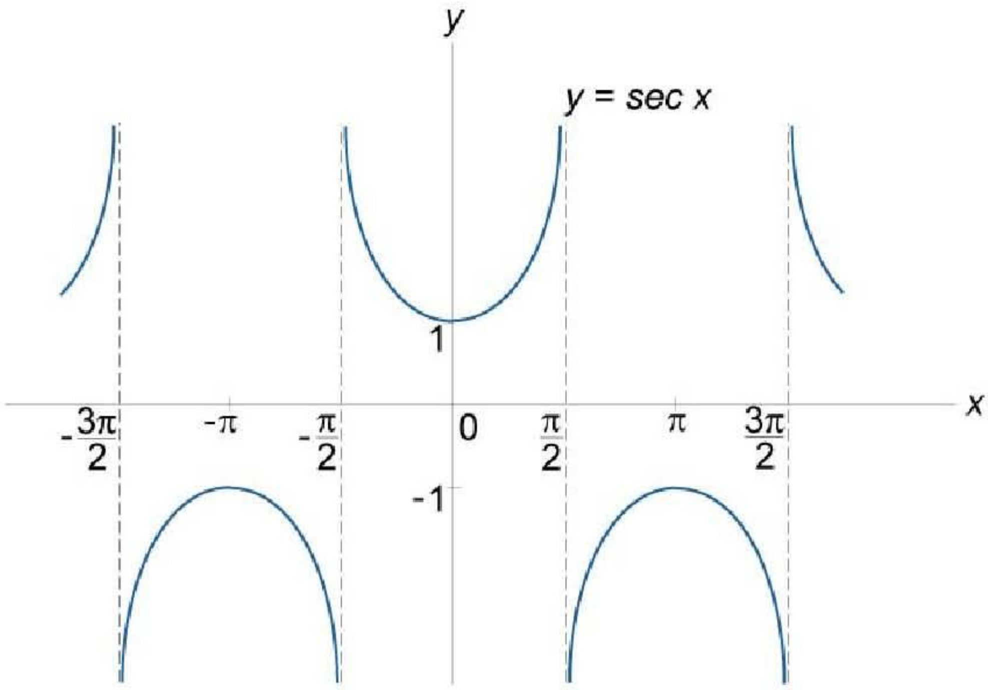
376. Cotangent Function تابع کتانژانت
$y = \cot x\,,\ x \neq k\pi\,,\ -\infty \le \cot x \le \infty\,.$



شکل ۶۲ **Figure 62.**

377. Secant Function تابع سکانت

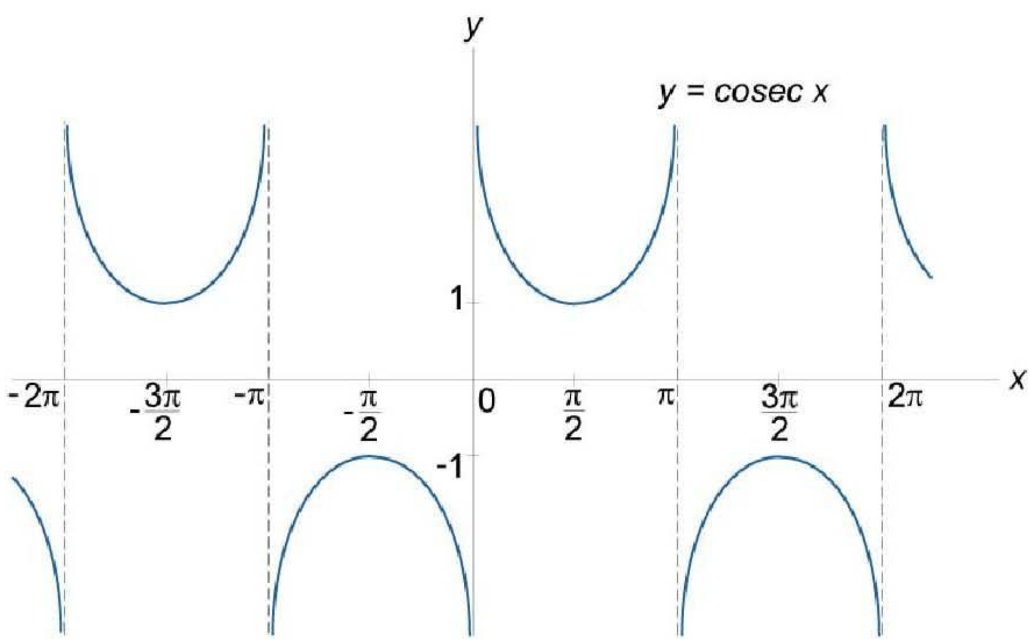
$y = \sec x\,,\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\,.$



شکل ۶۳ **Figure 63.**

378. Cosecant Function تابع کسکانت

$y = \operatorname{cosec} x\,,\ x \neq k\pi\,.$



شکل ۶۴ **Figure 64.**

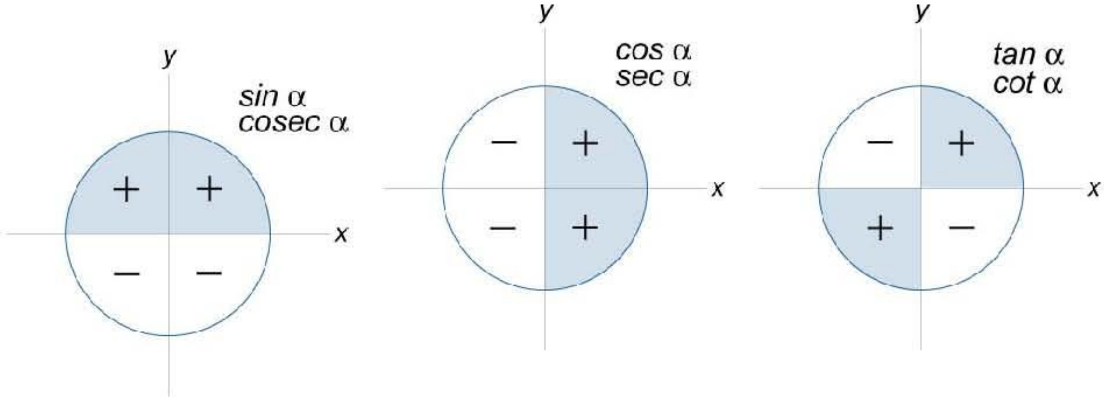
علائم توابع مثلثاتی

4.3. Signs of Trigonometric Functions

379.

ربع Quadrant	Sin α	Cos α	Tan α	Cot α	Sec α	Cosec α
I	+	+	+	+	+	+
II	+					+
III			+	+		
IV		+			+	

380.



شکل ۶۵ **Figure 65.**

توابع مثلثاتی زوایای عمومی

4.4 Trigonometric Functions of Common Angles

381.

$\alpha°$	α rad	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
0	0	0	1	0	∞	1	∞
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0	∞	1
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
180	π	0	-1	0	∞	-1	∞
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0	∞	-1
360	2π	0	1	0	∞	1	∞

382.

$\alpha°$	α rad	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
15	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
36	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
54	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
72	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$
75	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$

4.5 Most Important Formulas مهمترین روابط

383. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

384. $\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$

385. $\csc^2\alpha - \cot^2\alpha = 1$

386. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

387. $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

388. $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

389. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

390. $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

4.6 Reduction Formulas روابط کاهنده

391.

β	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\tan\beta$	$\cot\beta$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$90°-\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cot\alpha$	$+\tan\alpha$
$90°+\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$180°-\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$180°+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\tan\alpha$	$+\cot\alpha$
$270°-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cot\alpha$	$+\tan\alpha$
$270°+\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$360°-\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$360°+\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\tan\alpha$	$+\cot\alpha$

تناوب توابع مثلثاتی
4.7 Periodicity of Trigonometric Functions

392. $\sin(\alpha \pm 2\pi n) = \sin\alpha$, period 2π or $360°$.

393. $\cos(\alpha \pm 2\pi n) = \cos\alpha$, period 2π or $360°$.

394. $\tan(\alpha \pm \pi n) = \tan\alpha$, period π or $180°$.

395. $\cot(\alpha \pm \pi n) = \cot\alpha$, period π or $180°$.

روابط میان توابع مثلثاتی
4.8 Relations between Trigonometric Functions

396. $$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)} = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-1$$
$$= \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

397. $$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$
$$= \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

398. $$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1} = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

399. $$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\csc^2\alpha - 1} = \frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}} = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$$

400. $$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \pm\sqrt{1+\tan^2\alpha} = \frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

401. $$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{1+\cot^2\alpha} = \frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$$

روابط جمع و تفریق

4.9 Addition and Subtraction Formulas

402. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

403. $\sin(\alpha-y) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

404. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

405. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

406. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

407. $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

408. $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$

409. $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

روابط دو برابر زاویه

4.10 Double Angle Formulas

410. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

411. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

412. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2}{\cot\alpha - \tan\alpha}$

413. $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} = \dfrac{\cot\alpha - \tan\alpha}{2}$

روابط چند برابر زاویه

4.11 Multiple Angle Formulas

414. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha - \sin^3\alpha$

415. $\sin 4\alpha = 4\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 8\sin^3\alpha \cdot \cos\alpha$

416. $\sin 5\alpha = 5\sin\alpha - 20\sin^3\alpha + 16\sin^5\alpha$

417. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$

418. $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

419. $\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$

420. $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$

421. $\tan 4\alpha = \dfrac{4\tan\alpha - 4\tan^3\alpha}{1 - 6\tan^2\alpha + \tan^4\alpha}$

422. $\tan 5\alpha = \dfrac{\tan^5\alpha - 10\tan^3\alpha + 5\tan\alpha}{1 - 10\tan^2\alpha + 5\tan^4\alpha}$

423. $\cot 3\alpha = \dfrac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$

424. $\cot 4\alpha = \dfrac{1 - 6\tan^2\alpha + \tan^4\alpha}{4\tan\alpha - 4\tan^3\alpha}$

425. $\cot 5\alpha = \dfrac{1 - 10\tan^2\alpha + 5\tan^4\alpha}{\tan^5\alpha - 10\tan^3\alpha + 5\tan\alpha}$

روابط نصف زاویه

4.12 Half Angle Formulas

426. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$

427. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$

428. $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \csc\alpha - \cot\alpha$

429. $\cot\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \csc\alpha + \cot\alpha$

برابریهای تانژانت نصف زاویه

4.13 Half Angle Tangent Identities

430. $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$

431. $\cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$

432. $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$

433. $\cot\alpha = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}$

تبدیل عبارتهای مثلثاتی به ضرب

4.14 Transforming of Trigonometric Expressions to Product

434. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

435. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

436. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

437. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

438. $$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

439. $$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

440. $$\cot\alpha+\cot\beta=\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

441. $$\cot\alpha-\cot\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

442. $$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

443. $$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

444. $$\tan\alpha+\cot\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

445. $$\tan\alpha-\cot\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

446. $$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

447. $$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

448. $1+\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

449. $1-\sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

تبدیل عبارتهای مثلثاتی به جمع

4.15 Transforming of Trigonometric Expressions to Sum

450. $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$

451. $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$

452. $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$

453. $\tan\alpha\cdot\tan\beta = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$

454. $\cot\alpha\cdot\cot\beta = \frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$

455. $\tan\alpha\cdot\cot\beta = \frac{\tan\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha+\tan\beta}$

توانهای توابع مثلثاتی

4.16 Powers of Trigonometric Functions

456. $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

457. $\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$

458. $\sin^4\alpha = \frac{\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3}{8}$

459. $\sin^5\alpha = \frac{10\sin\alpha - 5\sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{16}$

460. $\sin^6\alpha = \frac{10 - 15\cos 2\alpha + 6\cos 4\alpha - \cos 6\alpha}{32}$

461. $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

462. $\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$

463. $\cos^4\alpha = \frac{\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3}{8}$

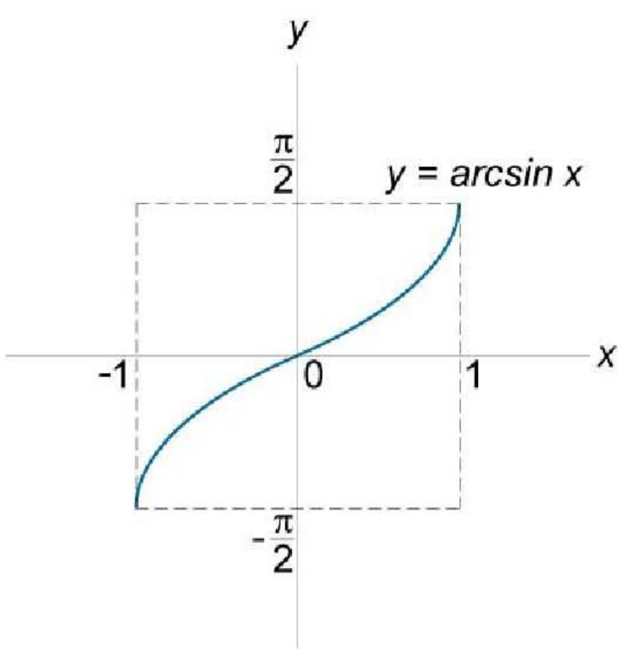
464. $\cos^5\alpha = \frac{10\cos\alpha + 5\sin 3\alpha + \cos 5\alpha}{16}$

465. $\cos^6\alpha = \frac{10 + 15\cos 2\alpha + 6\cos 4\alpha + \cos 6\alpha}{32}$

نمودارهای وارون توابع مثلثاتی
4.17 Graphs of Inverse Trigonometric Functions

466. Inverse Sine Function وارون تابع سینوس

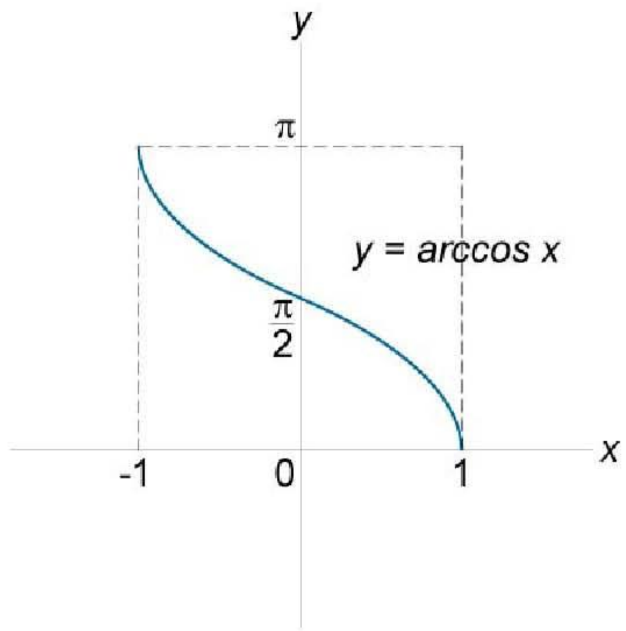
$$y = \arcsin x\,,\ -1 \le x \le 1\,,\ -\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}\,.$$



شکل ۶۶ **Figure 66.**

467. Inverse Cosine Function وارون تابع کسینوس

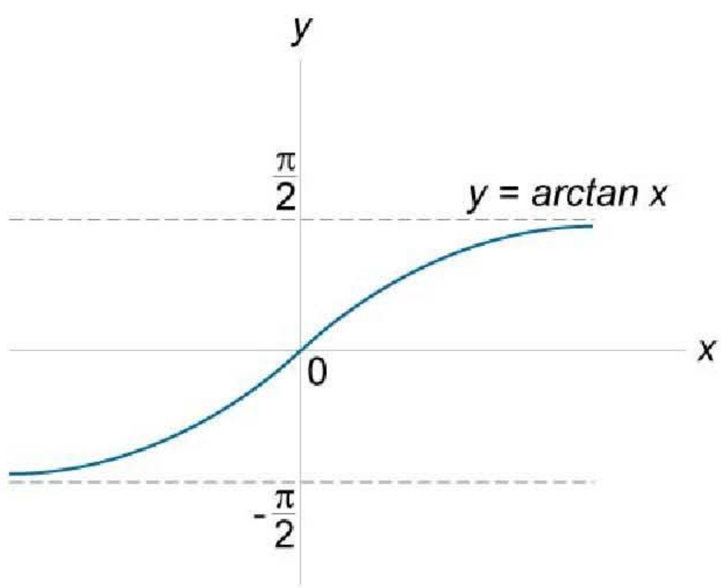
$$y = \arccos x\,,\ -1 \le x \le 1\,,\ 0 \le \arccos x \le \pi\,.$$



شکل ۶۷ **Figure 67.**

468. Inverse Tangent Function وارون تابع تانژانت

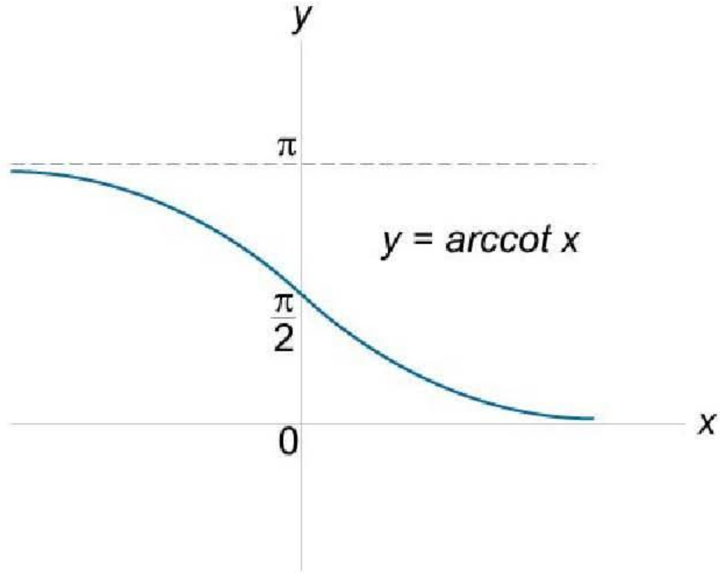
$$y = \arctan x\,,\; -\infty \le x \le \infty\,,\; -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}.$$



شکل ۶۸ **Figure 68.**

469. Inverse Cotangent Function وارون تابع کتانژانت

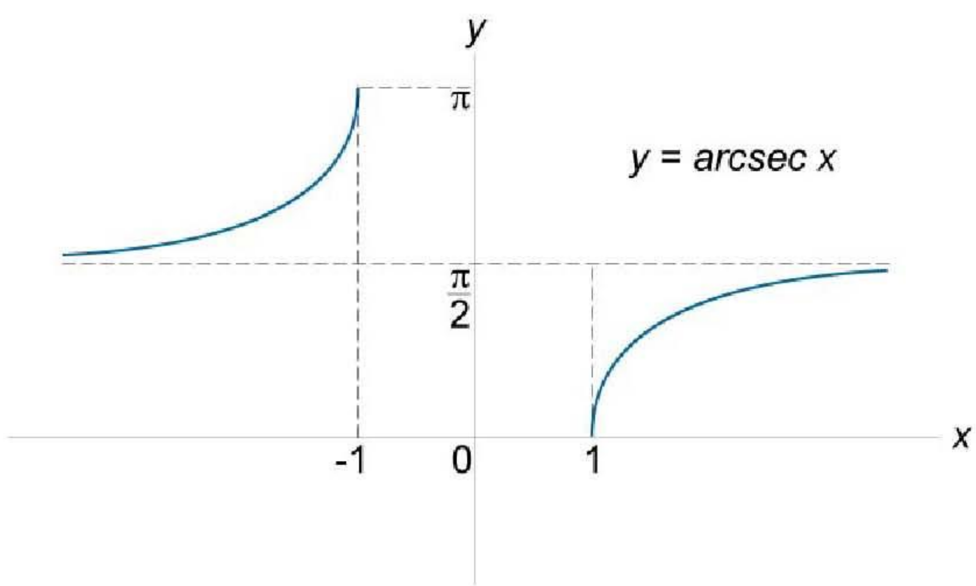
$y = \operatorname{arccot} x,\ -\infty \le x \le \infty,\ 0 < \operatorname{arccot} x < \pi.$



شکل ۶۹ **Figure 69.**

470. Inverse Secant Function وارون تابع سکانت

$y = \operatorname{arcsec} x,\ x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty),\ \operatorname{arcsec} x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right].$



شکل ۷۰ **Figure 70.**

471. Inverse Cosecant Function وارون تابع کسکانت

$$y = \operatorname{arccsc} x,\ \ x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty),\ \ \operatorname{arccsc} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

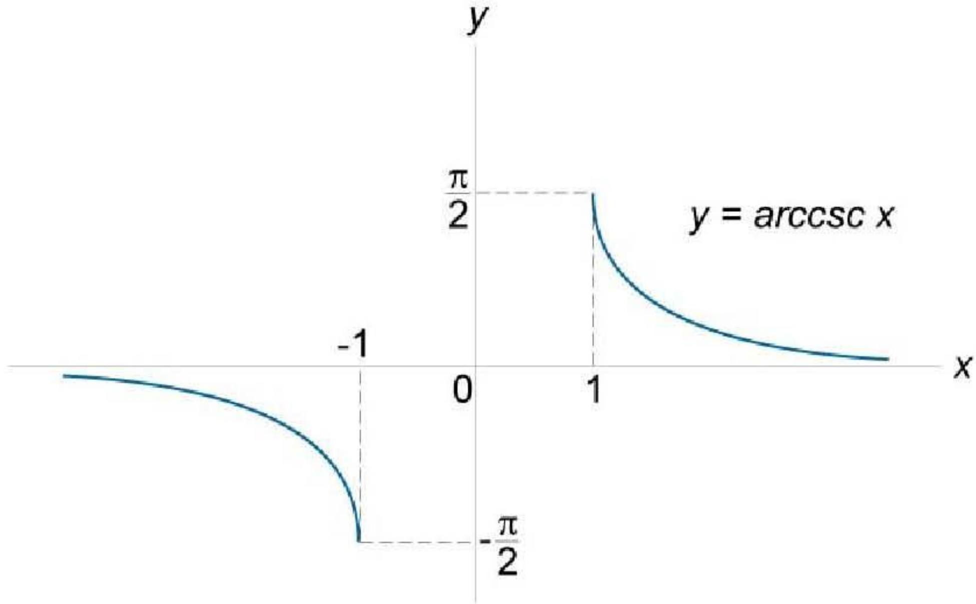


Figure 71. شکل ۷۱

4.18 Principal Values of Inverse Trigonometric Functions مقادیر اصلی وارون توابع مثلثاتی

472.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\arccos x$	$90°$	$60°$	$45°$	$30°$	$0°$
x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	
$\arcsin x$	$-30°$	$-45°$	$-60°$	$-90°$	
$\arccos x$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	

473.

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\arctan x$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$-30°$	$-45°$	$-60°$
$\operatorname{arccot} x$	$90°$	$60°$	$45°$	$30°$	$120°$	$135°$	$150°$

4.19 Relations between Inverse Trigonometric Functions

روابط میان وارون توابع مثلثاتی

474. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

475. $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$

476. $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}\ ,\ 0 \le x \le 1.$

477. $\arcsin x = -\arccos\sqrt{1-x^2}\ ,\ -1 \le x \le 0.$

478. $\arcsin x = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ x^2 < 1.$

479. $\arcsin x = \operatorname{arccot}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ ,\ 0 < x \le 1.$

480. $\arcsin x = \operatorname{arccot}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi\ ,\ -1 \le x < 0.$

481. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

482. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

483. $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2}\ ,\ 0 \le x \le 1.$

484. $\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}\ ,\ -1 \le x \le 0.$

485. $\arccos x = \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ ,\ 0 < x \le 1.$

486. $\arccos x = \pi + \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ ,\ -1 \le x < 0.$

487. $\arccos x = \operatorname{arccot}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ -1 \le x \le 1.$

488. $\arctan(-x) = -\arctan x$

489. $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x$

490. $\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

491. $\arctan x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ x \ge 0.$

492. $\arctan x = -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ x \le 0.$

493. $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x},\ x > 0.$

494. $\arctan x = -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x},\ x < 0.$

495. $\arctan x = \operatorname{arccot}\frac{1}{x},\ x > 0.$

496. $\arctan x = \operatorname{arccot}\frac{1}{x} - \pi,\ x < 0.$

497. $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$

498. $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$

499. $\operatorname{arccot} x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x > 0.$

500. $\operatorname{arccot} x = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x < 0.$

501. $\operatorname{arccot} x = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

502. $\operatorname{arccot} x = \arctan\frac{1}{x},\ x > 0.$

503. $\operatorname{arccot} x = \pi + \arctan\frac{1}{x},\ x < 0.$

4.20 Trigonometric Equations معادلات مثلثاتی

عدد کامل Whole number: n

504. $\sin x = a\,,\ \ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$

505. $\cos x = a\,,\ x = \pm \arccos a + 2\pi n$

506. $\tan x = a\,,\ x = \arctan a + \pi n$

507. $\cot x = a\,,\ x = \operatorname{arccot} a + \pi n$

روابط توابع هایپربولیک (هذلولی)

4.21 Relations to Hyperbolic Functions

واحد موهومی Imaginary unit: i

508. $\sin(ix) = i \sinh x$

509. $\tan(ix) = i \tanh x$

510. $\cot(ix) = -i \coth x$

511. $\sec(ix) = \operatorname{sech} x$

512. $\csc(ix) = -i \operatorname{csch} x$

فصل ۵

ماتریسها و دترمینانها Chapter 5

Matrices and Determinants

Matrices: A, B, C ماتریسها
Elements of a matrix: a_i , b_i , a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} عناصر ماتریس
Determinant of a matrix: det A دترمینان ماتریس
Minor of an element a_{ij} : M_{ij} فرعی یک عنصر
Cofactor of an element a_{ij} : C_{ij} همضریب یک عنصر
Transpose of a matrix: A^T , $\tilde{A}$ ترانهاده یک ماتریس
Adjoint of a matrix: adj A الحاقی یک ماتریس
Trace of a matrix: tr A ردپا (تریس) یک ماتریس
Inverse of a matrix: A^{-1} وارون یک ماتریس
Real number: k عدد حقیقی
Real variables: x_i متغیرهای حقیقی
Natural numbers: m, n اعداد طبیعی

5.1 Determinants دترمینانها

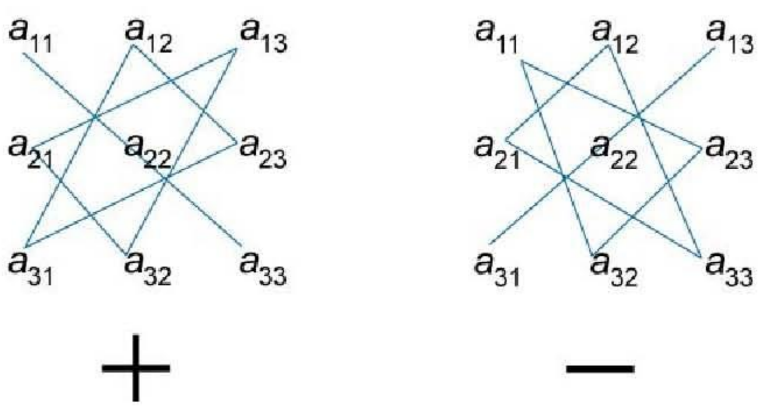
513. Second Order Determinant دترمینان مرتبه دوم

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

514. Third Order Determinant دترمینان مرتبه سوم

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

515. Sarrus Rule (Arrow Rule) قاعده ساروس (قاعده پیکان)



شکل ۷۲ **Figure 72.**

516. N-th Order Determinant دترمینان مرتبه n ام

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

517. Minor فرعی

The minor M_{ij} associated with the element a_{ij} of n-th order matrix A is the $(n-1)$-th order determinant derived from the matrix A by deletion of its i-th row and j-th column.

فرعی M_{ij} مرتبط با عنصر a_{ij} ماتریس مرتبه n ام A یک دترمینان مرتبه (n-1) ام گرفته شده از ماتریس A است که با حذف سطر i ام و ستون j ام به دست می آید.

518. Cofactor همضریب

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

بسط لاپلاس دترمینان مرتبه n ام

519. Laplace Expansion of n-th Order Determinant

Laplace expansion by elements of the i-th row

بسط لاپلاس با عناصر ردیف i ام

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Laplace expansion by elements of the j-th column

بسط لاپلاس با عناصر ستون j ام

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

ویژگیهای دترمینانها

5.2 Properties of Determinants

اگر سطرها به جای ستونها و ستونها به جای سطرها عوض شود مقدار دترمینان تغییر نمی کند.

520. The value of a determinant remains unchanged if rows are changed to columns and columns to rows.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

اگر دو سطر (یا دو ستون) جابجا شوند، علامت دترمینان تغییر می کند.

521. If two rows (or two columns) are interchanged, the sign of the determinant is changed.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

اگر دو سطر (یا دو ستون) با هم برابر باشند، مقدار دترمینان برابر با صفر است.

522. If two rows (or two columns) are identical, the value of the determinant is zero.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

اگر عناصر هر سطر (یا ستون) در یک ضریب مشترک ضرب شوند، دترمینان نیز در همان ضریب ضرب می شود.

523. If the elements of any row (or column) are multiplied by a common factor, the determinant is multiplied by that factor.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

524. If the elements of any row (or column) are increased (or decreased)by equal multiples of the corresponding elements of any other row (or column), the value of the determinant is unchanged.

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

اگر عناصر هر سطر (یا ستون) با ضریبی از عناصر هر سطر (یا ستون) دیگر جمع (و یا تفریق) شوند، مقدار دترمینان تغییر نمی کند.

5.3 Matrices ماتریسها

تعریف: یک ماتریس A با ابعاد m*n آرایه ای مستطیلی از عناصر (اعداد یا توابع) با m سطر و n ستون است.

525. Definition

An $m \times n$ matrix A is a rectangular array of elements (numbers or functions) with m rows and n columns.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی ماتریسی از مرتبه n*n است.

526. Square matrix is a matrix of order $n \times n$.

ماتریس مربعی $[a_{ij}]$ متقارن است اگر $a_{ij}=a_{ji}$، یعنی نسبت به قطر اصلی متقارن باشد.

527. A square matrix $[a_{ij}]$ is symmetric if $a_{ij} = a_{ji}$, i.e. it is symmetric about the leading diagonal.

ماتریس مربعی $[a_{ij}]$ پادمتقارن است اگر $a_{ij}=-a_{ji}$ باشد.

528. A square matrix $[a_{ij}]$ is skew-symmetric if $a_{ij} = -a_{ji}$.

ماتریس قطری به ماتریسی گفته می شود که تمامی عناصر آن به جز عناصر روی قطر اصلی، صفر باشند.

529. Diagonal matrix is a square matrix with all elements zero except those on the leading diagonal.

ماتریس واحد به ماتریس قطری گفته می شود که تمامی عناصر روی قطر اصلی آن برابر یک باشند.

530. Unit matrix is a diagonal matrix in which the elements on the leading diagonal are all unity. The unit matrix is denoted by I. ماتریس واحد با I نشان داده می شود.

ماتریس صفر به ماتریسی گفته می شود که تمامی عناصر آن برابر صفر باشند.

531. A null matrix is one whose elements are all zero.

عملیات ماتریسها

5.4 Operations with Matrices

دو ماتریس A و B با هم برابراند اگر، و تنها اگر، هر دو شکل یکسان m*n داشته و عناصر متناظرشان برابر باشند.

532. Two matrices A and B are equal if, and only if, they are both of the same shape $m \times n$ and corresponding elements are equal.

دو ماتریس A و B را می توان جمع (یا تفریق) کرد اگر، و تنها اگر، هر دو شکل یکسان m*n داشته باشند. اگر

533. Two matrices A and B can be added (or subtracted) of, and only if, they have the same shape $m \times n$. If

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

then آنگاه

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

اگر k اسکالر، و $A=[a_{ij}]$ ماتریس باشد، آنگاه

534. If k is a scalar, and $A=[a_{ij}]$ is a matrix, then

$$kA=[ka_{ij}]=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

535. Multiplication of Two Matrices ضرب دو ماتریس

Two matrices can be multiplied together only when the number of columns in the first is equal to the number of rows in the second.

دو ماتریس را تنها هنگامی می توان در هم ضرب کرد که تعداد ستونهای ماتریس نخست با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد.

If اگر

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$B=[b_{ij}]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix},$$

then آنگاه

$$AB = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{bmatrix},$$

where که در آن

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda}b_{\lambda j}$$
$$(i = 1, 2, \dots, m\,;\, j = 1, 2, \dots, k).$$

Thus if بنابراین اگر

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},\ B = [b_i] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

then آنگاه

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 & a_{12}b_2 & a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 & a_{22}b_2 & a_{23}b_3 \end{bmatrix}.$$

536. Transpose of a Matrix ترانهاده ماتریس
If the rows and columns of a matrix are interchanged, then the new matrix is called the transpose of the original matrix. If A is the original matrix, its transpose is denoted A^T or $\tilde{A}$.

اگر جای سطرها و ستونهای یک ماتریس عوض شود، آنگاه ماتریس جدید ترانهاده ماتریس اولیه نامیده می شود. اگر A ماتریس اولیه باشد، ترانهاده آن با A^T نشان داده می شود.

537. The matrix A is orthogonal if $AA^T = I$.

اگر $AA^T=I$ باشد ماتریس A متعامد نامیده می شود.

538. If the matrix product AB is defined, then
$(AB)^T = B^T A^T$.

اگر ضرب ماتریسی AB تعریف شود، آنگاه

539. Adjoint of Matrix الحاقی ماتریس
If A is a square $n \times n$ matrix, its adjoint, denoted by adj A ,
is the transpose of the matrix of cofactors C_{ij} of A:
$\operatorname{adj} A = [C_{ij}]^T$. اگر A ماتریس مربعی n*n باشد، الحاقی آن، که با adj A نشان
داده می شود، ترانهاده ماتریس همضریبهای C_{ij} از A می باشد.

540. Trace of a Matrix ردپای (تریس) ماتریس
If A is a square $n \times n$ matrix, its trace, denoted by tr A , is
defined to be the sum of the terms on the leading diagonal:
$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. اگر A ماتریس مربعی n*n باشد، ردپای (تریس) آن، که با tr A
نشان داده می شود، مجموع عبارات قطر اصلی آن می باشد.

541. Inverse of a Matrix وارون ماتریس
If A is a square $n \times n$ matrix with a nonsingular determinant
det A , then its inverse A^{-1} is given by
$A^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj} A}{\det A}$. اگر A ماتریس مربعی n*n با دترمینان det A غیرصفر باشد، آنگاه وارون A^{-1}
آن با رابطه زیر به دست می آید.

542. If the matrix product AB is defined, then
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

543. If A is a square $n \times n$ matrix, the eigenvectors X satisfy
the equation اگر A ماتریس مربعی n*n باشد، بردار ویژه X رابطه زیر را برآورده می کند
$AX = \lambda X$,
while the eigenvalues λ satisfy the characteristic equation
$|A - \lambda I| = 0$. حال آنکه مقدار ویژه لاندا معادله مشخصه زیر را برآورده می کند

5.5 Systems of Linear Equations دستگاه های معادلات خطی

Variables: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$ متغیرها
Real numbers: $a_1, a_2, a_3, b_1, a_{11}, a_{12}, \ldots$ اعداد حقیقی

Determinants: D, D_x, D_y, D_z دترمینانها
Matrices: A, B, X ماتریسها

544. $\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{cases}$,

$x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$ (Cramer's rule), (قاعده کرامر)

where که در آن

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} = d_1b_2 - d_2b_1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = a_1d_2 - a_2d_1.$$

اگر D غیر صفر باشد، آنگاه دستگاه جواب منفرد دارد:

545. If $D \neq 0$, then the system has a single solution:

$x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$.

اگر D صفر باشد و D_x (یا D_y) غیر صفر باشد، آنگاه دستگاه جواب ندارد.

If $D = 0$ and $D_x \neq 0$ (or $D_y \neq 0$), then the system has no solution.

اگر $D=D_x=D_y=0$ باشد، آنگاه دستگاه بی نهایت جواب دارد.

If $D = D_x = D_y = 0$, then the system has infinitely many solutions.

546. $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

$x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$, $z = \dfrac{D_z}{D}$ (Cramer's rule), (قاعده کرامر)

where که در آن

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\ D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

اگر D غیر صفر باشد، آنگاه دستگاه جواب منفرد دارد:

547. If $D \neq 0$, then the system has a single solution:

$$x=\frac{D_x}{D},\ y=\frac{D_y}{D},\ z=\frac{D_z}{D}.$$

If $D=0$ and $D_x \neq 0$ (or $D_y \neq 0$ or $D_z \neq 0$), then the system has no solution. اگر D صفر باشد و D_x (یا D_y) غیر صفر باشد، آنگاه دستگاه جواب ندارد.

If $D=D_x=D_y=D_z=0$, then the system has infinitely many solutions. اگر $D=D_x=D_y=0$ باشد، آنگاه دستگاه بی نهایت جواب دارد.

548. Matrix Form of a System of n Linear Equations in n Unknowns شکل ماتریسی دستگاه n معادله خطی با n مجهول

The set of linear equations مجموعه معادلات خطی

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

can be written in matrix form را می توان به شکل ماتریسی نوشت

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

i.e. یعنی

$$A \cdot X = B,$$

where که در آن

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

549. Solution of a Set of Linear Equations $n \times n$

حل مجموعه ای از معادلات خطی n*n

$X = A^{-1} \cdot B$,

where A^{-1} is the inverse of A.

که در آن A^{-1} وارون A است.

فصل ۶ Chapter 6
بردارها Vectors

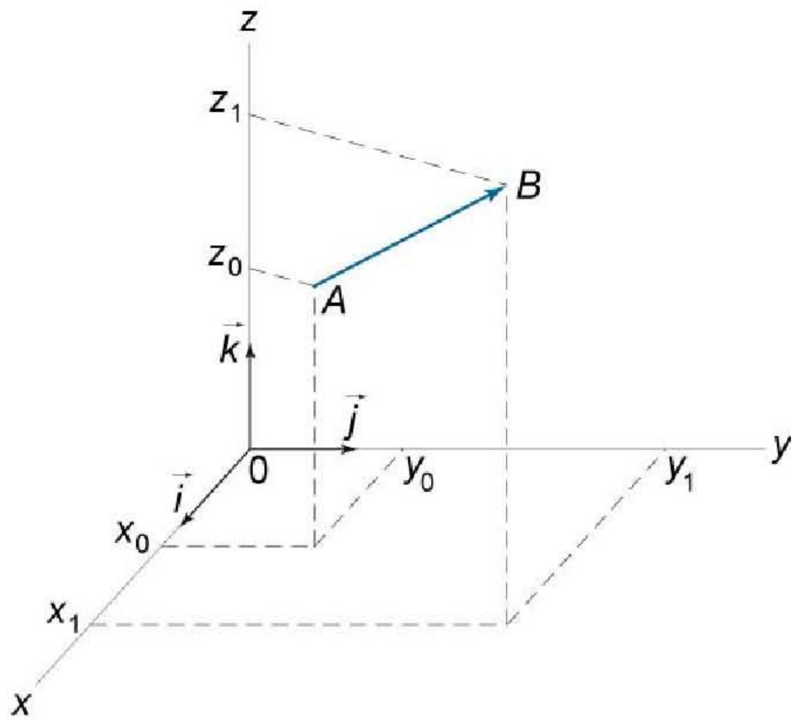
Vectors: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{r}, \overrightarrow{AB}, \ldots$ بردارها
Vector length: $|\vec{u}|, |\vec{v}|, \ldots$ طول بردار
Unit vectors: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بردارهای واحد
Null vector: $\vec{0}$ بردار صفر
Coordinates of vector $\vec{u}$: X_1, Y_1, Z_1 مختصات بردار
Coordinates of vector $\vec{v}$: X_2, Y_2, Z_2 مختصات بردار
Scalars: λ, μ اسکالرها
Direction cosines: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ کسینوسهای هادی
Angle between two vectors: θ زاویه میان دو بردار

6.1 Vector Coordinates مختصات بردار

550. Unit Vectors بردارهای واحد

$$\vec{i} = (1,0,0),$$
$$\vec{j} = (0,1,0),$$
$$\vec{k} = (0,0,1),$$
$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

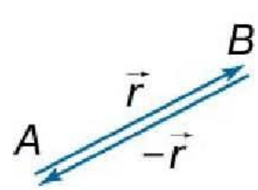
551. $\vec{r} = \overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} + (z_1 - z_0)\vec{k}$



شکل ۷۳ **Figure 73.**

552. $|\vec{r}| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$

553. If (اگر) $\overrightarrow{AB} = \vec{r}$, then (آنگاه) $\overrightarrow{BA} = -\vec{r}$.

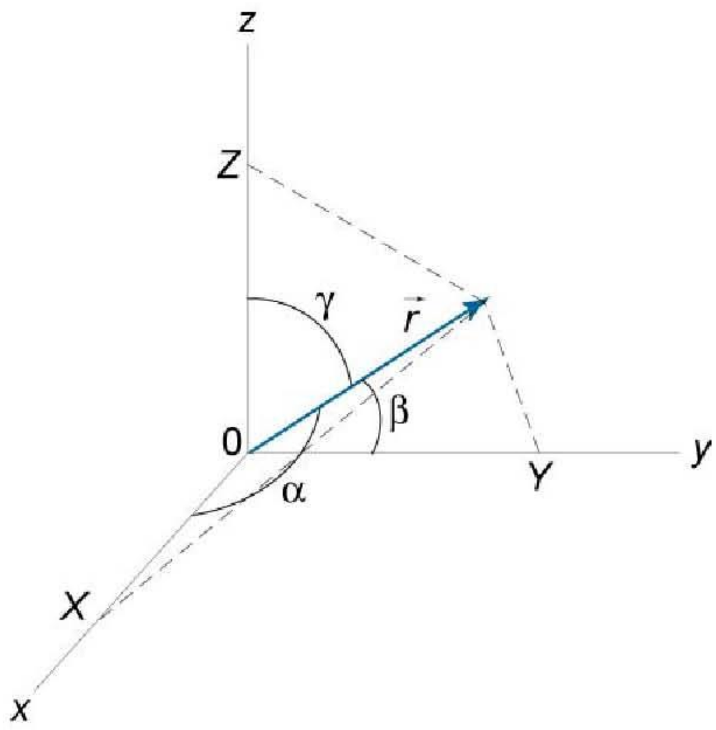


شکل ۷۴ **Figure 74.**

554. $X = |\vec{r}|\cos\alpha$,

$Y = |\vec{r}|\cos\beta$,

$Z = |\vec{r}|\cos\gamma$.

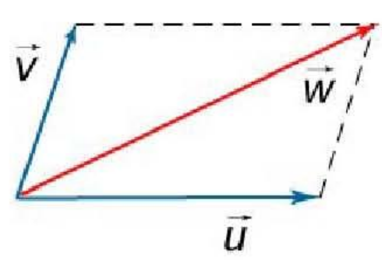


شکل ۷۵ **Figure 75.**

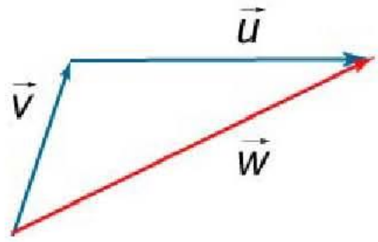
555. اگر If $\vec{r}(X, Y, Z) = \vec{r}_1(X_1, Y_1, Z_1)$, then آنگاه
$X = X_1$, $Y = Y_1$, $Z = Z_1$.

6.2 Vector Addition جمع برداری

556. $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

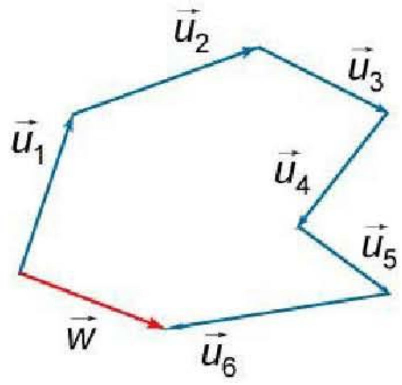


شکل ۷۶ **Figure 76.**



شکل ۷۷ **Figure 77.**

557. $\vec{w}=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3+\ldots+\vec{u}_n$



شکل ۷۸ **Figure 78.**

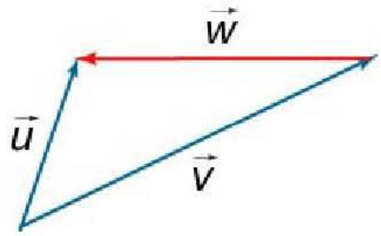
558. Commutative Law قانون جابجاپذیری
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

559. Associative Law قانون شرکت پذیری
$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

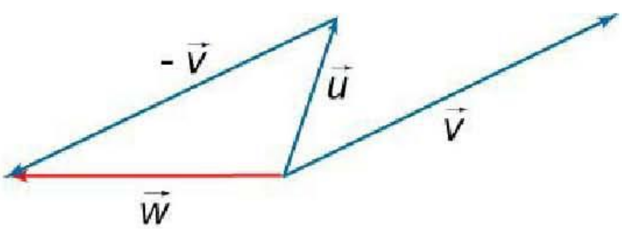
560. $\vec{u}+\vec{v}=(X_1+X_2, Y_1+Y_2, Z_1+Z_2)$

6.3 Vector Subtraction تفریق برداری

561. $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ if $\vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$.



شکل ۷۹ **Figure 79.**



شکل ۸۰ **Figure 80.**

562. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

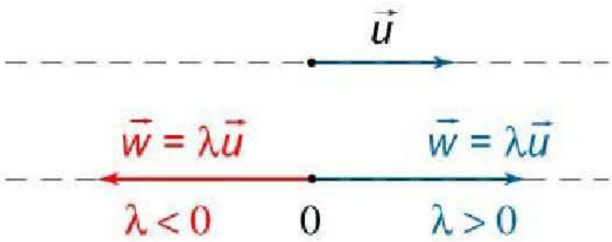
563. $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0} = (0,0,0)$

564. $|\vec{0}| = 0$

565. $\vec{u} - \vec{v} = (X_1 - X_2, Y_1 - Y_2, Z_1 - Z_2)$,

6.4 Scaling Vectors چند برابر کردن بردارها

566. $\vec{w} = \lambda\vec{u}$



شکل ۸۱ **Figure 81.**

567. $|\vec{w}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}|$

568. $\lambda\vec{u} = (\lambda X, \lambda Y, \lambda Z)$

569. $\lambda\vec{u} = \vec{u}\lambda$

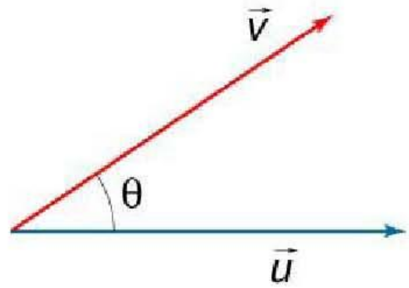
570. $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$

571. $\lambda(\mu\vec{u}) = \mu(\lambda\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$

572. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

6.5 Scalar Product ضرب اسکالر

573. Scalar Product of Vectors $\vec{u}$ and $\vec{v}$ ضرب اسکالر بردارهای u و v
$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$,
where θ is the angle between vectors $\vec{u}$ and $\vec{v}$.
که در آن تتا زاویه میان بردارهای u و v است.



شکل ۸۲ **Figure 82.**

574. Scalar Product in Coordinate Form ضرب اسکالر در شکل مختصات
اگر If $\vec{u}=(X_1,Y_1,Z_1)$, $\vec{v}=(X_2,Y_2,Z_2)$, then آنگاه
$\vec{u}\cdot\vec{v}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$.

575. Angle Between Two Vectors زاویه میان دو بردار
اگر If $\vec{u}=(X_1,Y_1,Z_1)$, $\vec{v}=(X_2,Y_2,Z_2)$, then آنگاه

$$\cos\theta=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.$$

576. Commutative Property خاصیت جابجا پذیری
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

577. Associative Property خاصیت شرکت پذیری
$(\lambda\vec{u})\cdot(\mu\vec{v})=\lambda\mu\vec{u}\cdot\vec{v}$

578. Distributive Property خاصیت توزیع پذیری
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

579. $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ if $\vec{u},\vec{v}$ are orthogonal $(\theta=\frac{\pi}{2})$. اگر u و v متعامد باشند

580. $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$ if اگر $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

اگر

581. $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ if $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$.

582. $\vec{u}\cdot\vec{v}\le|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

583. $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ if $\vec{u},\vec{v}$ are parallel ($\theta=0$). اگر u و v موازی باشند

اگر آنگاه

584. If $\vec{u}=(X_1,Y_1,Z_1)$, then
$\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=|\vec{u}|^2=X_1^{\ 2}+Y_1^{\ 2}+Z_1^{\ 2}$.

585. $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$

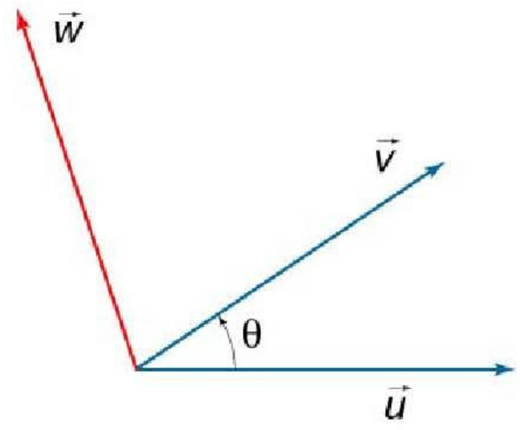
586. $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$

6.6 Vector Product ضرب برداری

587. Vector Product of Vectors $\vec{u}$ and $\vec{v}$ ضرب برداری بردارهای u و v
$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}$, where که در آن

- $|\vec{w}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta$, where $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$;
- $\vec{w}\perp\vec{u}$ and و $\vec{w}\perp\vec{v}$;
- Vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ form a right-handed screw.

بردارهای u، v، w یک پیچ راستگرد تشکیل می دهند.



شکل ۸۳ **Figure 83.**

588. $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}$

589. $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\right)$

590. $S=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\sin\theta$ (Fig.83) (شکل ۸۳)

591. Angle Between Two Vectors (Fig.83) زاویه میان دو بردار (شکل ۸۳)
$\sin\theta=\dfrac{\vec{u}\times\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$

592. Noncommutative Property خاصیت غیر جابجا پذیری
$\vec{u}\times\vec{v}=-\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)$

593. Associative Property خاصیت شرکت پذیری
$\left(\lambda\vec{u}\right)\times\left(\mu\vec{v}\right)=\lambda\mu\vec{u}\times\vec{v}$

594. Distributive Property خاصیت توزیع پذیری
$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

595. $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ if $\vec{u}$ and $\vec{v}$ are parallel ($\theta=0$). اگر u و v موازی باشند

596. $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$

597. $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

6.7 Triple Product ضرب سه گانه

598. Scalar Triple Product ضرب سه گانه اسکالر
$[\vec{u}\vec{v}\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$

599. $[\vec{u}\vec{v}\vec{w}]=[\vec{w}\vec{u}\vec{v}]=[\vec{v}\vec{w}\vec{u}]=-[\vec{v}\vec{u}\vec{w}]=-[\vec{w}\vec{v}\vec{u}]=-[\vec{u}\vec{w}\vec{v}]$

600. $k\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=k[\vec{u}\vec{v}\vec{w}]$

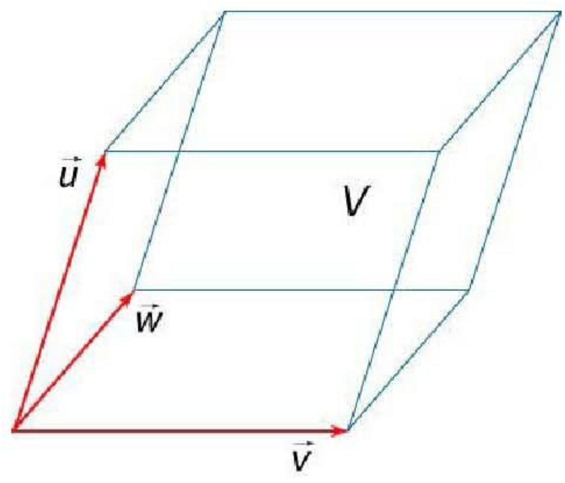
ضرب سه گانه اسکالر در شکل مختصات

601. Scalar Triple Product in Coordinate Form

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

که در آن where
$\vec{u}=(X_1,Y_1,Z_1)$, $\vec{v}=(X_2,Y_2,Z_2)$, $\vec{w}=(X_3,Y_3,Z_3)$.

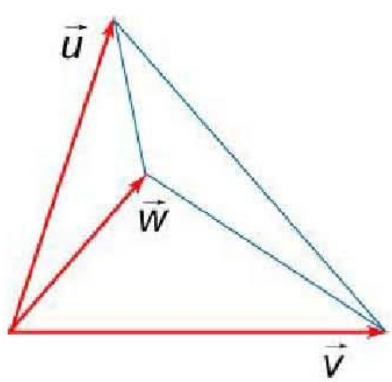
602. Volume of Parallelepiped حجم متوازی السطوح
$V=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$



شکل ۸۴ **Figure 84.**

603. Volume of Pyramid حجم هرم

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right|$$



شکل ۸۵ **Figure 85.**

اگر
آنگاه بردارهای u، v، و w وابسته خطی اند، به گونه ای که رابطه زیر برقرار است

604. If $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0$, then the vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, and $\vec{w}$ are linearly dependent, so $\vec{w}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ for some scalars λ and μ.

برای برخی از مقادیر اسکالرهای لاندا و مو

اگر

605. If $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\neq 0$, then the vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, and $\vec{w}$ are linearly independent. آنگاه بردارهای u، v، و w مستقل خطی اند.

606. Vector Triple Product ضرب سه گانه برداری

$$\vec{u}\times\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\cdot\vec{w}\right)\vec{v}-\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\vec{w}$$

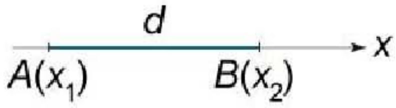
فصل ۷
هندسه تحلیلی

Chapter 7
Analytic Geometry

دستگاه مختصات یک بعدی
7.1 One-Dimensional Coordinate System

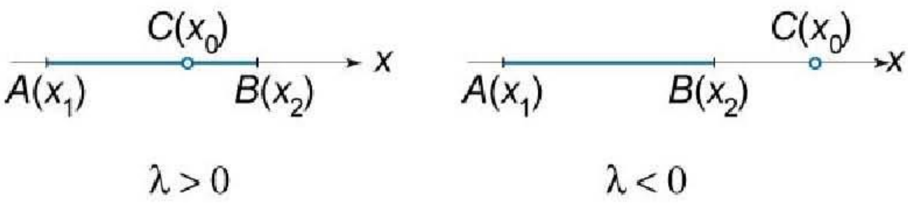
Point coordinates: x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2 مختصات نقطه
Real number: λ عدد حقیقی
Distance between two points: d فاصله میان دو نقطه

607. Distance Between Two Points فاصله میان دو نقطه
$$d = AB = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$



شکل ۸۶ **Figure 86.**

608. Dividing a Line Segment in the Ratio λ تقسیم یک پاره خط به نسبت لاندا
$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ \lambda = \frac{AC}{CB},\ \lambda \neq -1.$$



شکل ۸۷ **Figure 87.**

609. Midpoint of a Line Segment نقطه میانه یک پاره خط

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ \lambda = 1.$$

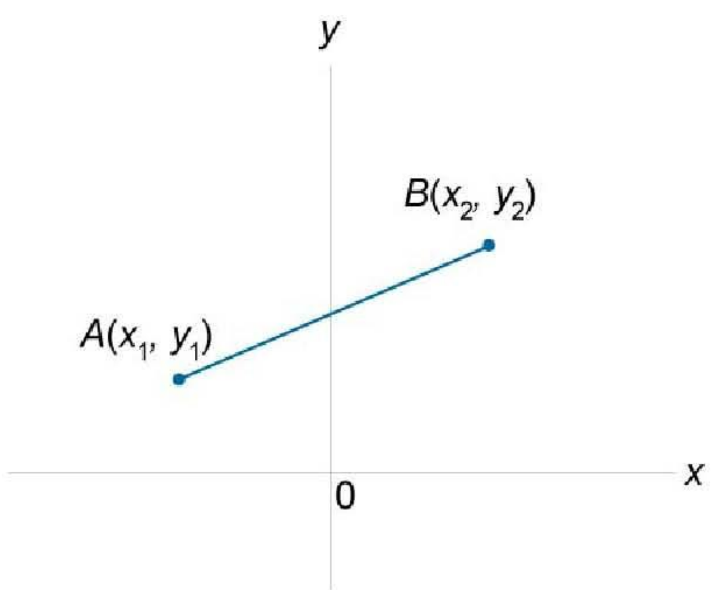
دستگاه مختصات دو بعدی

7.2 Two-Dimensional Coordinate System

Point coordinates: x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2 مختصات نقطه
Polar coordinates: r, φ مختصات قطبی
Real number: λ عدد حقیقی
Positive real numbers: a, b, c, اعداد حقیقی مثبت
Distance between two points: d فاصله میان دو نقطه
Area: S مساحت

610. Distance Between Two Points فاصله میان دو نقطه

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

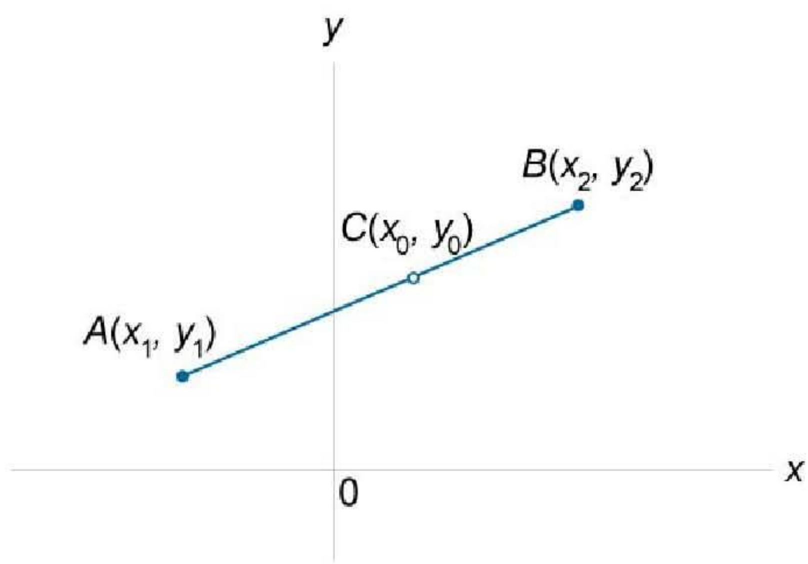


شکل ۸۸ **Figure 88.**

611. Dividing a Line Segment in the Ratio λ تقسیم یک پاره خط به نسبت لاندا

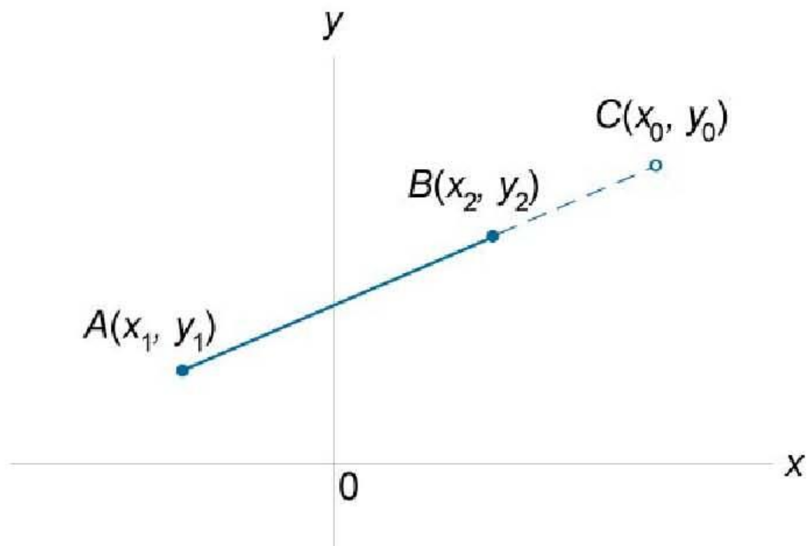
$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$\lambda = \frac{AC}{CB},\ \lambda \neq -1.$$



$\lambda > 0$

شکل ۸۹ **Figure 89.**



$\lambda < 0$

شکل ۹۰ **Figure 90.**

612. Midpoint of a Line Segment نقطه میانه یک پاره خط

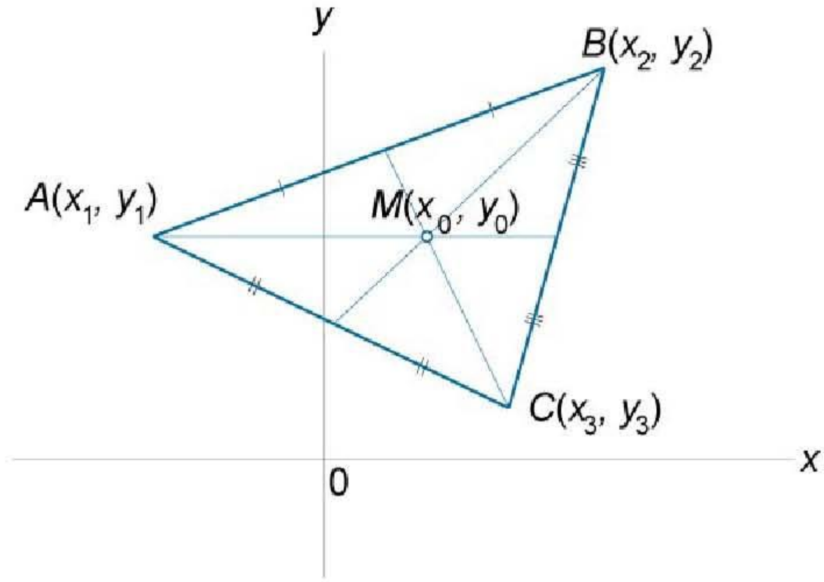
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},\ \lambda = 1.$$

گرانیگاه (تقاطع خطوط میانه) مثلث

613. Centroid (Intersection of Medians) of a Triangle

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

که در آن where $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, و and $C(x_3, y_3)$ are vertices of the triangle ABC. نقاط گوشه های مثلث ABC می باشند.



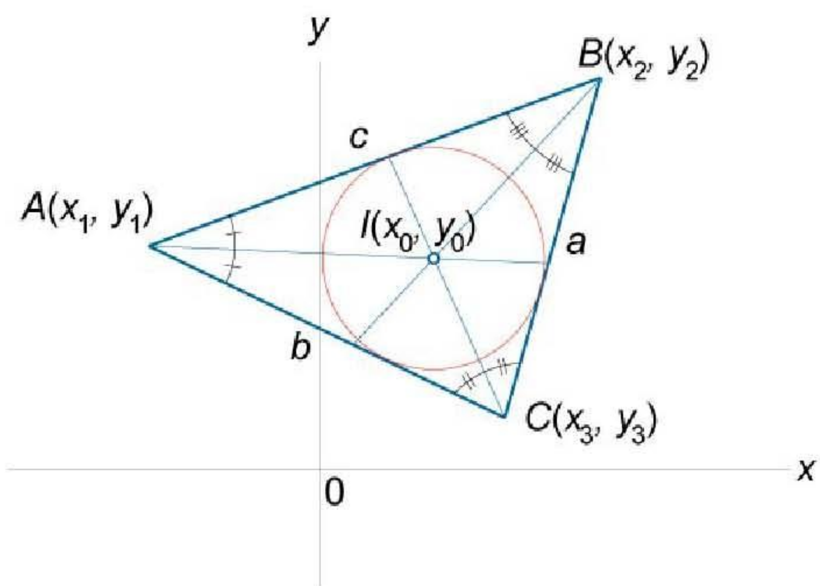
شکل ۹۱ **Figure 91.**

مرکز دایره محاطی (تقاطع نیمسازهای زوایای) مثلث

614. Incenter (Intersection of Angle Bisectors) of a Triangle

$$x_0 = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c},\ y_0 = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c},$$

که در آن where $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

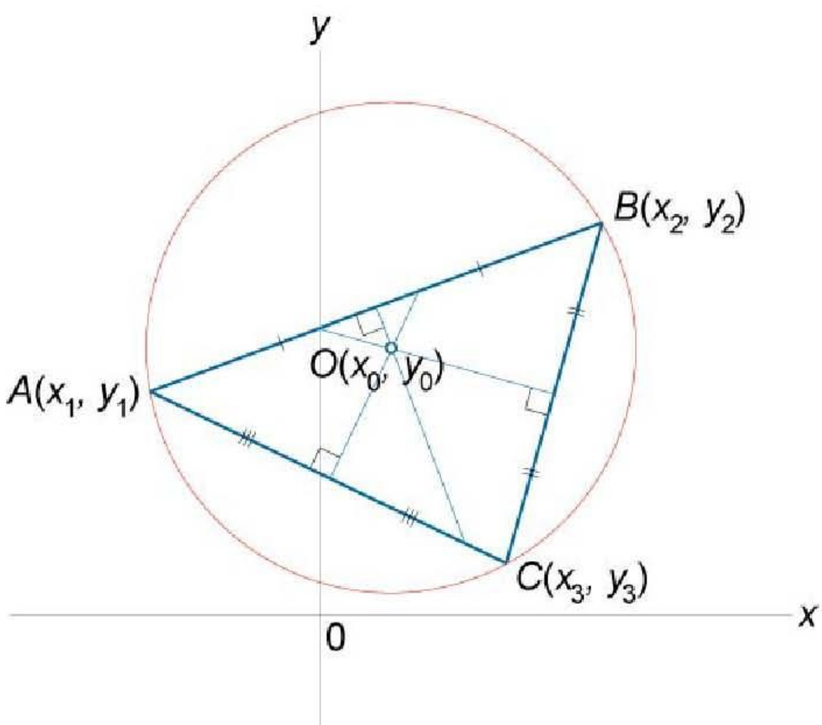


شکل ۹۲ **Figure 92.**

مرکز دایره محیطی (تقاطع میانه های عمود بر اضلاع) مثلث

615. Circumcenter (Intersection of the Side Perpendicular Bisectors) of a Triangle

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2+y_1^2 & 1 \\ x_2 & x_2^2+y_2^2 & 1 \\ x_3 & x_3^2+y_3^2 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

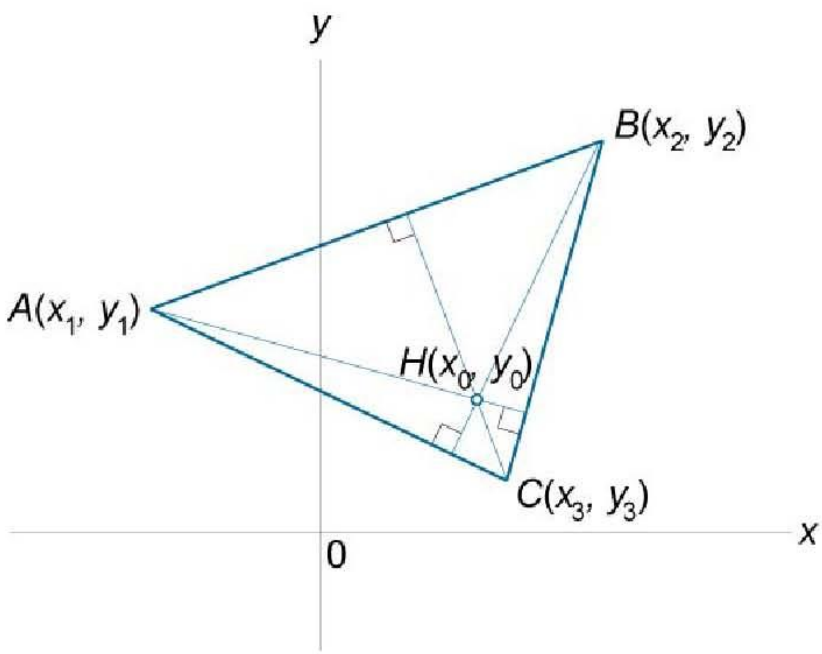


شکل ۹۳ **Figure 93.**

مرکز تعامد (تقاطع ارتفاعهای) مثلث

616. Orthocenter (Intersection of Altitudes) of a Triangle

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_2x_3 + y_1^2 & 1 \\ y_2 & x_3x_1 + y_2^2 & 1 \\ y_3 & x_1x_2 + y_3^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 + y_2y_3 & x_1 & 1 \\ x_2^2 + y_3y_1 & x_2 & 1 \\ x_3^2 + y_1y_2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}$$



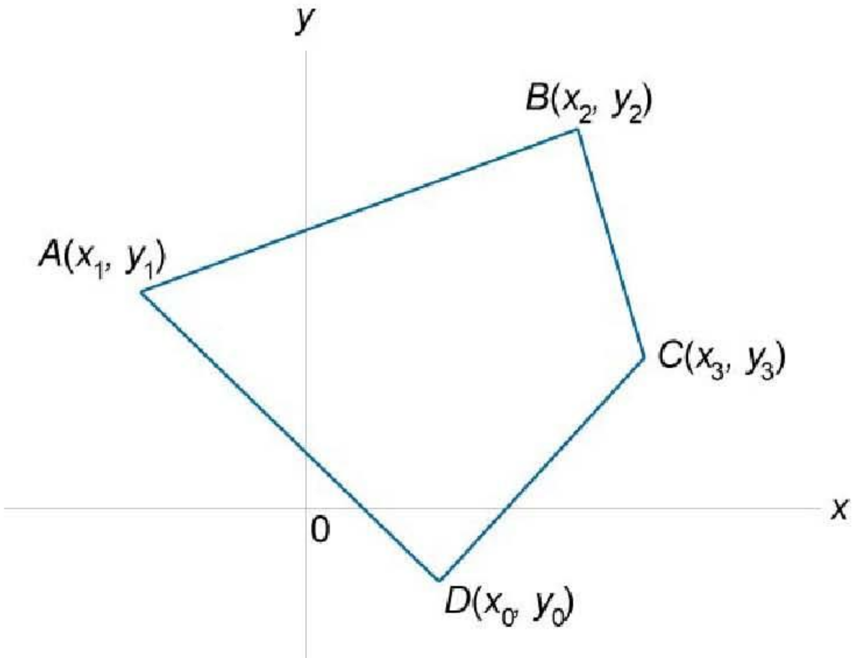
شکل ۹۴ **Figure 94.**

617. Area of a Triangle مساحت مثلث

$$S = (\pm)\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (\pm)\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

618. Area of a Quadrilateral مساحت چهارضلعی

$$S=(\pm)\frac{1}{2}\left[(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+\right.$$
$$\left.+(x_3-x_4)(y_3+y_4)+(x_4-x_1)(y_4+y_1)\right]$$



شکل ۹۵ **Figure 95.**

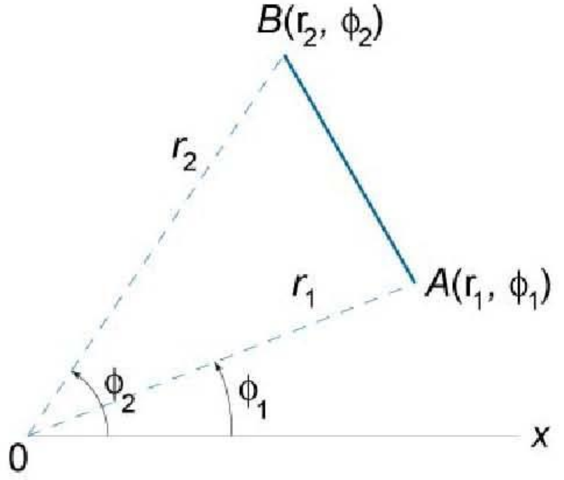
Note: In formulas 617, 618 we choose the sign (+) or (−) so that to get a positive answer for area.

یادداشت: در روابط ۶۱۷ و ۶۱۸ علامتهای (+) یا (−) را انتخاب کرده ایم تا جواب مساحت مثبت باشد.

619. Distance Between Two Points in Polar Coordinates

$$d=AB=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

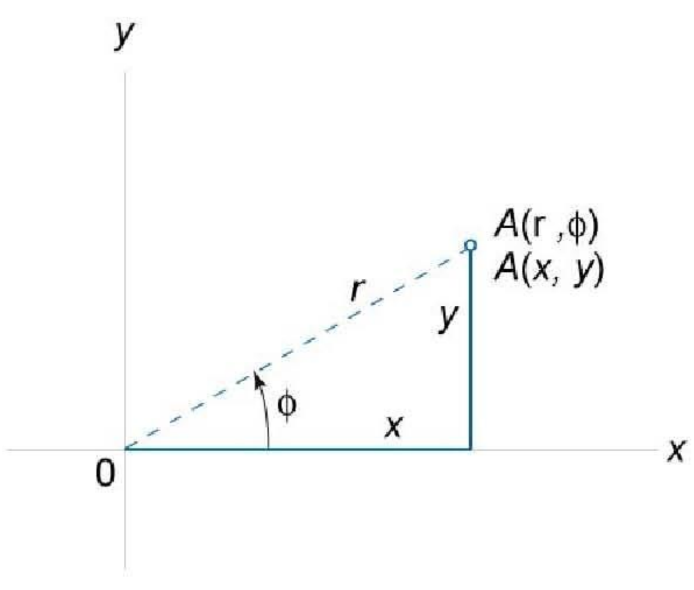
فاصله میان دو نقطه در مختصات قطبی



شکل ۹۶ **Figure 96.**

620. Converting Rectangular Coordinates to Polar Coordinates

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$ تبدیل مختصات کارتزین به مختصات قطبی



شکل ۹۷ **Figure 97.**

621. Converting Polar Coordinates to Rectangular Coordinates

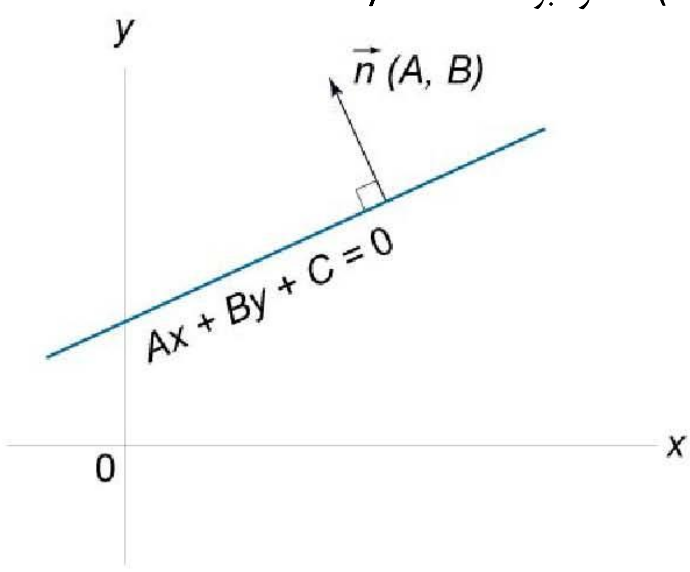
$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x}.$ تبدیل مختصات قطبی به مختصات کارتزین

7.3 Straight Line in Plane خط مستقیم در صفحه

Point coordinates: $X, Y, x, x_0, x_1, y_0, y_1, a_1, a_2, \ldots$ مختصات نقطه
Real numbers: $k, a, b, p, t, A, B, C, A_1, A_2, \ldots$ اعداد حقیقی
Angles: α, β زوایا
Angle between two lines: φ زاویه میان دو خط
Normal vector: $\vec{n}$ بردار نرمال (عمود)
Position vectors: $\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}$ بردارهای مکان

622. General Equation of a Straight Line معادله کلی خط راست
$Ax + By + C = 0$

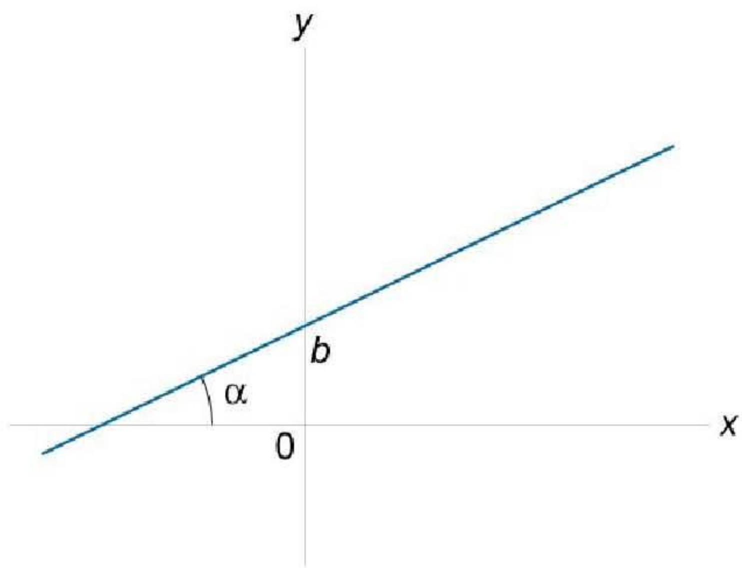
623. Normal Vector to a Straight Line بردار عمود بر خط راست
The vector $\vec{n}(A, B)$ is normal to the line $Ax + By + C = 0$.
بردار n(A,B) عمود بر خط Ax+By+C=0 است.



شکل ۹۸ **Figure 98.**

624. Explicit Equation of a Straight Line (Slope-Intercept Form)
$y = kx + b$. معادله صریح خط راست (شکل شیب-عرض از مبدا)

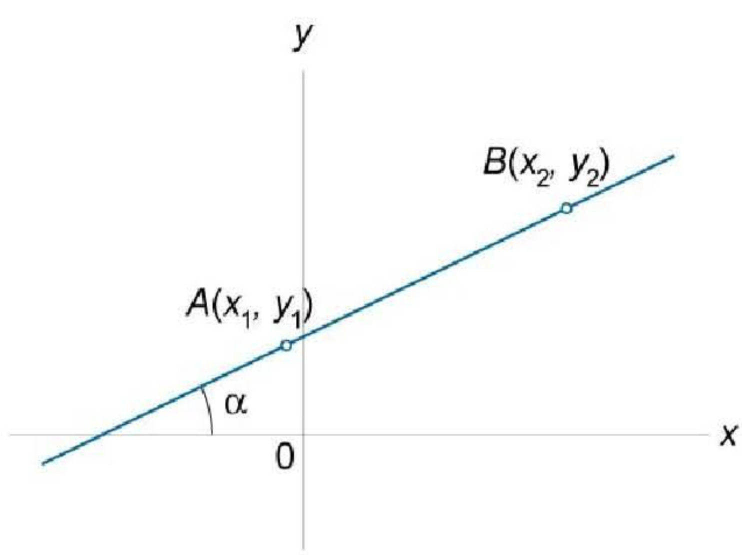
The gradient of the line is $k = \tan\alpha$. شیب خط برابر است با



شکل ۹۹ **Figure 99.**

625. Gradient of a Line شیب خط

$$k = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



شکل ۱۰۰ **Figure 100.**

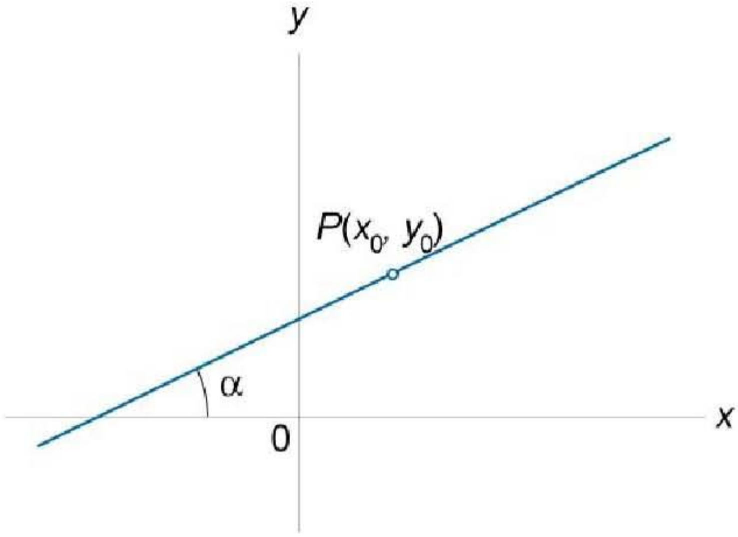
معادله خط با یک نقطه و شیب مشخص

626. Equation of a Line Given a Point and the Gradient

$y = y_0 + k(x - x_0)$,

where k is the gradient, $P(x_0, y_0)$ is a point on the line.

که در آن k شیب است   نقطه ای بر روی خط است.



شکل ۱۰۱ **Figure 101.**

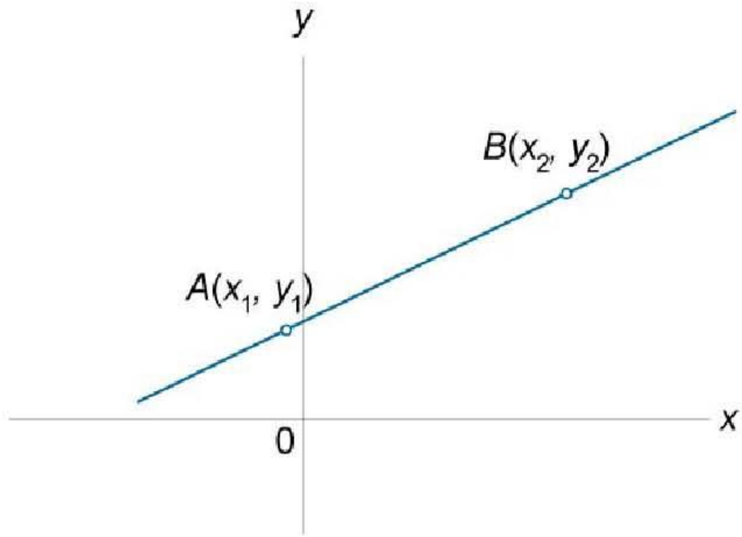
627. Equation of a Line That Passes Through Two Points

معادله خطی که از دو نقطه می گذرد

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

or یا

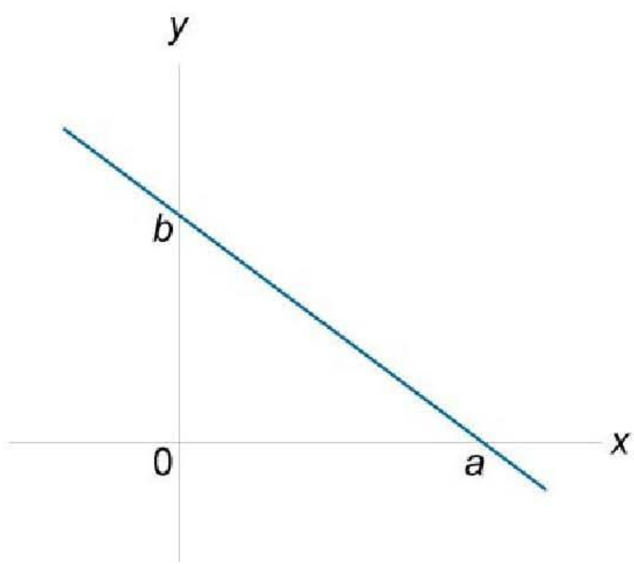
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$



شکل ۱۰۲ **Figure 102.**

628. Intercept Form شکل عرض و طول از مبداء

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$



شکل ۱۰۳ **Figure 103.**

629. Normal Form شکل عمود بر خط

$$x\cos\beta+y\sin\beta-p=0$$

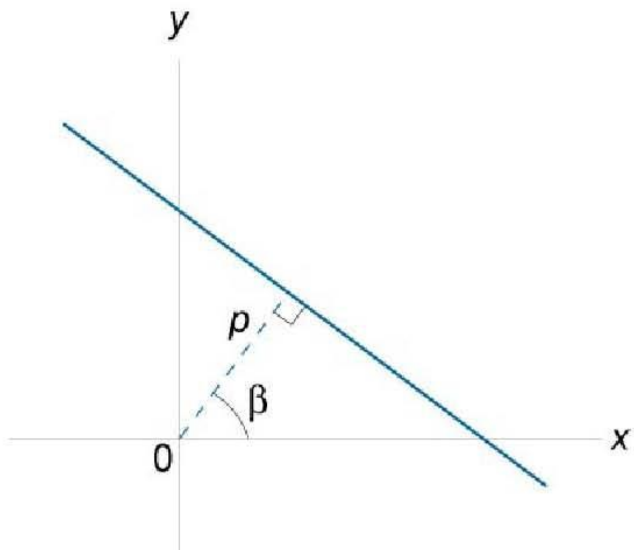


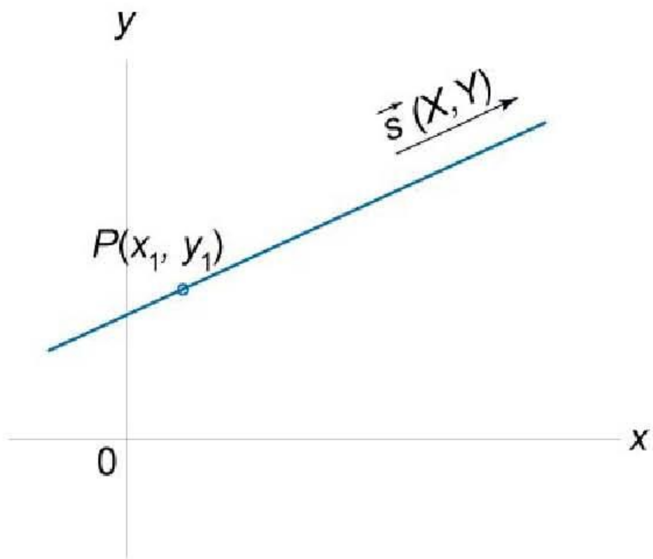
Figure 104. شکل ۱۰۲

630. Point Direction Form شکل هادی نقطه

$$\frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y},$$

where (X,Y) is the direction of the line and $P_1(x_1,y_1)$ lies on the line.

که در آن (X,Y) هادی خط و P1(x1,y1) نقطه ای بر روی خط است.

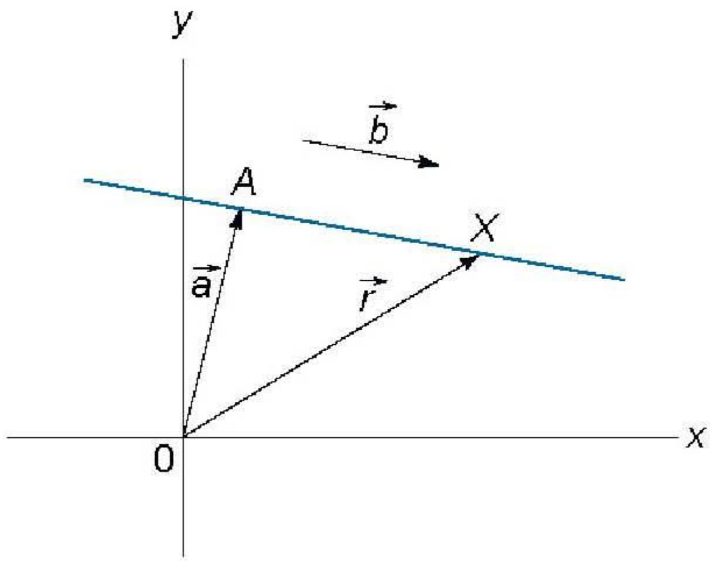


شکل ۱۰۲ **Figure 105.**

631. Vertical Line خط عمودی
$x = a$

632. Horizontal Line خط افقی
$y = b$

633. Vector Equation of a Straight Line معادله برداری خط راست
$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$,
where که در آن O مبدا مختصات است،
O is the origin of the coordinates, X هر نقطه متغیر بر روی خط است،
X is any variable point on the line, a بردار مکان نقطه معین A بر روی خط است،
$\vec{a}$ is the position vector of a known point A on the line ,
$\vec{b}$ is a known vector of direction, parallel to the line,
t is a parameter, b بردار معین جهت، موازی با خط است، t پارامتر است،
$\vec{r} = \overrightarrow{OX}$ is the position vector of any point X on the line.
R=OX بردار مکان هر نقطه X بر روی خط است.



شکل ۱۰۶ **Figure 106.**

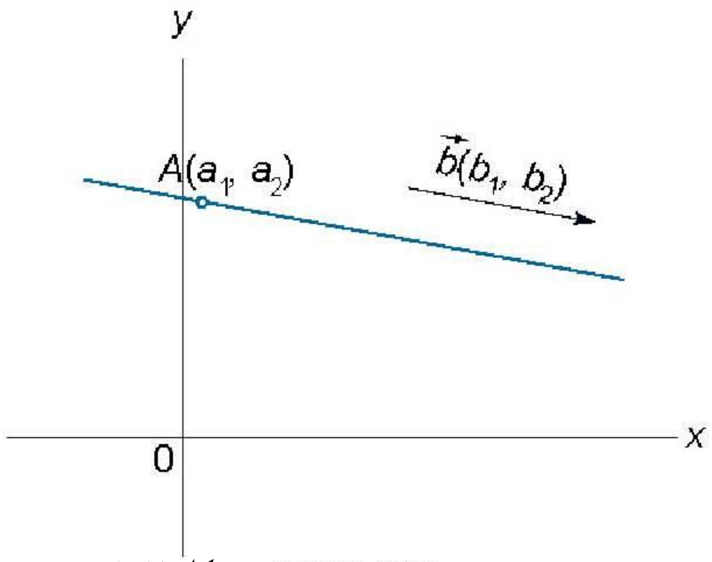
634. Straight Line in Parametric Form خط راست به شکل پارامتری

$$\begin{cases} x = a_1 + tb_1 \\ y = a_2 + tb_2 \end{cases},$$

where که در آن

(x, y) are the coordinates of any unknown point on the line,
(a_1, a_2) are the coordinates of a known point on the line,
(b_1, b_2) are the coordinates of a vector parallel to the line,
t is a parameter.

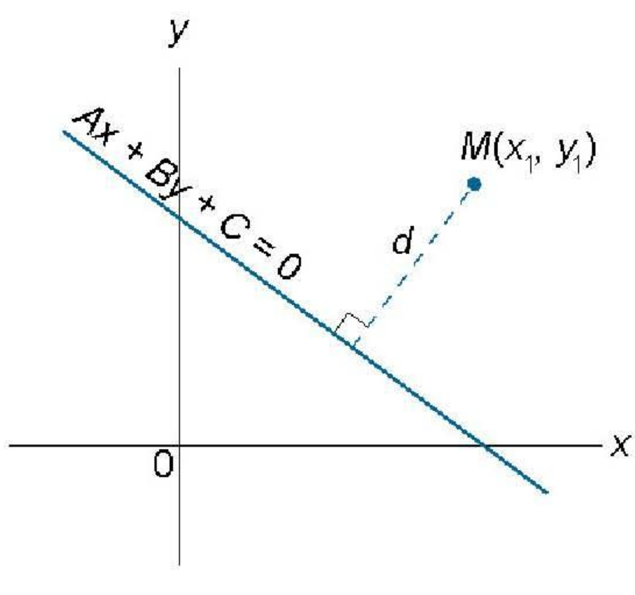
(x,y) مختصات هر نقطه مجهول بر روی خط است،
(a_1,a_2) مختصات نقطه ای معین بر روی خط است،
(b_1,b_2) مختصات برداری موازی خط است، t پارامتر است.



شکل ۱۰۷ **Figure 107.**

635. Distance From a Point To a Line فاصله از نقطه تا خط
The distance from the point $P(a,b)$ to the line $Ax+By+C=0$ is
فاصله از نقطه P(a,b) تا خط Ax+By+C=0 برابر است با

$$d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$



شکل ۱۰۸ **Figure 108.**

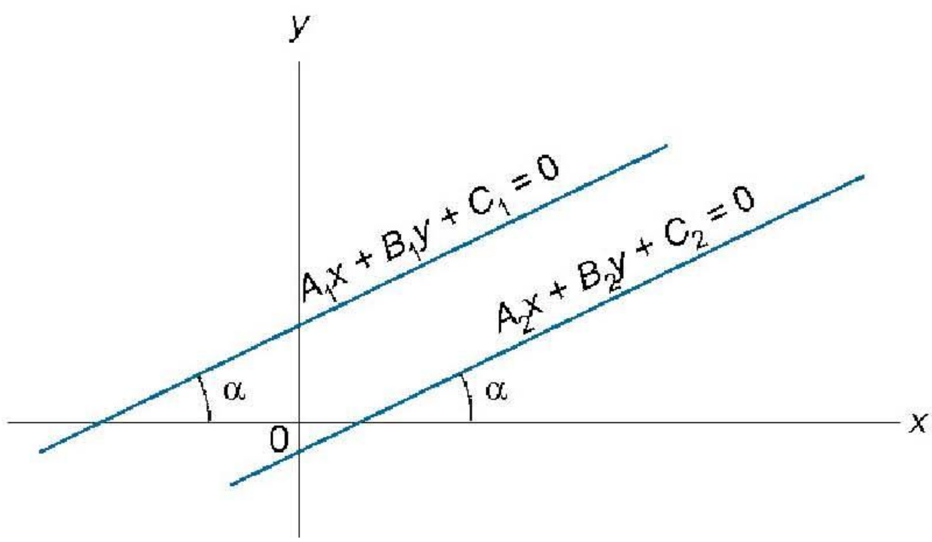
خطوط موازی

636. Parallel Lines دو خط $y=k_1x+b_1$ و $y=k_2+b_2$ موازی اند اگر $k_1=k_2$.

Two lines $y=k_1x+b_1$ and $y=k_2x+b_2$ are parallel if $k_1=k_2$.

دو خط Two lines $A_1x+B_1y+C_1=0$ and و $A_2x+B_2y+C_2=0$ are parallel if موازی اند اگر

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$



شکل ۱۰۹ **Figure 109.**

خطوط متعامد

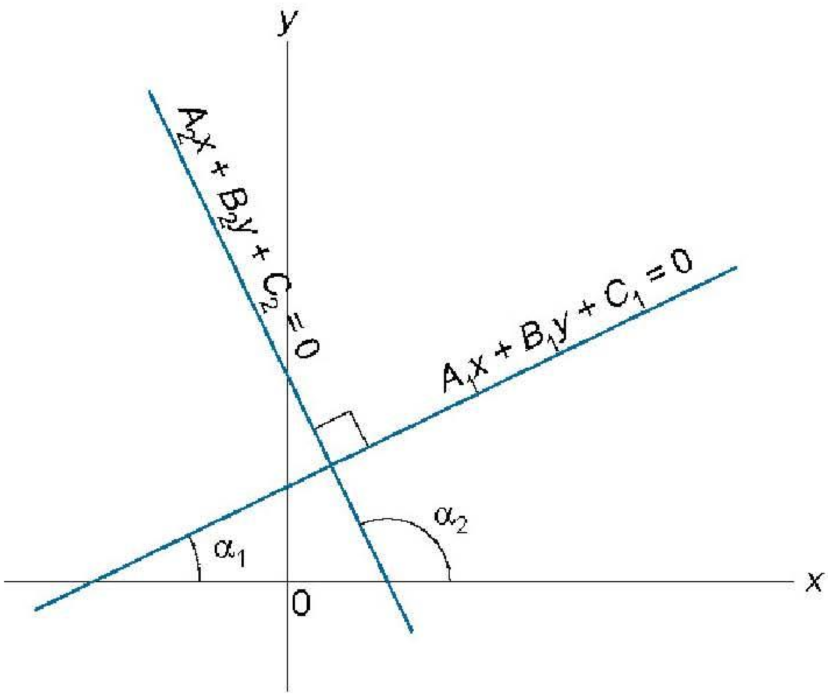
637. Perpendicular Lines دو خط $y=k_1x+b_1$ و $y=k_2+b_2$ متعامد اند اگر

Two lines $y=k_1x+b_1$ and $y=k_2x+b_2$ are perpendicular if

$k_2=-\dfrac{1}{k_1}$ or, equivalently, یا به طور معادل، $k_1k_2=-1$.

دو خط Two lines $A_1x+B_1y+C_1=0$ and و $A_2x+B_2y+C_2=0$ are perpendicular if متعامد اند اگر

$A_1A_2+B_1B_2=0$.



شکل ۱۱۰ **Figure 110.**

638. Angle Between Two Lines زاویه میان دو خط

$$\tan\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

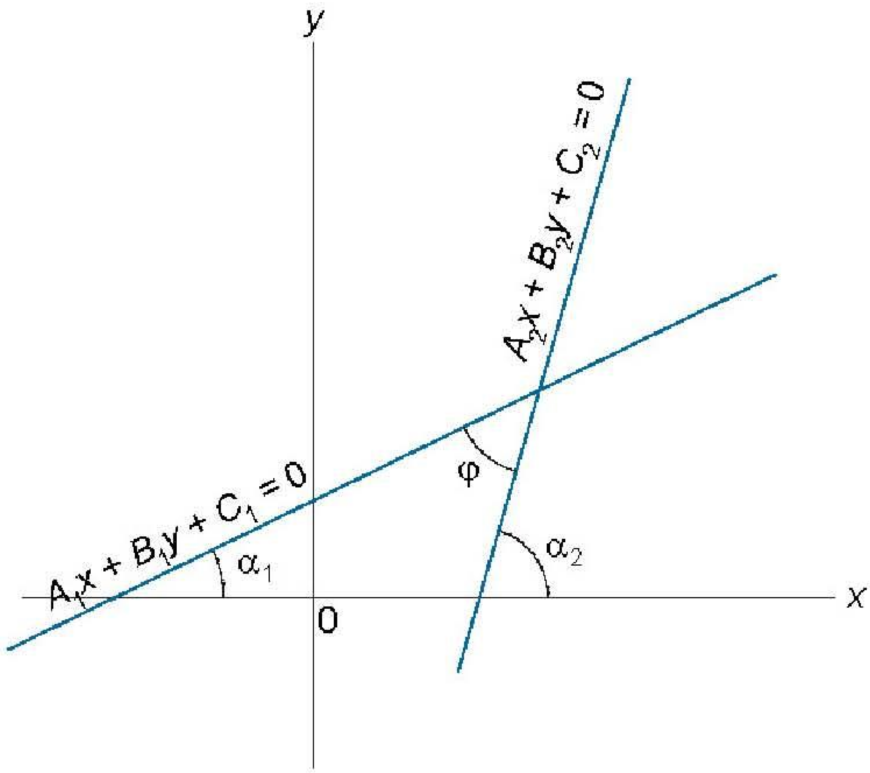


Figure 111. شکل ۱۱۱

639. Intersection of Two Lines تقاطع دو خط

If two lines $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ and $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ intersect, the intersection point has coordinates

اگر دو خط و متقاطع باشند، مختصات نقطه تقاطع عبارت است از:

$$x_0 = \frac{-C_1B_2 + C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1},\ y_0 = \frac{-A_1C_2 + A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

7.4 Circle دایره

Radius: R شعاع

Center of circle: (a, b) مرکز دایره

Point coordinates: $x, y, x_1, y_1, \ldots$ مختصات نقطه

Real numbers: A, B, C, D, E, F, t اعداد حقیقی

640. Equation of a Circle Centered at the Origin (Standard Form)
معادله دایره به مرکز مبداء (شکل استاندارد)

$x^2 + y^2 = R^2$

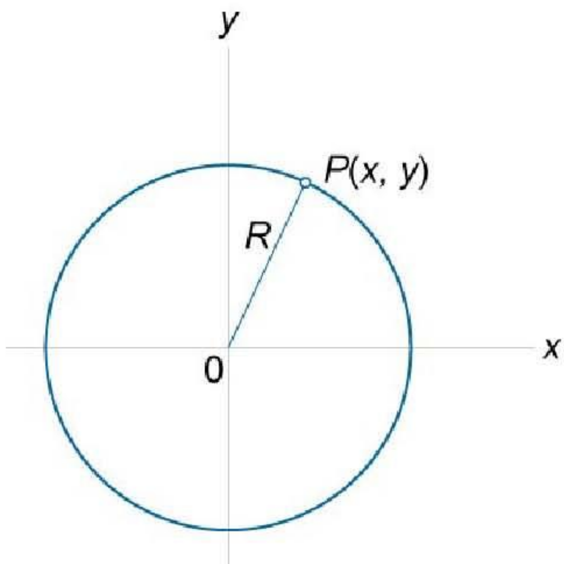


Figure 112. شکل ۱۱۲

641. Equation of a Circle Centered at Any Point (a, b)

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ معادله دایره به مرکز هر نقطه (a,b)

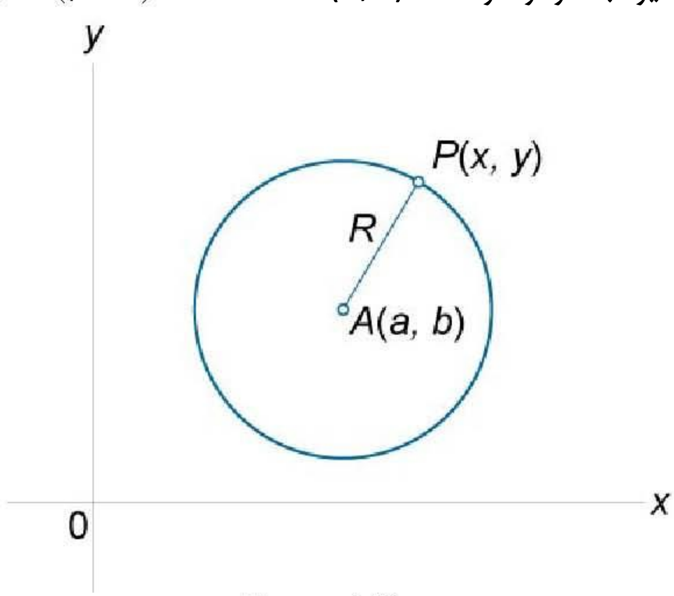
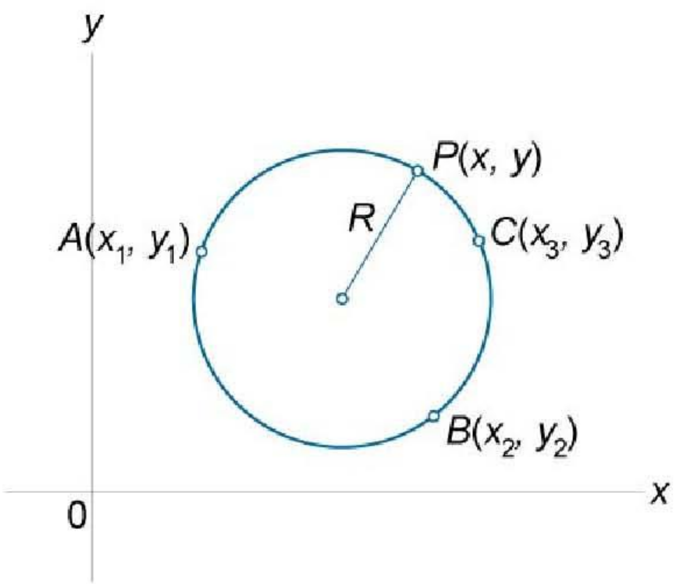


Figure 113. شکل ۱۱۳

642. Three Point Form شکل سه نقطه

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



شکل ۱۱۴ **Figure 114.**

643. Parametric Form شکل پارامتری

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

644. General Form شکل کلی

$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ (A nonzero غیرصفر, $D^2 + E^2 > 4AF$).

The center of the circle has coordinates (a, b), where

$a = -\frac{D}{2A},\ b = -\frac{E}{2A}.$ مرکز دایره مختصات (a,b) دارد که در آن

The radius of the circle is

شعاع دایره عبارت است از

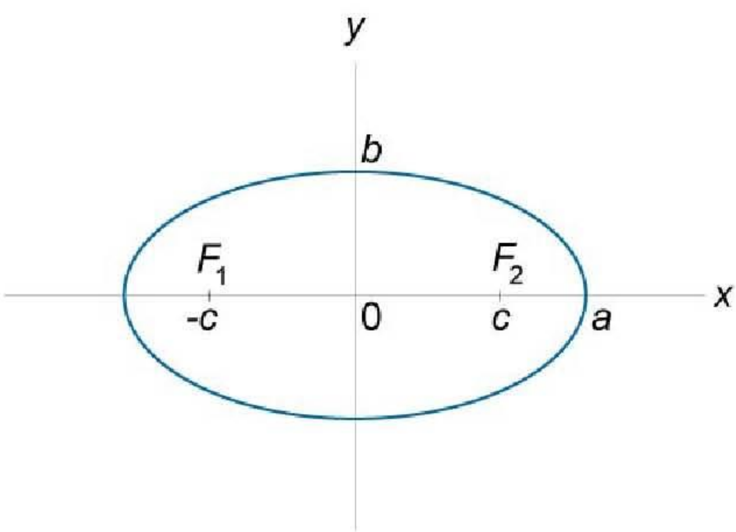
$$R = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{2|A|}}.$$

7.5 Ellipse بیضی

Semimajor axis: a نیمه محور
Semiminor axis: b نیمه محور
Foci: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ کانونها
Distance between the foci: 2c فاصله میان کانونها
Eccentricity: e خروج از مرکزیت
Real numbers: A, B, C, D, E, F, t اعداد حقیقی
Perimeter: L محیط
Area: S مساحت

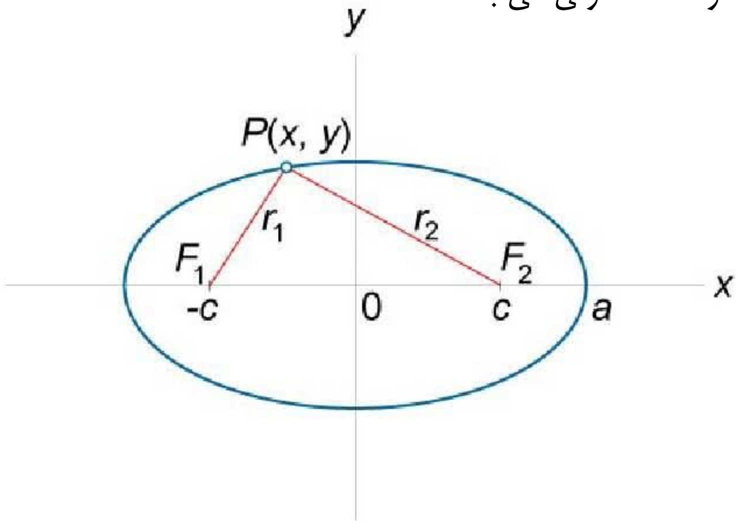
645. Equation of an Ellipse (Standard Form) معادله بیضی (شکل استاندارد)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



شکل ۱۱۵ **Figure 115.**

646. $r_1 + r_2 = 2a$,
where r_1, r_2 are distances from any point $P(x,y)$ on the ellipse to the two foci. که در آن r_1 و r_2 فواصل هر نقطه $P(x,y)$ بر روی بیضی تا دو نقطه کانونی می باشند.



شکل ۱۱۶ **Figure 116.**

647. $a^2 = b^2 + c^2$

648. Eccentricity خروج از مرکزیت

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

649. Equations of Directrices معادله هادیها

$$x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$$

650. Parametric Form شکل پارامتری

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\pi .$$

651. General Form
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
که در آن where $B^2 - 4AC < 0$.

شکل عمومی با محورهای موازی با محورهای مختصات

652. General Form with Axes Parallel to the Coordinate Axes
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
که در آن where $AC > 0$.

653. Circumference محیط
$$L = 4aE(e),$$
که در آن تابع E انتگرال بیضوی کامل نوع دوم است.
where the function E is the complete elliptic integral of the second kind.

فرمولهای تقریبی برای محیط

654. Approximate Formulas of the Circumference
$$L = \pi\left(1.5(a+b) - \sqrt{ab}\right),$$
$$L = \pi\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}.$$

655. $S = \pi ab$

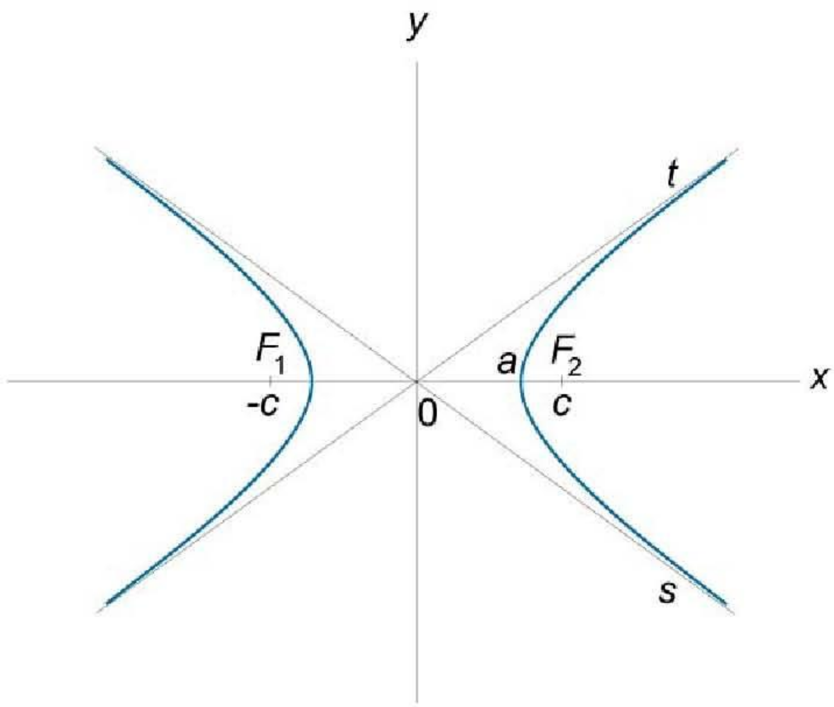
7.6 Hyperbola هذلولی

Transverse axis: a محور عرضی
Conjugate axis: b محور مزدوج
Foci: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ کانونها
Distance between the foci: 2c فاصله میان کانونها
Eccentricity: e خروج از مرکزیت
Asymptotes: s, t خطوط مجانب
Real numbers: A, B, C, D, E, F, t, k اعداد حقیقی

معادله هذلولی (شکل استاندارد)

656. Equation of a Hyperbola (Standard Form)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



شکل ۱۱۷ **Figure 117.**

657. $|r_1-r_2|=2a$,

where r_1, r_2 are distances from any point $P(x,y)$ on the hyperbola to the two foci.

که در آن r_1، r_2 فواصل هر نقطه $P(x,y)$ بر روی هذلولی تا دو نقطه کانونی است.

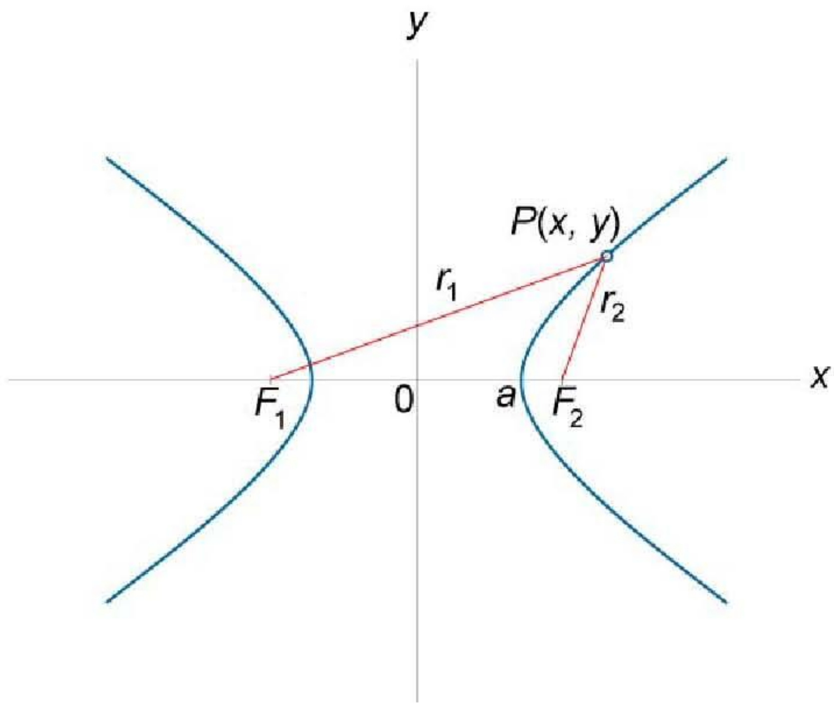


Figure 118. شکل ۱۱۸

658. Equations of Asymptotes معادله های خطوط مجانب

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

659. $c^2 = a^2 + b^2$

660. Eccentricity خروج از مرکزیت

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

661. Equations of Directrices معادله های خطوط هادی

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$$

معادله های پارامتری شاخه راست هذلولی

662. Parametric Equations of the Right Branch of a Hyperbola

$$\begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

663. General Form شکل کلی

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

که در آن where $B^2 - 4AC > 0$.

شکل کلی با محورهای موازی محورهای مختصات

664. General Form with Axes Parallel to the Coordinate Axes

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

که در آن where $AC < 0$.

665. Asymptotic Form شکل با خطوط مجانب

$$xy = \frac{e^2}{4},$$

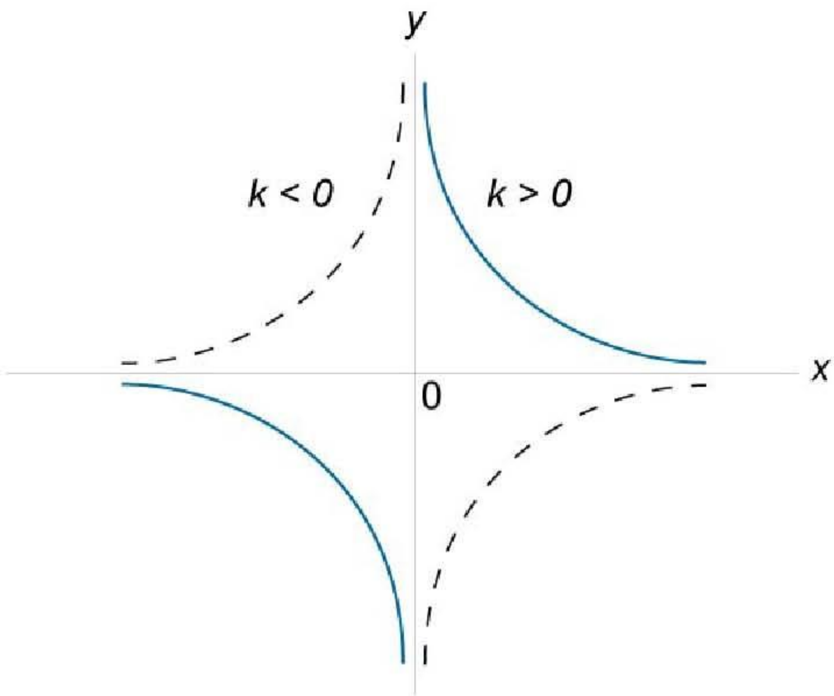
یا or

که در آن

$$y = \frac{k}{x},\ \text{where } k = \frac{e^2}{4}.$$

In this case, the asymptotes have equations $x = 0$ and $y = 0$.

در این حالت، معادلات خطوط مجانب عبارتند از: x=0 و y=0.

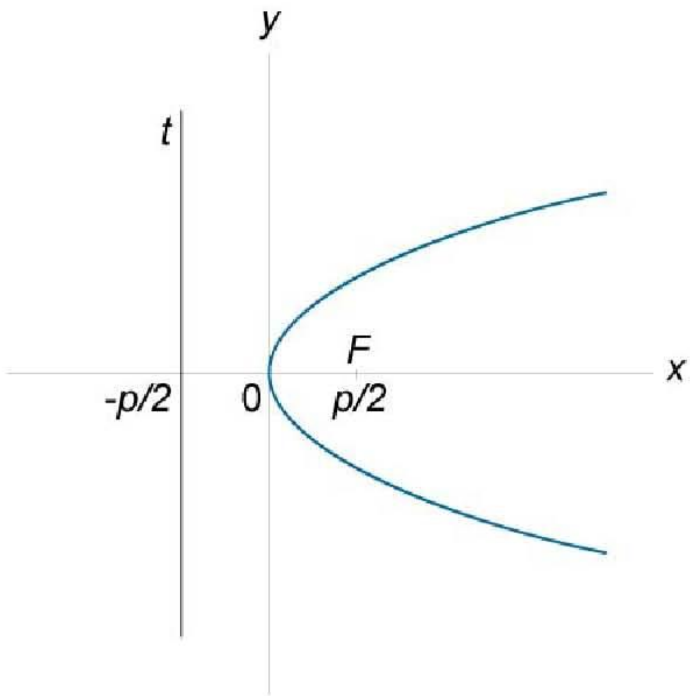


شکل ۱۱۹ **Figure 119.**

7.7 Parabola سهمی

Focal parameter: p پارامتر کانونی
Focus: F کانون
Vertex: $M(x_0, y_0)$ نقطه راس
Real numbers: $A, B, C, D, E, F, p, a, b, c$ اعداد حقیقی

666. Equation of a Parabola (Standard Form) معادله سهمی (شکل استاندارد)
$$y^2 = 2px$$



شکل ۱۲۰ **Figure 120.**

Equation of the directrix معادله خط هادی

$x = -\frac{p}{2}$,

Coordinates of the focus مختصات کانون

$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$,

Coordinates of the vertex مختصات نقطه راس

$M(0,0)$.

667. General Form شکل کلی

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$,

where $B^2 - 4AC = 0$. که در آن

668. $y = ax^2$, $p = \frac{1}{2a}$.

Equation of the directrix معادله خط هادی

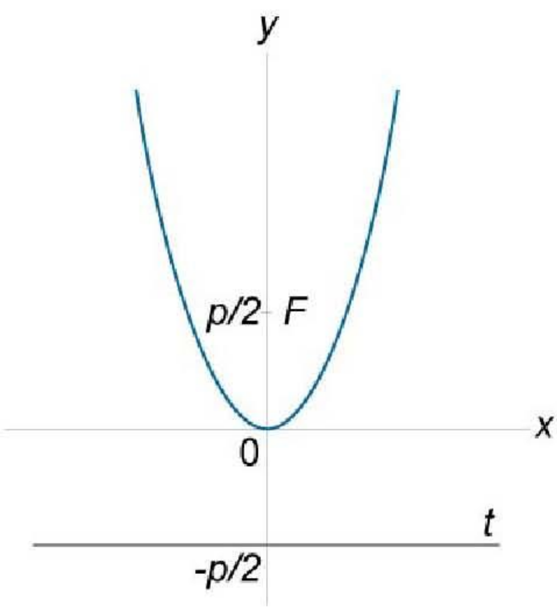
$y = -\frac{p}{2}$,

Coordinates of the focus مختصات کانون

$F\left(0, \frac{p}{2}\right)$,

Coordinates of the vertex مختصات نقطه راس

$M(0,0)$.



شکل ۱۲۱ **Figure 121.**

669. General Form, Axis Parallel to the y-axis شکل کلی، محور موازی محور y

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ (A, E nonzero), (A، E غیر صفر)

$y = ax^2 + bx + c$, $p = \frac{1}{2a}$.

Equation of the directrix معادله خط هادی

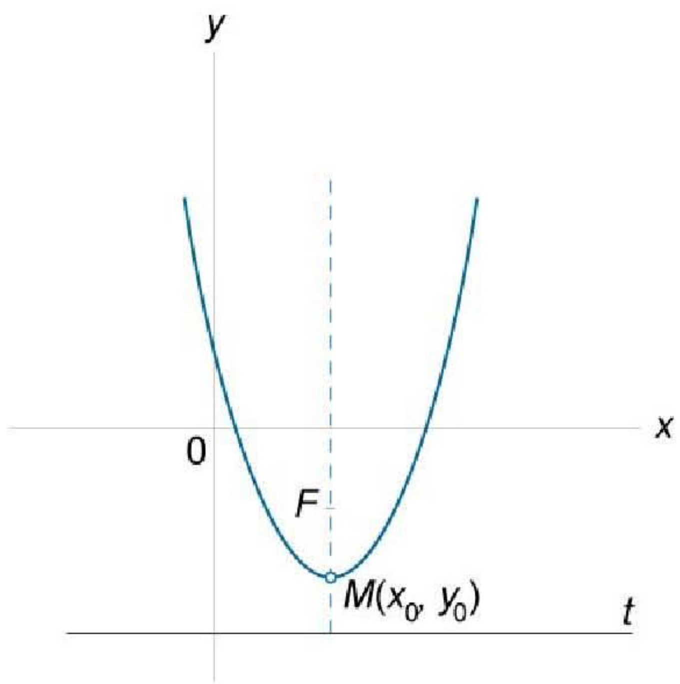
$y = y_0 - \frac{p}{2}$,

Coordinates of the focus مختصات کانون

$F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$,

Coordinates of the vertex مختصات نقطه راس

$$x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$



شکل ۱۲۲ **Figure 122.**

دستگاه مختصات سه بعدی

7.8 Three-Dimensional Coordinate System

Point coordinates: $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, \ldots$ مختصات نقطه

Real number: λ عدد حقیقی

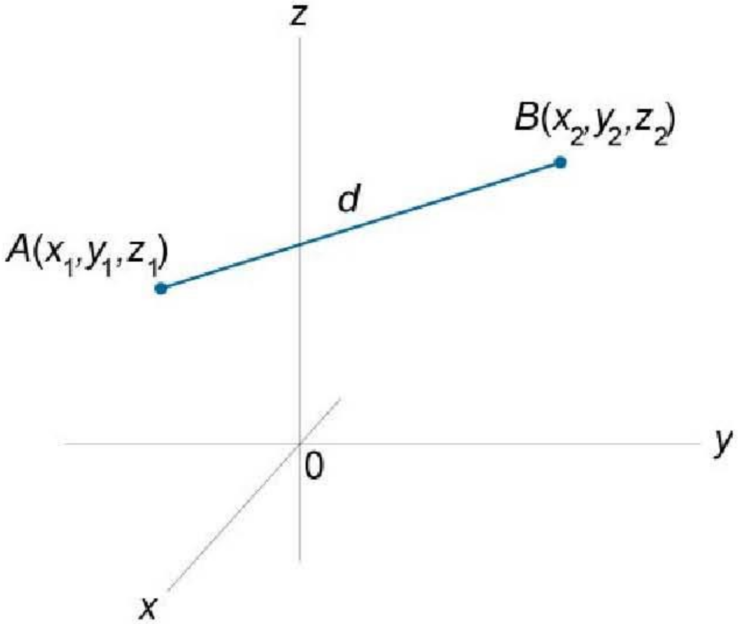
Distance between two points: d فاصله میان دو نقطه

Area: S مساحت

Volume: V حجم

670. Distance Between Two Points فاصله میان دو نقطه

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



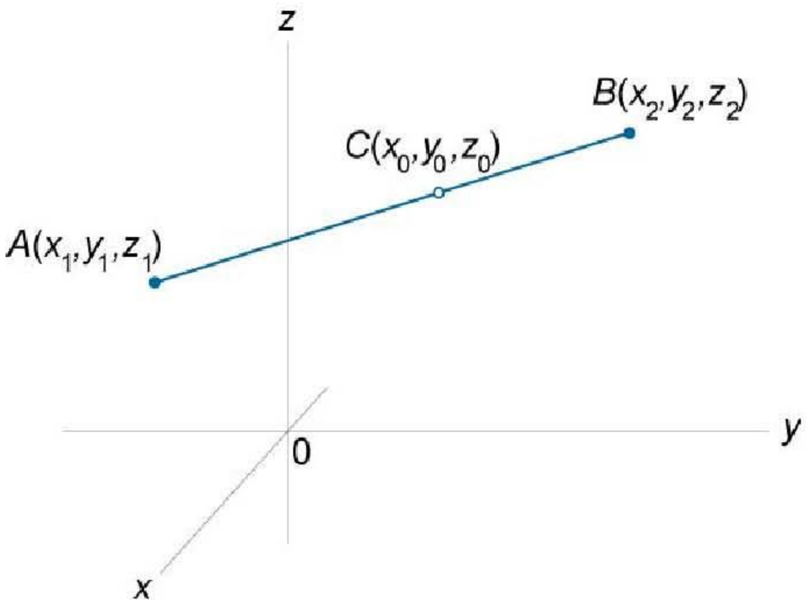
شکل ۱۲۳ **Figure 123.**

671. Dividing a Line Segment in the Ratio λ تقسیم یک پاره خط به نسبت لاندا

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},$$

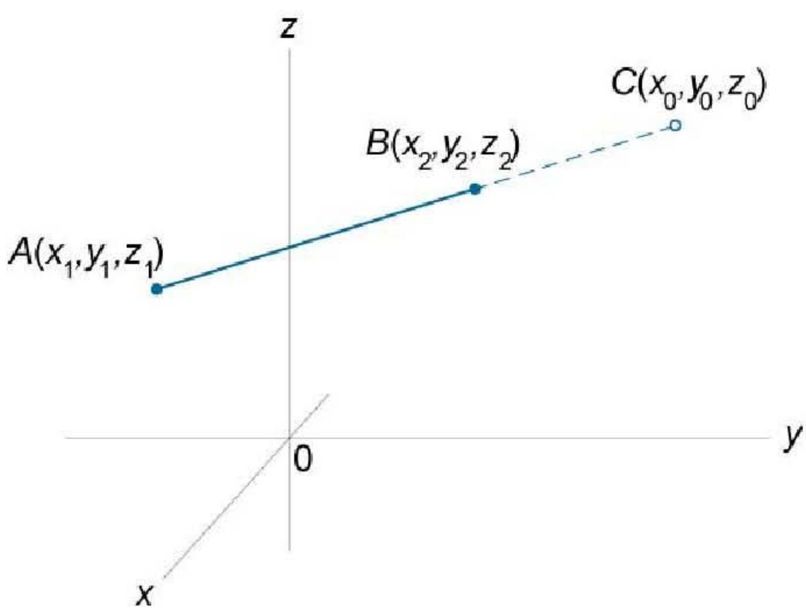
where که در آن

$$\lambda = \frac{AC}{CB},\ \lambda \neq -1.$$



$\lambda > 0$

شکل ۱۲۴ **Figure 124.**



$\lambda < 0$

شکل ۱۲۵ **Figure 125.**

672. Midpoint of a Line Segment نقطه میانی یک پاره خط

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2},\ \lambda = 1.$$

673. Area of a Triangle مساحت مثلث

The area of a triangle with vertices $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, and $P_3(x_3,y_3,z_3)$ is given by

مساحت مثلث با رئوس و با رابطه زیر به دست می آید

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}.$$

حجم چهاروجهی

674. Volume of a Tetrahedron

حجم چهاروجهی با رئوس

The volume of a tetrahedron with vertices $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$, and $P_4(x_4,y_4,z_4)$ is given by

و با رابطه زیر به دست می آید

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

or یا

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}.$$

Note: We choose the sign $(+)$ or $(-)$ so that to get a positive answer for volume.

یادداشت: علامت مثبت یا منفی را انتخاب می کنیم تا جواب مثبت برای حجم به دست آید.

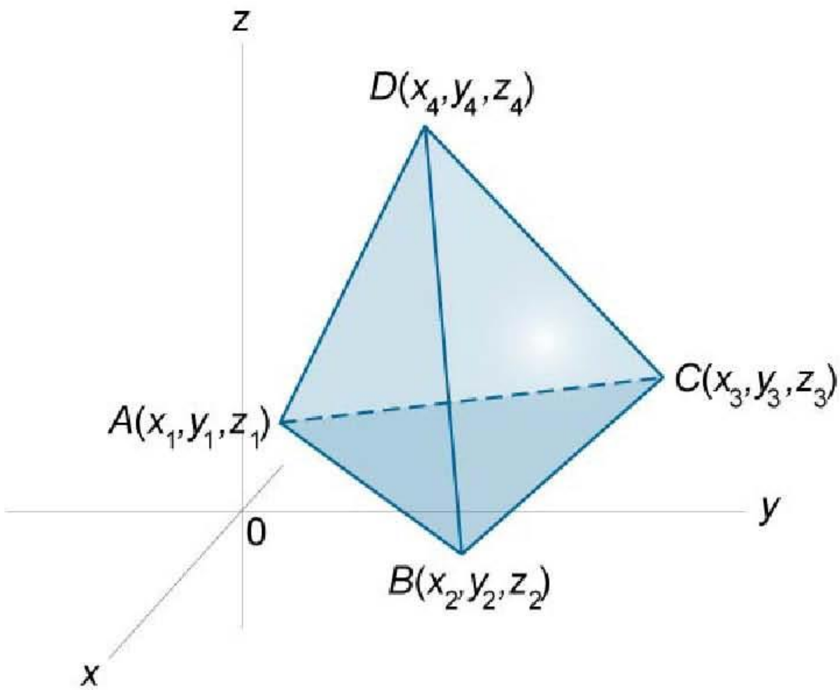


Figure 126. شکل ۱۲۶

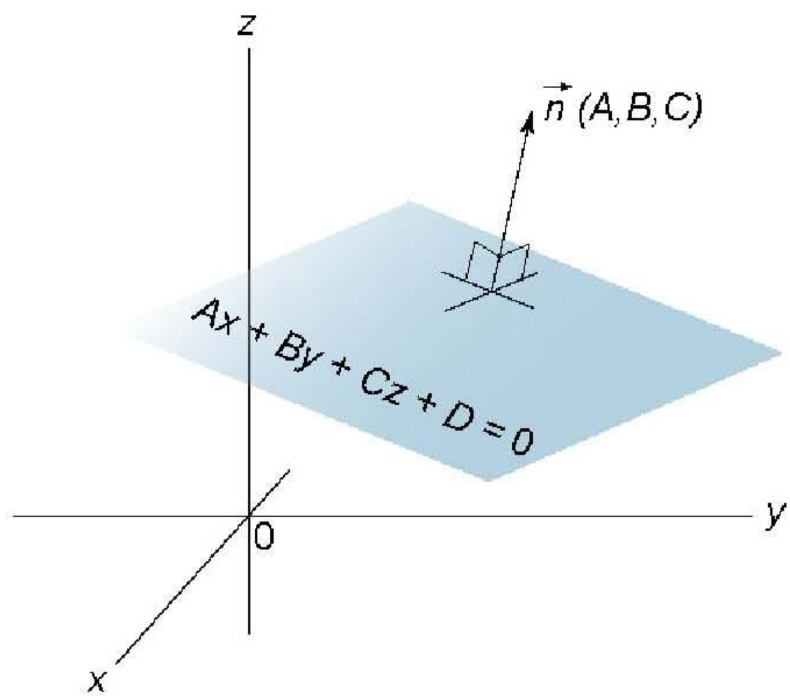
7.9 Plane صفحه

Point coordinates: $x, y, z, x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, \ldots$ مختصات نقطه
Real numbers: $A, B, C, D, A_1, A_2, a, b, c, a_1, a_2, \lambda, p, t, \ldots$ اعداد حقیقی
Normal vectors: $\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{n}_2$ بردارهای عمود (نرمال)
Direction cosines: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ کسینوسهای هادی
Distance from point to plane: d فاصله از نقطه تا صفحه

675. General Equation of a Plane معادله کلی صفحه

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

676. Normal Vector to a Plane بردار نرمال (عمود) بر صفحه
The vector $\vec{n}(A, B, C)$ is normal to the plane
$Ax + By + Cz + D = 0$. بردار n(A,B,C) نرمال (عمود) بر صفحه است.



شکل ۱۲۷ **Figure 127.**

حالتهای خاص معادله صفحه
677. Particular Cases of the Equation of a Plane
$Ax + By + Cz + D = 0$

If $A = 0$, the plane is parallel to the x-axis. اگر A=0، صفحه موازی محور x است.
If $B = 0$, the plane is parallel to the y-axis. اگر B=0، صفحه موازی محور y است.
If $C = 0$, the plane is parallel to the z-axis. اگر C=0، صفحه موازی محور z است.
If $D = 0$, the plane lies on the origin. اگر D=0، صفحه از مبداء می گذرد.

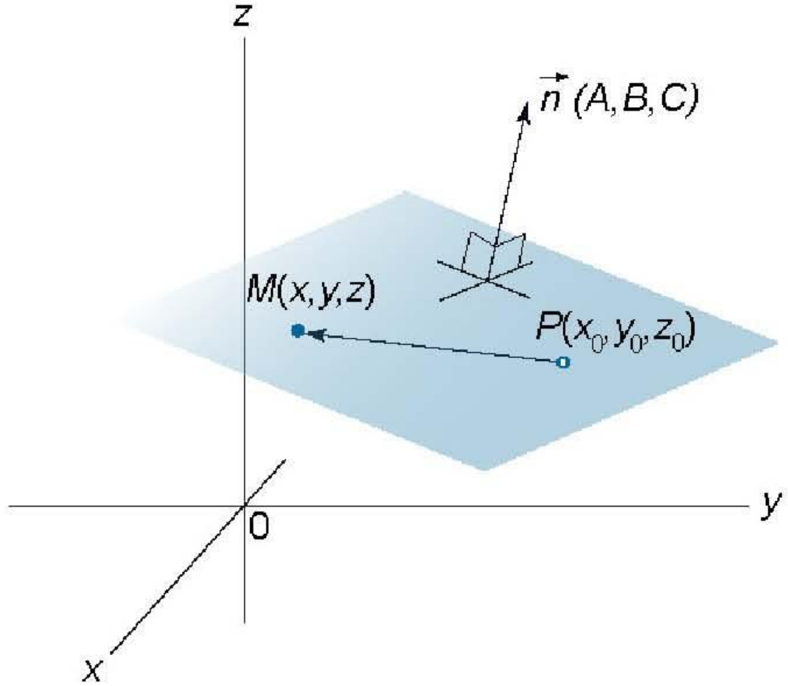
If $A = B = 0$, the plane is parallel to the xy-plane.
If $B = C = 0$, the plane is parallel to the yz-plane.
If $A = C = 0$, the plane is parallel to the xz-plane.
اگر A=B=0، صفحه موازی صفحه xy است.
اگر B=C=0، صفحه موازی صفحه yz است.
اگر A=C=0، صفحه موازی صفحه xz است.

678. Point Direction Form شکل نقطه راستا

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

where the point $P(x_0,y_0,z_0)$ lies in the plane, and the vector (A,B,C) is normal to the plane.

که در آن نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ بر روی صفحه واقع است، و بردار (A,B,C) عمود (نرمال) بر صفحه است.



شکل ۱۲۸ **Figure 128.**

679. Intercept Form شکل طول، عرض و ارتفاع از مبداء

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

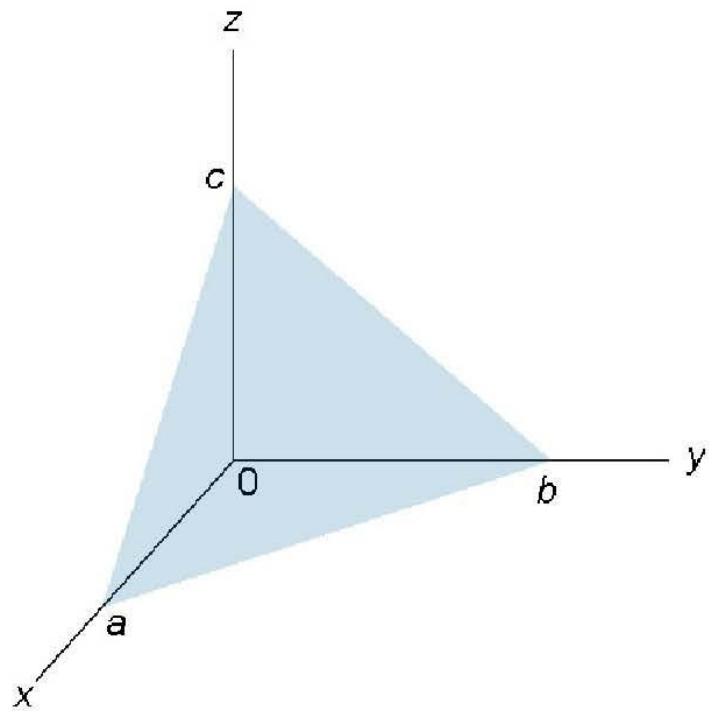


Figure 129. شکل ۱۲۹

680. Three Point Form شکل سه نقطه

$$\begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

or

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

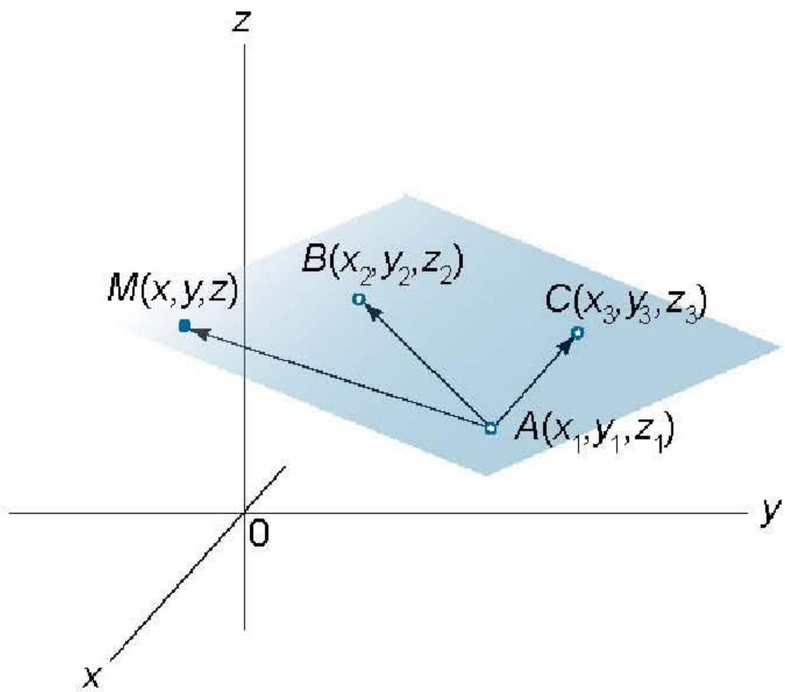


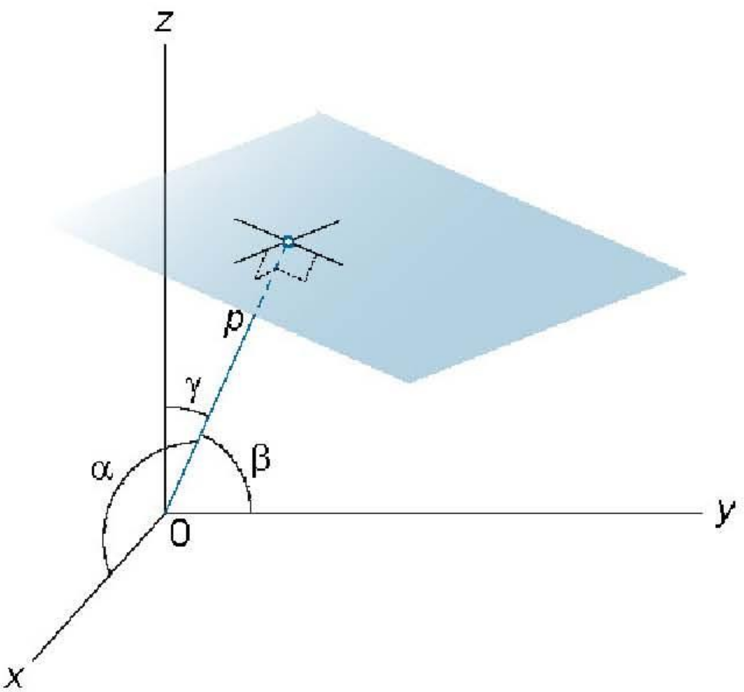
Figure 130. شکل ۱۳۰

681. Normal Form شکل نرمال (عمود)

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$

where p is the perpendicular distance from the origin to the plane , and $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ are the direction cosines of any line normal to the plane.

که در آن p فاصله عمود از مبداء مختصات تا صفحه بوده، و کسینوسهای آلفا، بتا و گاما، کسینوسهای هادی هر خط عمود (نرمال) بر صفحه است.



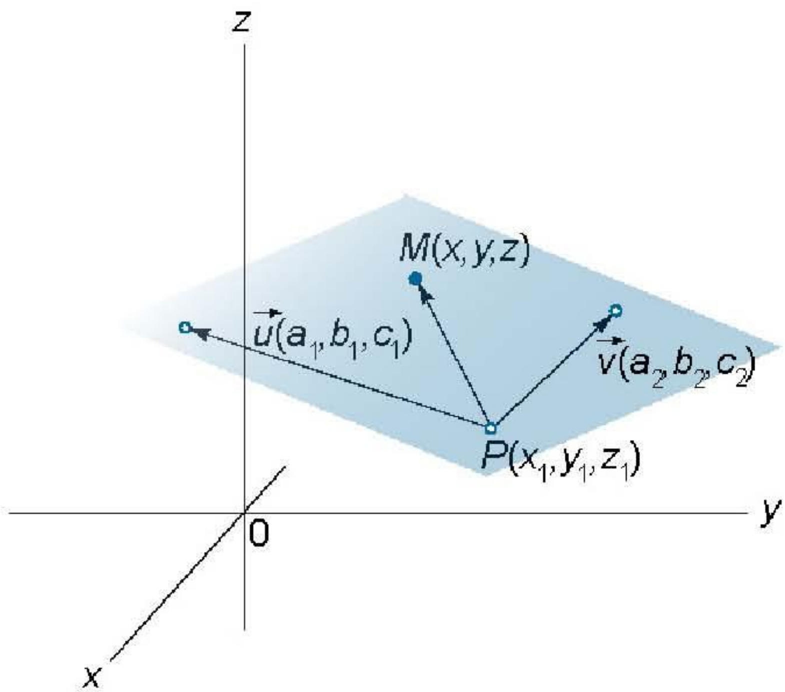
شکل ۱۳۱ **Figure 131.**

682. Parametric Form شکل پارامتری

$$\begin{cases} x = x_1 + a_1 s + a_2 t \\ y = y_1 + b_1 s + b_2 t, \\ z = z_1 + c_1 s + c_2 t \end{cases}$$

where (x, y, z) are the coordinates of any unknown point on the line, the point $P(x_1, y_1, z_1)$ lies in the plane, the vectors (a_1, b_1, c_1) and (a_2, b_2, c_2) are parallel to the plane.

که در آن (x,y,z) مختصات هر نقطه نامعلوم بر روی صفحه است، نقطه $P(x_1,y_1,z_1)$ بر روی صفحه واقع است و بردارهای (a_1,b_1,c_1) و (a_2,b_2,c_2) موازی با صفحه اند.



شکل ۱۳۲ **Figure 132.**

683. Dihedral Angle Between Two Planes زاویه دووجهی میان دو صفحه

If the planes are given by اگر معادلات صفحات به صورت زیر باشد

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$

then the dihedral angle between them is آنگاه زاویه دووجهی میان آنها عبارت است از:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

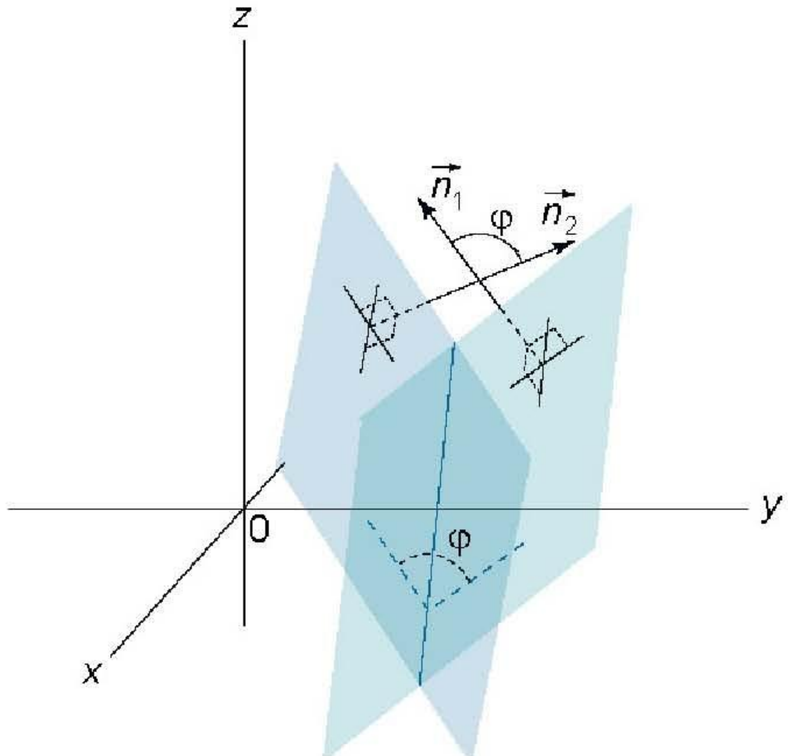


Figure 133. شکل ۱۳۳

684. Parallel Planes صفحات موازی

Two planes $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ and $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ are parallel if

دو صفحه ... و ... موازی اند اگر

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

685. Perpendicular Planes صفحات متعامد

Two planes $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ and $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ are perpendicular if

دو صفحه ... و ... متعامد اند اگر

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

686. Equation of a Plane Through $P(x_1,y_1,z_1)$ and Parallel To the Vectors (a_1,b_1,c_1) and (a_2,b_2,c_2) (Fig.132)

معادله صفحه گذرنده از $P(x_1,y_1,z_1)$ و موازی با بردارهای (a_1,b_1,c_1) و (a_2,b_2,c_2) (شکل ۱۳۲)

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

معادله صفحه گذرنده از نقاط و

687. Equation of a Plane Through $P_1(x_1,y_1,z_1)$ and $P_2(x_2,y_2,z_2)$, and Parallel To the Vector (a,b,c) و موازی با بردار

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

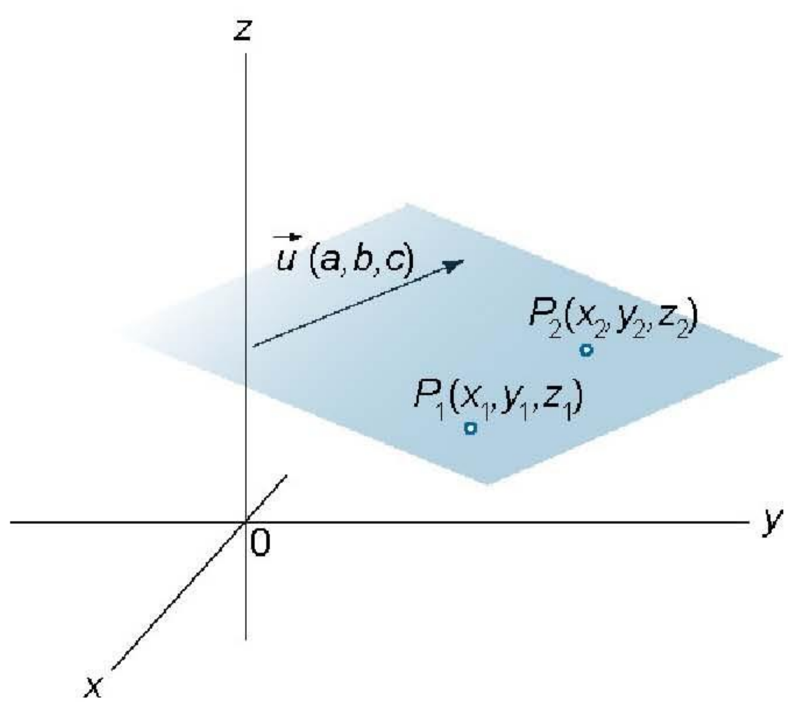


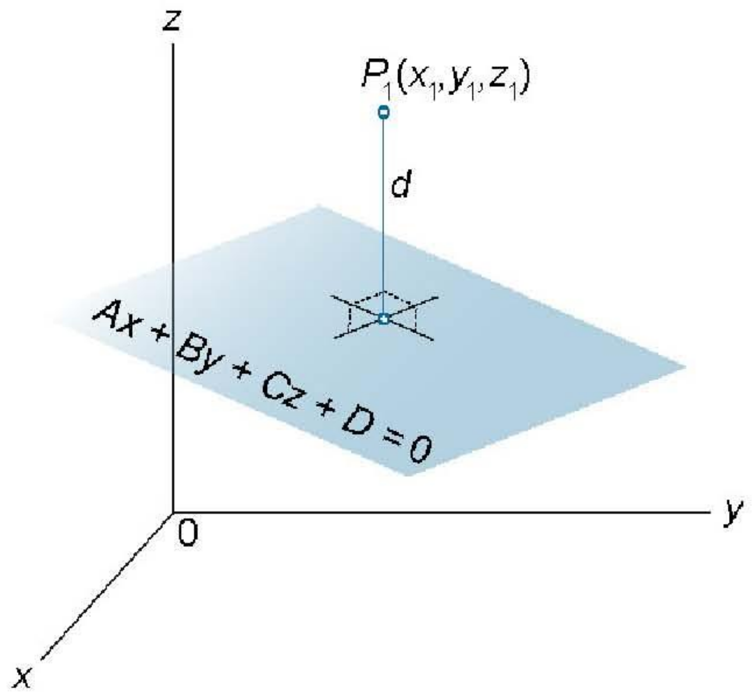
Figure 134. شکل ۱۳۴

688. Distance From a Point To a Plane فاصله از نقطه تا صفحه

The distance from the point $P_1(x_1,y_1,z_1)$ to the plane $Ax+By+Cz+D=0$ is

فاصله از نقطه $P_1(x_1,y_1,z_1)$ تا صفحه $Ax+By+Cz+D=0$ برابر است با

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$



شکل ۱۳۵ **Figure 135.**

689. Intersection of Two Planes تقاطع دو صفحه

اگر دو صفحه If two planes $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ and و $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ intersect, the intersection straight line is given by متقاطع باشند، خط راست تقاطع آنها با رابطه زیر به دست می آید

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt, \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

یا or

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c},$$

که در آن where

$$a=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\ b=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\ c=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

$$x_1=\frac{b\begin{vmatrix} D_1 & C_1 \\ D_2 & C_2 \end{vmatrix}-c\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{a^2+b^2+c^2},$$

$$y_1=\frac{c\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}-a\begin{vmatrix} D_1 & C_1 \\ D_2 & C_2 \end{vmatrix}}{a^2+b^2+c^2},$$

$$z_1=\frac{a\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}}{a^2+b^2+c^2}.$$

7.10 Straight Line in Space خط راست در فضا

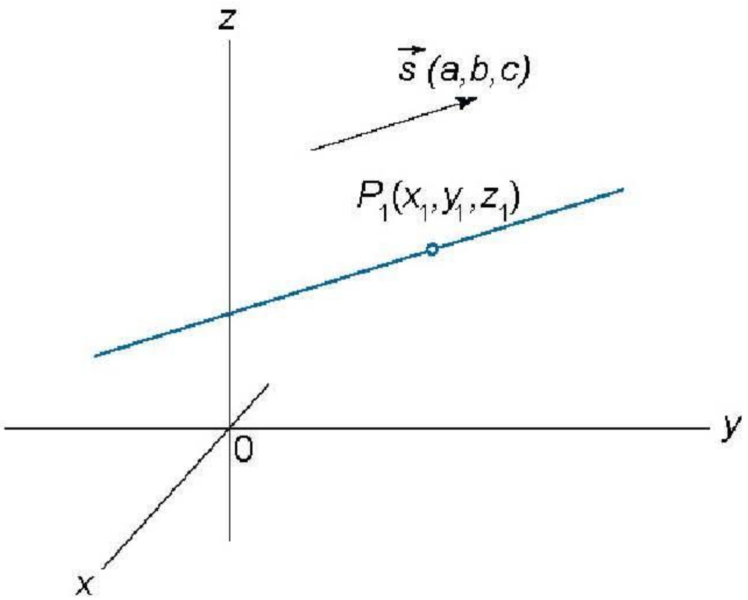
Point coordinates: $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$ مختصات نقطه
Direction cosines: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ کسینوسهای هادی
Real numbers: $A, B, C, D, a, b, c, a_1, a_2, t, \ldots$ اعداد حقیقی
Direction vectors of a line: $\vec{s}$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ بردارهای راستای خط
Normal vector to a plane: $\vec{n}$ بردار نرمال (عمود) بر صفحه
Angle between two lines: φ زاویه میان دو خط

690. Point Direction Form of the Equation of a Line شکل نقطه راستای معادله خط

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c},$$

where the point $P_1(x_1,y_1,z_1)$ lies on the line, and (a,b,c) is the direction vector of the line.

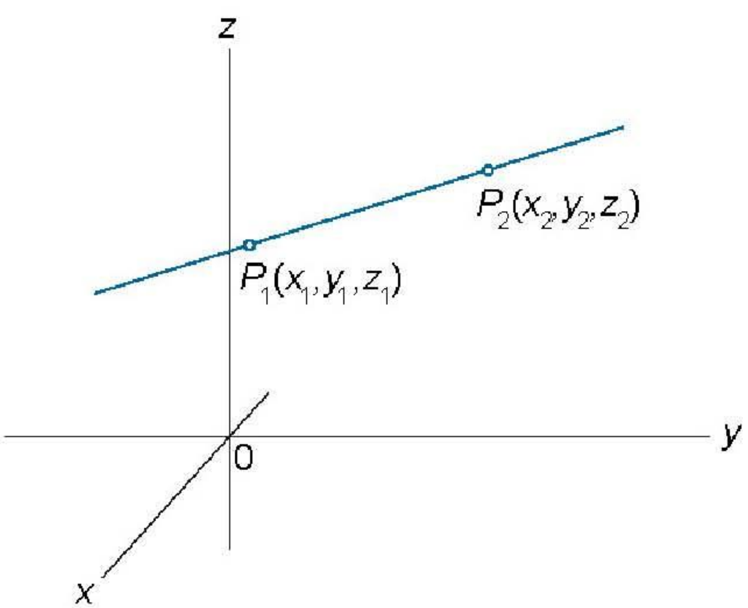
که در آن نقطه $P_1(x_1,y_1,z_1)$ بر روی خط قرار دارد، و (a,b,c) بردار راستای خط است.



شکل ۱۳۶ **Figure 136.**

691. Two Point Form شکل دو نقطه

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$



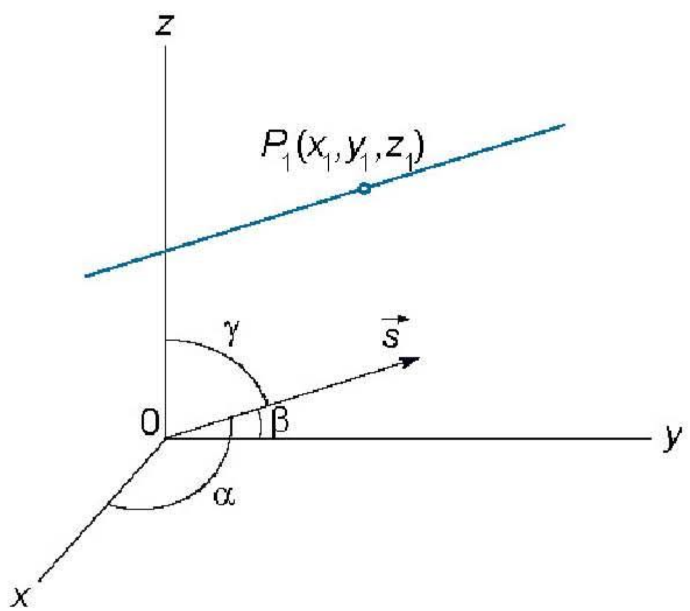
شکل ۱۳۷ **Figure 137.**

692. Parametric Form شکل پارامتری

$$\begin{cases} x = x_1 + t\cos\alpha \\ y = y_1 + t\cos\beta \\ z = z_1 + t\cos\gamma \end{cases},$$

که در آن نقطه $P_1(x_1,y_1,z_1)$ بر روی خط راست واقع است، کسینوسهای آلفا، بتا و گاما کسینوسهای هادی بردار راستای خط اند، پارامتر t هر عدد حقیقی است.

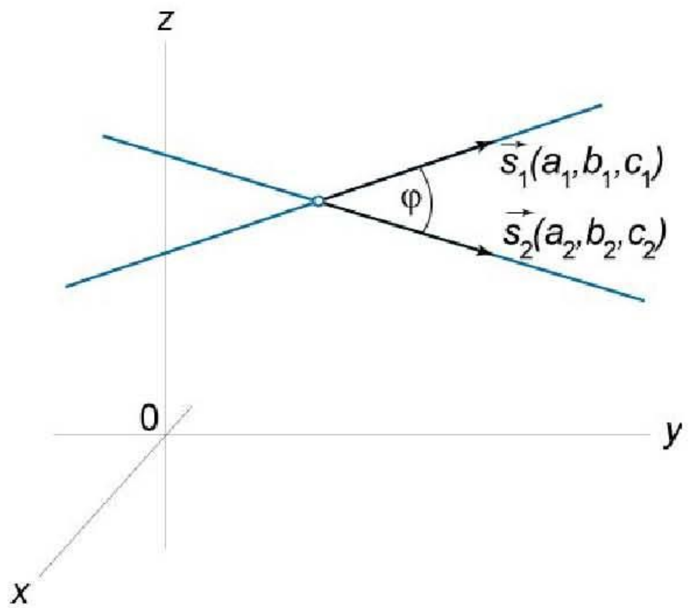
where the point $P_1(x_1,y_1,z_1)$ lies on the straight line, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ are the direction cosines of the direction vector of the line, the parameter t is any real number.



شکل ۱۳۸ **Figure 138.**

693. Angle Between Two Straight Lines زاویه میان دو خط راست

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|} = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$



شکل ۱۳۹ **Figure 139.**

694. Parallel Lines خطوط موازی

Two lines are parallel if دو خط موازی اند اگر

$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$,

or یا

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

695. Perpendicular Lines خطوط متعامد

Two lines are parallel if دو خط متعامد اند اگر

$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$,

or یا

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

696. Intersection of Two Lines تقاطع دو خط

دو خط Two lines $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$ and و

$$\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$ intersect if متقاطع اند اگر

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0.$$

697. Parallel Line and Plane خط و صفحه موازی

خط راست The straight line $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ and the plane و صفحه

$Ax+By+Cz+D=0$ are parallel if موازی اند اگر

$\vec{n}\cdot\vec{s}=0$,

or یا

$Aa+Bb+Cc=0$.

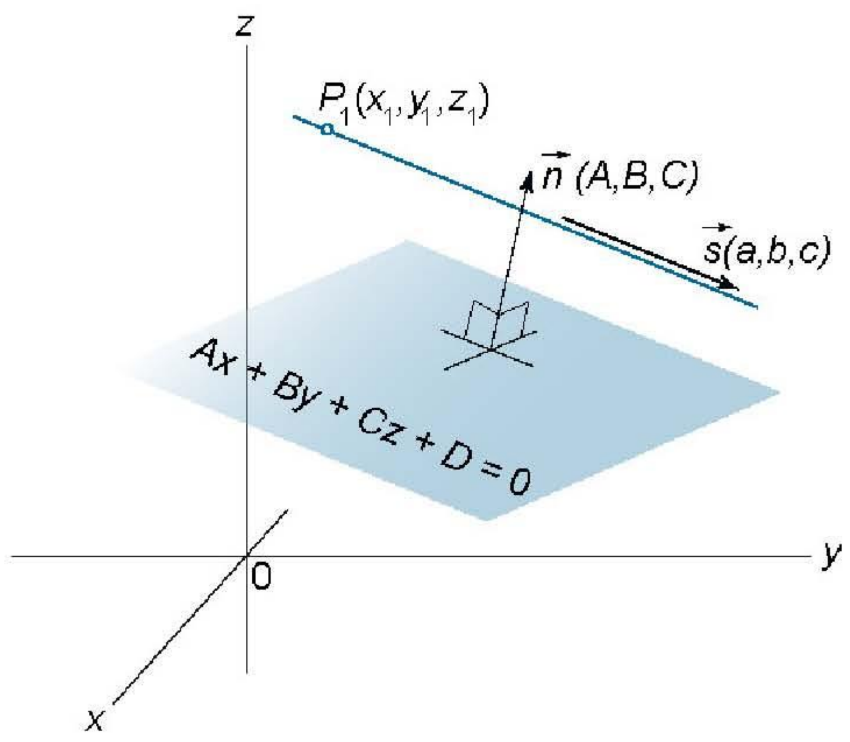


Figure 140. شکل ۱۴۰

698. Perpendicular Line and Plane خط و صفحه متعامد

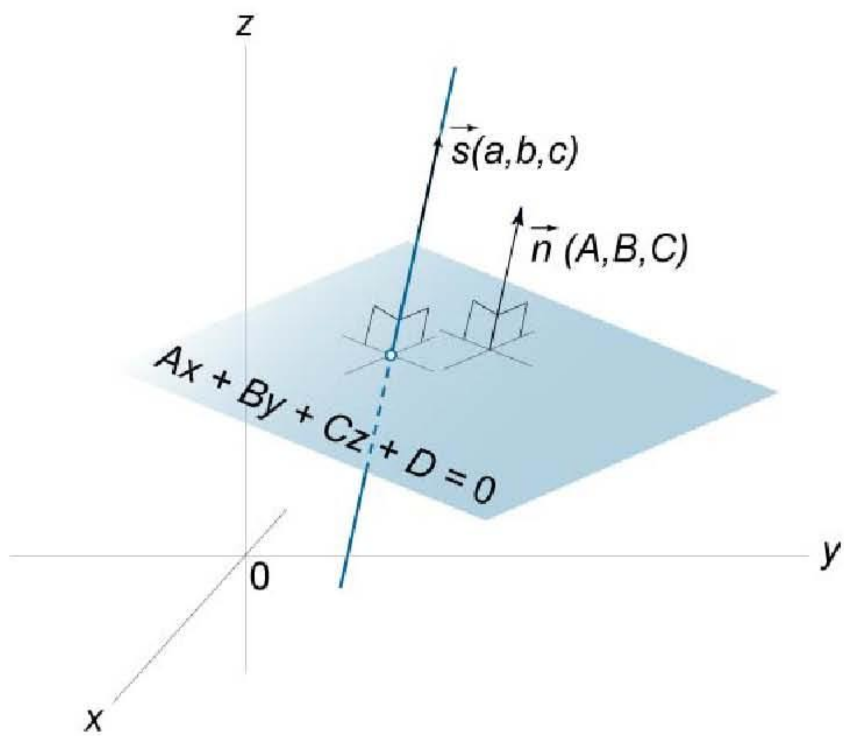
خط راست The straight line $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ and the plane و صفحه

$Ax+By+Cz+D=0$ are perpendicular if متعامد اند اگر

$\vec{n}\,||\,\vec{s}$,

یا or

$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$.



شکل ۱۴۱ **Figure 141.**

7.11 Quadric Surfaces سطوح درجه دوم

مختصات نقطه سطوح درجه دوم
Point coordinates of the quadric surfaces: x, y, z

Real numbers: A, B, C, a, b, c, $k_1, k_2, k_3, \ldots$ اعداد حقیقی

699. General Quadratic Equation معادله کلی سطوح درجه دوم

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy+2Px+2Qy+2Rz+D=0$$

700. Classification of Quadric Surfaces دسته بندی سطوح درجه دوم

حالت Case	رتبه Rank(e)	رتبه Rank(E)	Δ	علایم k signs	نوع سطح (رویه) Type of Surface
1	3	4	<0	Same یکسان	Real Ellipsoid بیضی گون حقیقی
2	3	4	>0	Same	Imaginary Ellipsoid بیضی گون موهومی
3	3	4	>0	Different متفاوت	Hyperboloid of 1 Sheet هذلولی گون ۱ صفحه
4	3	4	<0	Different	Hyperboloid of 2 Sheets هذلولی گون ۲ صفحه
5	3	3		Different	Real Quadric Cone مخروط درجه دوم حقیقی
6	3	3		Same	Imaginary Quadric Cone مخروط درجه ۲ موهومی
7	2	4	<0	Same	Elliptic Paraboloid سهمی گون بیضوی
8	2	4	>0	Different	Hyperbolic Paraboloid سهمی گون هذلولی
9	2	3		Same	Real Elliptic Cylinder استوانه بیضوی حقیقی
10	2	3		Same	Imaginary Elliptic Cylinder استوانه بیضوی موهومی
11	2	3		Different	Hyperbolic Cylinder استوانه هذلولی
12	2	2		Different	Real Intersecting Planes صفحات متقاطع حقیقی
13	2	2		Same	Imaginary Intersecting Planes صفحات متقاطع موهومی
14	1	3			Parabolic Cylinder استوانه سهموی
15	1	2			Real Parallel Planes صفحات موازی حقیقی
16	1	2			Imaginary Parallel Planes صفحات موازی موهومی
17	1	1			Coincident Planes صفحات منطبق

Here در اینجا

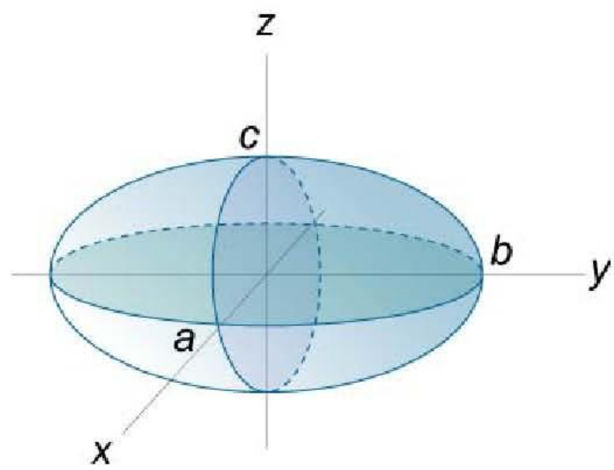
$$e=\begin{pmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} A & H & Q & P \\ H & B & F & Q \\ G & F & C & R \\ P & Q & R & D \end{pmatrix},\ \Delta=\det(E),$$

k_1, k_2, k_3 are the roots of the equation, ریشه های این معادله اند،

$$\begin{vmatrix} A-x & H & G \\ H & B-x & F \\ G & F & C-x \end{vmatrix}=0.$$

701. Real Ellipsoid (Case 1) بیضی گون حقیقی (حالت ۱)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



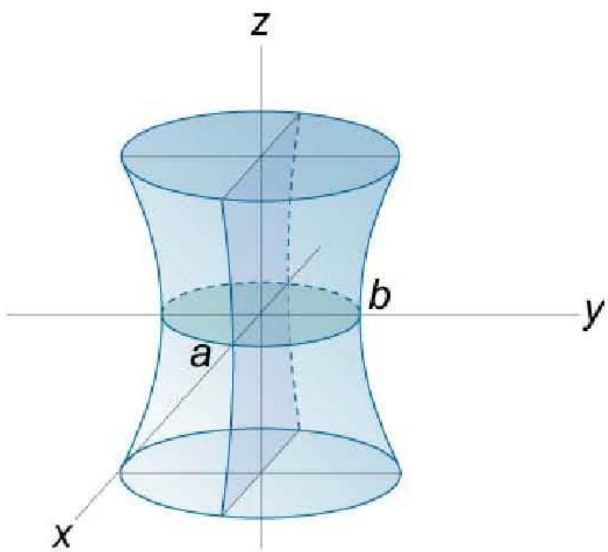
شکل ۱۴۲ **Figure 142.**

702. Imaginary Ellipsoid (Case 2) بیضی گون موهومی (حالت ۲)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

703. Hyperboloid of 1 Sheet (Case 3) هذلولی گون ۱ صفحه (حالت ۳)

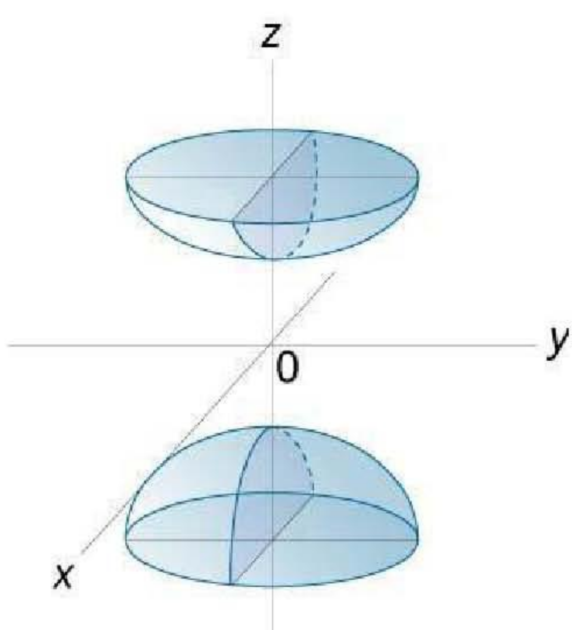
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



شکل ۱۴۳ **Figure 143.**

704. Hyperboloid of 2 Sheets (Case 4) هذلولی گون ۲ صفحه (حالت ۴)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



شکل ۱۴۴ **Figure 144.**

705. Real Quadric Cone (Case 5) مخروط درجه دوم حقیقی (حالت ۵)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

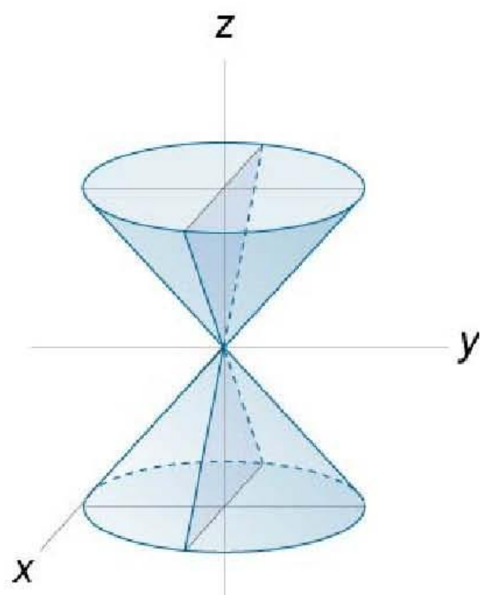


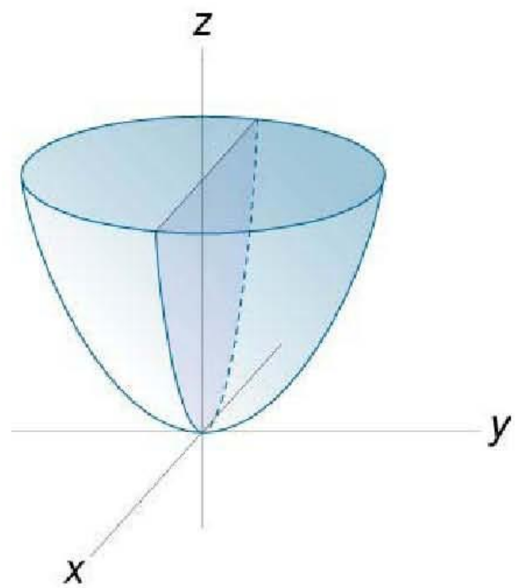
Figure 145. شکل ۱۴۵

706. Imaginary Quadric Cone (Case 6) مخروط درجه دوم موهومی (حالت ۶)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

707. Elliptic Paraboloid (Case 7) سهمی گون بیضوی (حالت ۷)

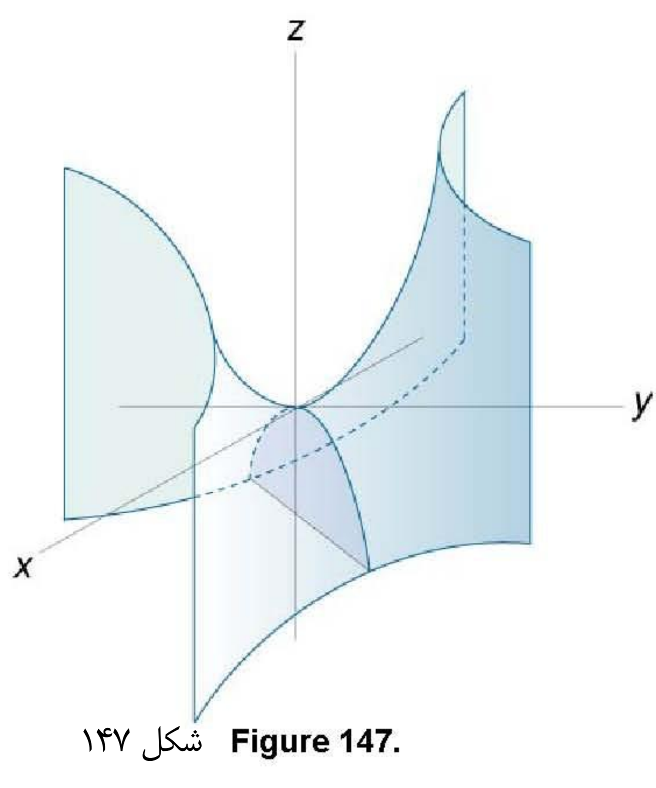
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$$



شکل ۱۴۶ **Figure 146.**

708. Hyperbolic Paraboloid (Case 8) سهمی گون هذلولی (حالت ۸)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$$



شکل ۱۴۷ **Figure 147.**

709. Real Elliptic Cylinder (Case 9) استوانه بیضوی حقیقی (حالت ۹)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

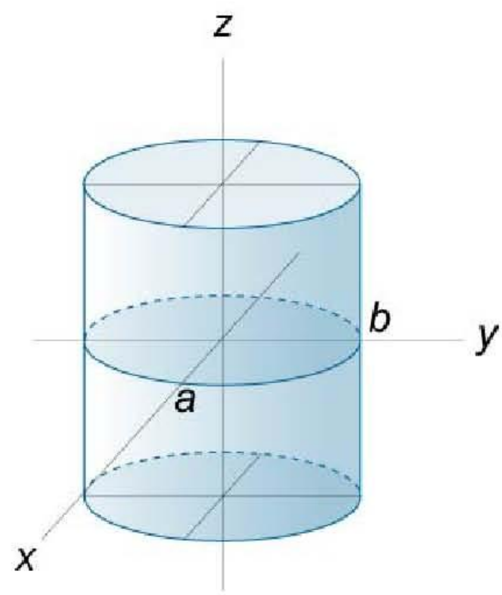


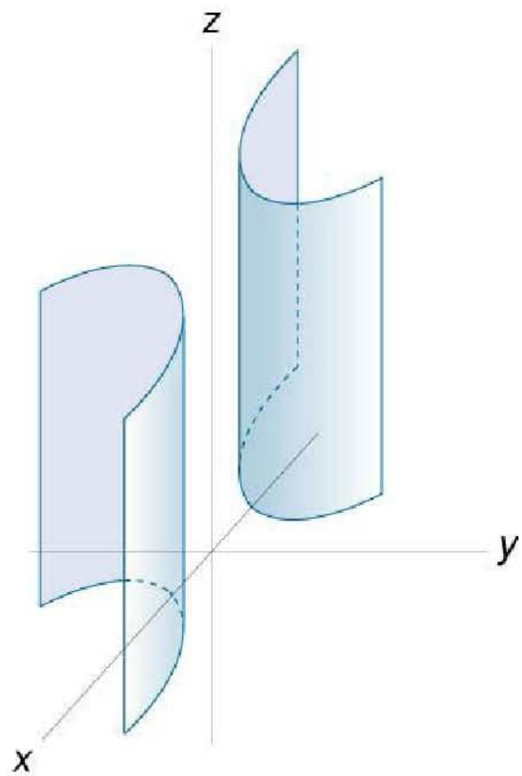
Figure 148. شکل ۱۴۸

710. Imaginary Elliptic Cylinder (Case 10) استوانه بیضوی موهومی (حالت ۱۰)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

711. Hyperbolic Cylinder (Case 11) استوانه هذلولی (حالت ۱۱)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



شکل ۱۴۹ **Figure 149.**

712. Real Intersecting Planes (Case 12) صفحات متقاطع حقیقی (حالت ۱۲)

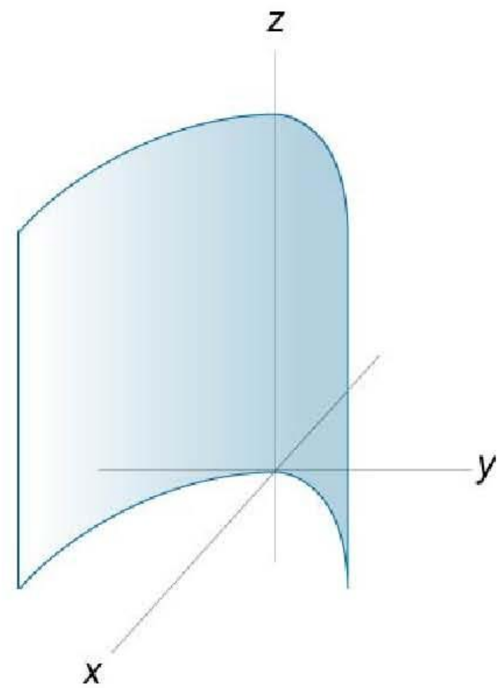
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

713. Imaginary Intersecting Planes (Case 13) صفحات متقاطع موهومی (حالت ۱۲)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

714. Parabolic Cylinder (Case 14) استوانه سهومی (حالت ۱۴)

$$\frac{x^2}{a^2}-y=0$$



شکل ۱۵۰ **Figure 150.**

715. Real Parallel Planes (Case 15) صفحات موازی حقیقی (حالت ۱۵)

$$\frac{x^2}{a^2}=1$$

716. Imaginary Parallel Planes (Case 16) صفحات موازی موهومی (حالت ۱۶)

$$\frac{x^2}{a^2}=-1$$

717. Coincident Planes (Case 17) صفحات منطبق (حالت ۱۷)

$$x^2=0$$

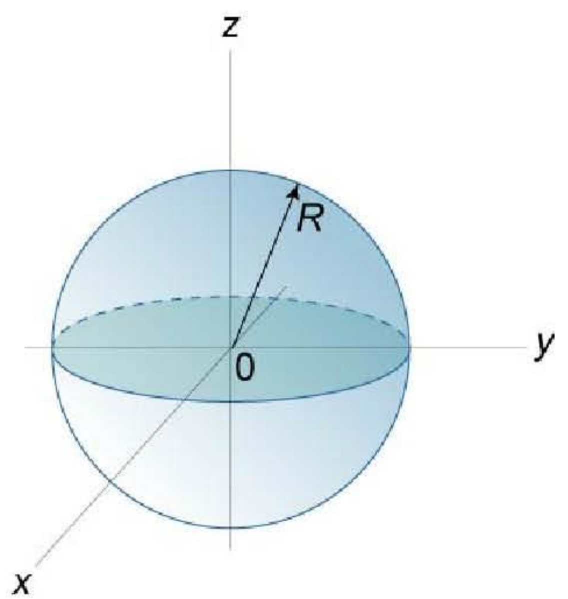
7.12 Sphere کره

Radius of a sphere: R شعاع کره
Point coordinates: $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$ مختصات نقطه
Center of a sphere: (a,b,c) مرکز کره
Real numbers: A, D, E, F, M اعداد حقیقی

معادله کره با مرکز مبداء (شکل استاندارد)

718. Equation of a Sphere Centered at the Origin (Standard Form)

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$



شکل ۱۵۱ **Figure 151.**

معادله کره به مرکز هر نقطه (a,b,c)

719. Equation of a Circle Centered at Any Point (a,b,c)

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

720. Diameter Form شکل قطر

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0,$$

where که در آن
$P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ are the ends of a diameter. دو سَر قطر اند.

721. Four Point Form شکل چهار نقطه

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+x_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+x_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+x_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+x_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

722. General Form شکل کلی (A غیرصفر است)

$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+M=0$ (A is nonzero).

The center of the sphere has coordinates (a,b,c), where مرکز کره مختصات (a,b,c) دارد، که در آن

$$a=-\frac{D}{2A},\ b=-\frac{E}{2A},\ c=-\frac{F}{2A}.$$

The radius of the sphere is شعاع کره عبارت است از

$$R=\frac{\sqrt{D^2+E^2+F^2-4A^2M}}{2A}.$$

فصل ۸ Chapter 8

حساب دیفرانسیل Differential Calculus

Functions: f, g, y, u, v   توابع
Argument (independent variable): x   آرگومان (متغیر مستقل)
Real numbers: a, b, c, d   اعداد حقیقی
Natural number: n   عدد طبیعی
Angle: α زاویه
Inverse function: f^{-1} تابع وارون

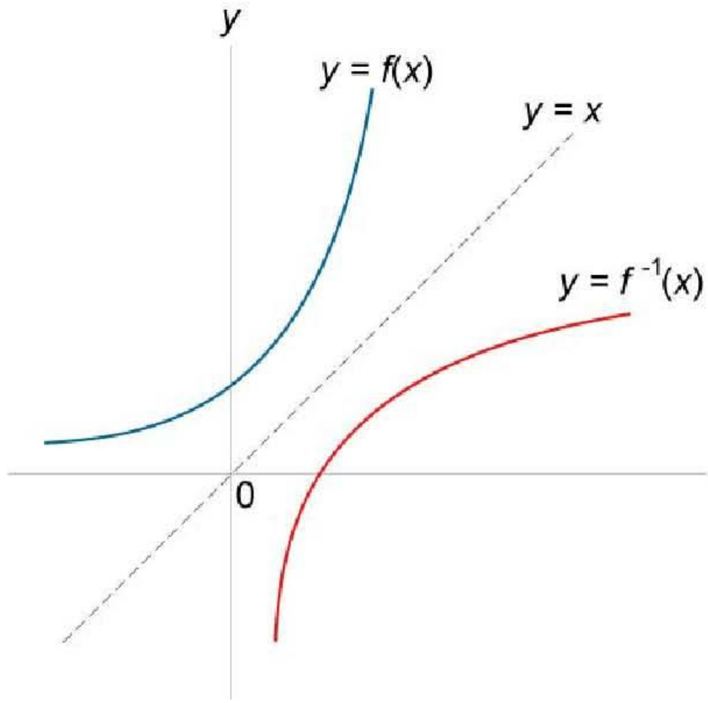
8.1 Functions and Their Graphs   توابع و نمودارهای آنها

723. Even Function   تابع زوج
$f(-x)=f(x)$

724. Odd Function   تابع فرد
$f(-x)=-f(x)$

725. Periodic Function   تابع متناوب
$f(x+nT)=f(x)$

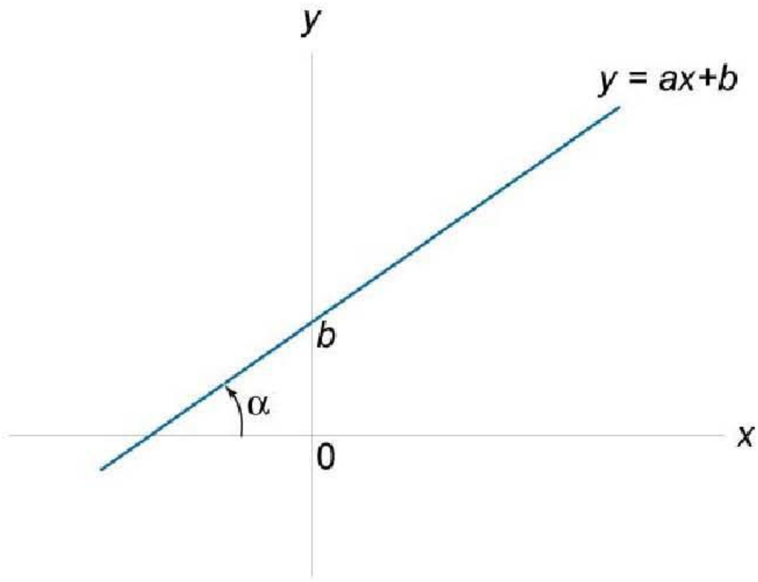
726. Inverse Function   تابع وارون
$y=f(x)$ is any function, $x=g(y)$ or $y=f^{-1}(x)$ is its inverse function. $Y=f(x)$ هر تابعی باشد، $x=g(y)$ یا $y=f^{-1}(x)$ تابع وارون آن است.



شکل ۱۵۲ **Figure 152.**

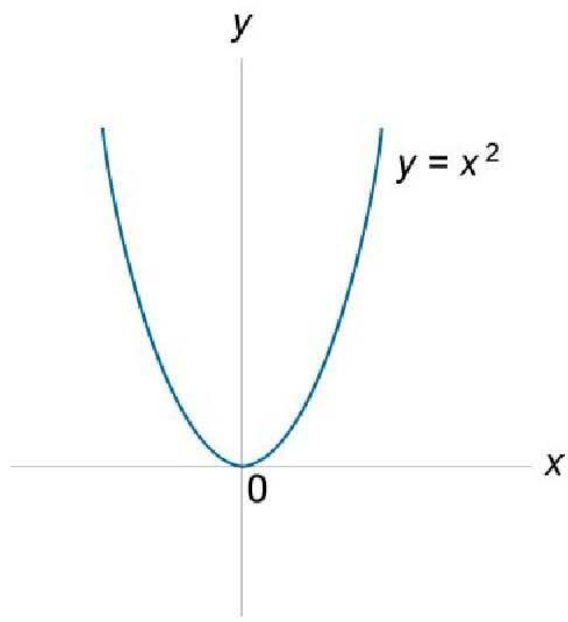
727. Composite Function تابع مرکب
$y=f(u),\ u=g(x),\ y=f(g(x))$ is a composite function. یک تابع مرکب است.

728. Linear Function تابع خطی
$y=ax+b,\ \ x\in R,\ \ a=\tan\alpha$ is the slope of the line, شیب خط است، b is the y-intercept. عرض از مبداء است.



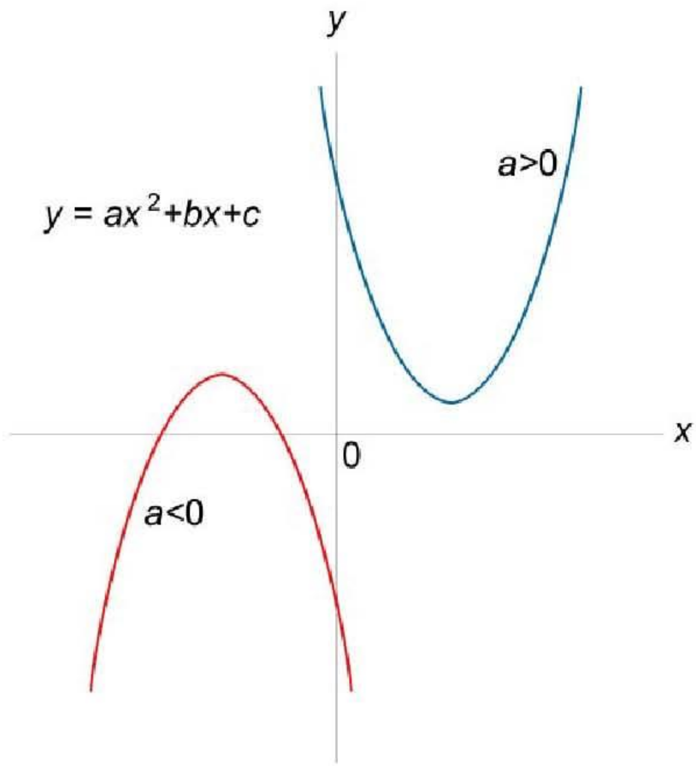
شکل ۱۵۳ **Figure 153.**

729. Quadratic Function تابع درجه دوم
$y = x^2,\ x \in R$.



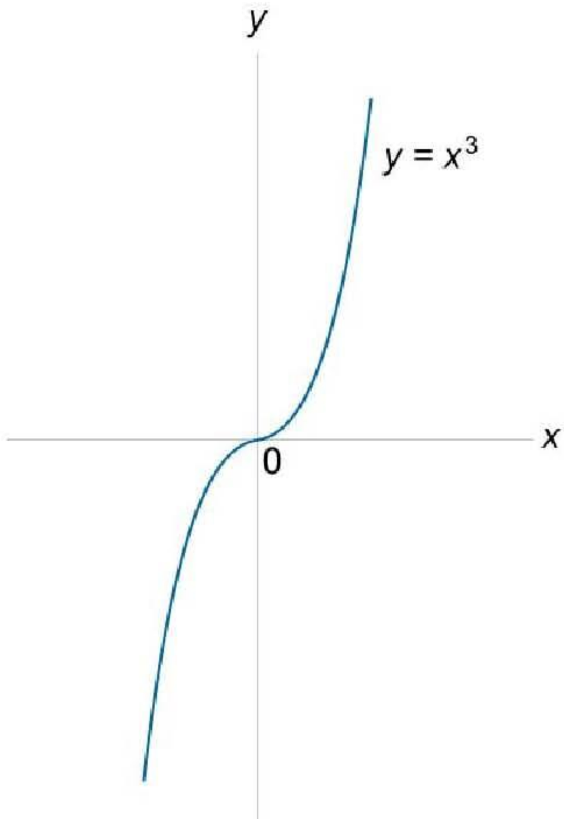
شکل ۱۵۴ **Figure 154.**

730. $y = ax^2 + bx + c, \; x \in R.$



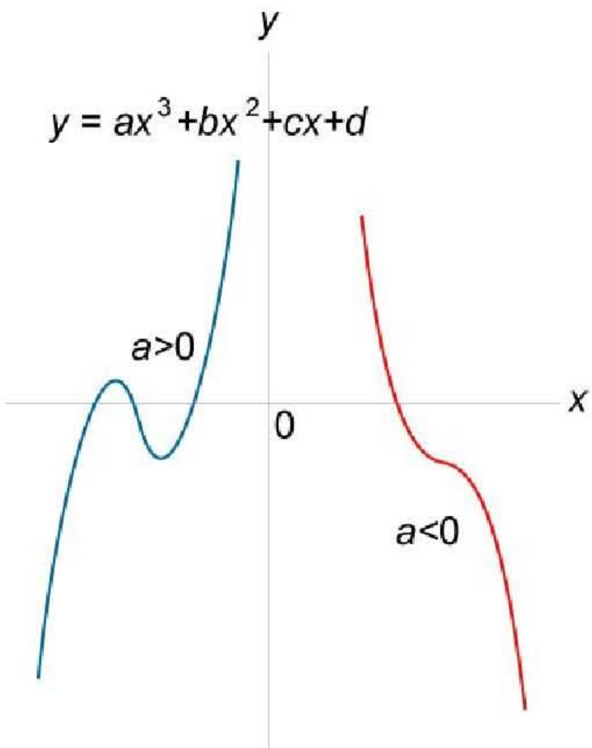
شکل ۱۵۵ **Figure 155.**

731. Cubic Function تابع درجه سوم
$y = x^3, \; x \in R.$



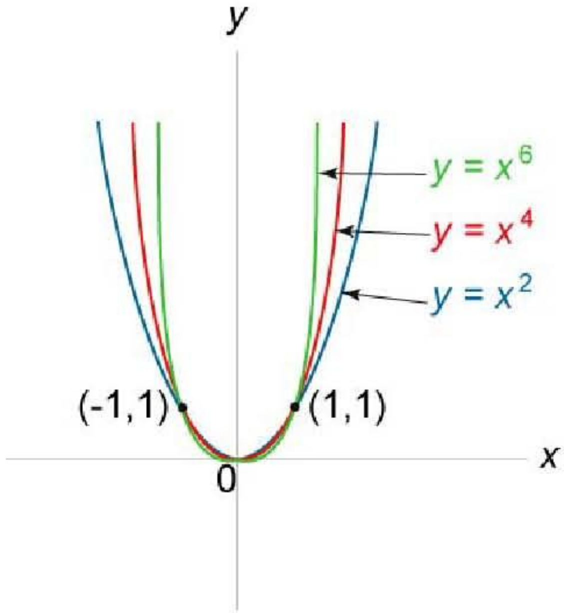
شکل ۱۵۶ **Figure 156.**

732. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,,\ x \in R\,.$

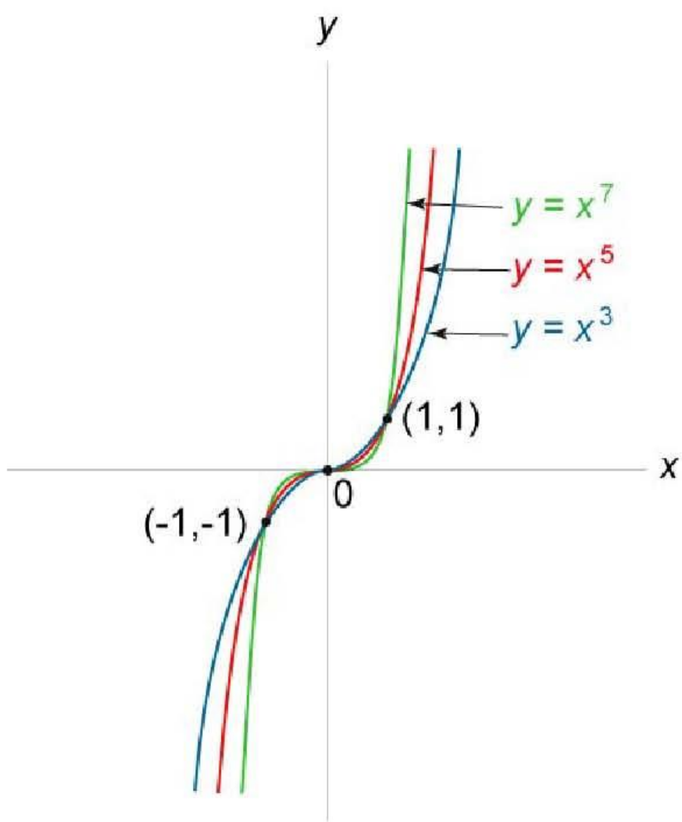


شکل ۱۵۷ **Figure 157.**

733. Power Function تابع توانی
$y = x^n,\ n \in N.$



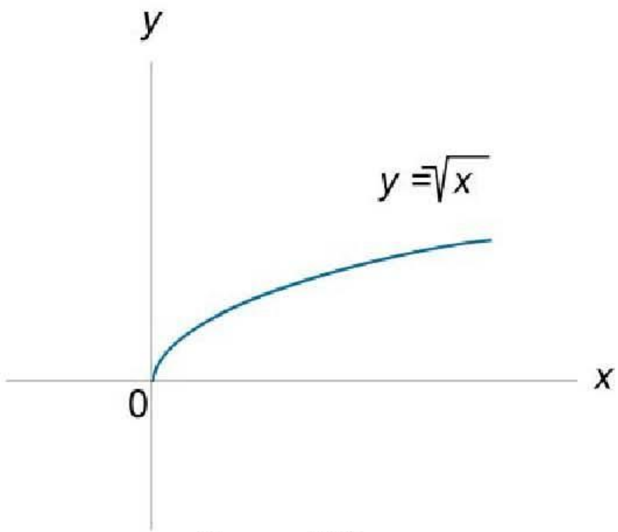
شکل ۱۵۸ **Figure 158.**



شکل ۱۵۹ **Figure 159.**

734. Square Root Function تابع جذر مربعی

$y=\sqrt{x}\,,\ x\in[0,\infty).$



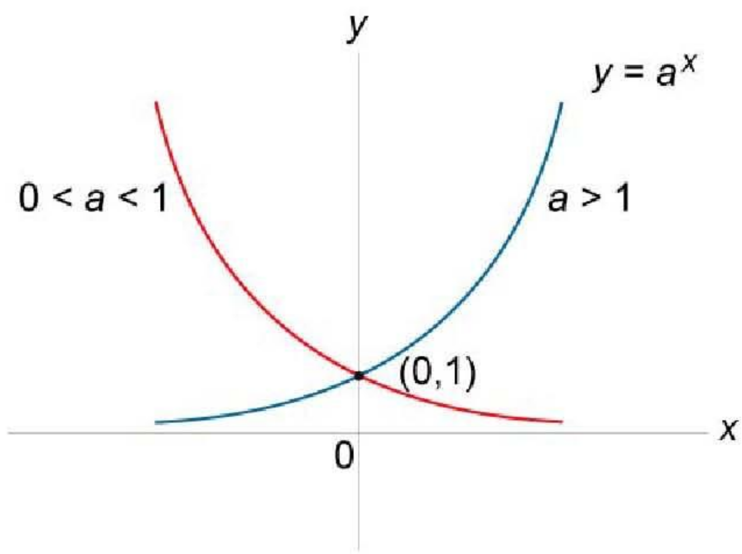
شکل ۱۶۰ **Figure 160.**

735. Exponential Functions توابع نمایی

$y=a^x,\ a>0\,,\ a\neq 1\,,$

$y=e^x$ if $a=e\,,\ e=2.71828182846\ldots$

اگر



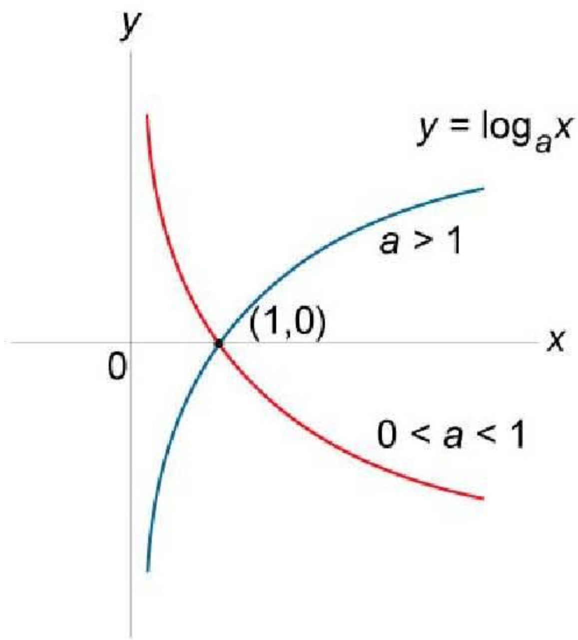
شکل ۱۶۱ **Figure 161.**

736. Logarithmic Functions توابع لگاریتمی

$y = \log_a x\ ,\ x \in (0, \infty),\ \ a > 0\ ,\ a \neq 1,$

$y = \ln x$ if $a = e\ ,\ x > 0.$

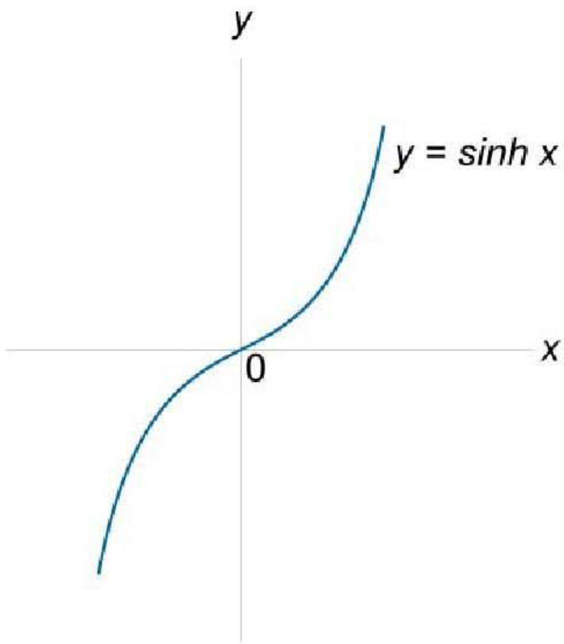
اگر



شکل ۱۶۲ **Figure 162.**

737. Hyperbolic Sine Function تابع سینوس هایپربولیک

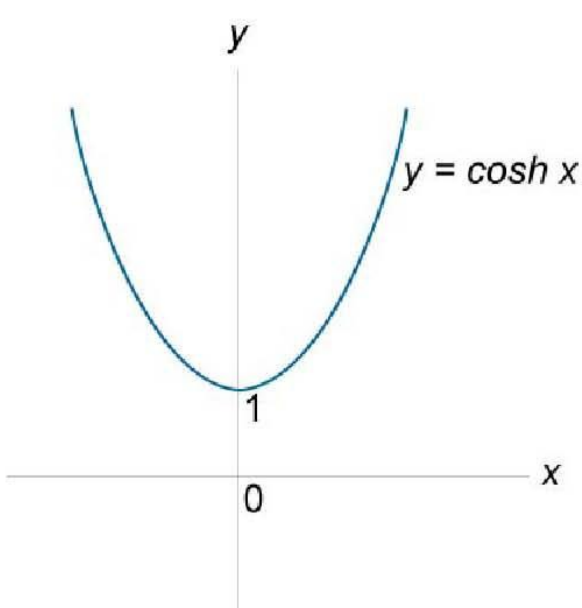
$$y = \sinh x\ ,\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ ,\ x \in R.$$



شکل ۱۶۳ **Figure 163.**

738. Hyperbolic Cosine Function تابع کسینوس هایپربولیک

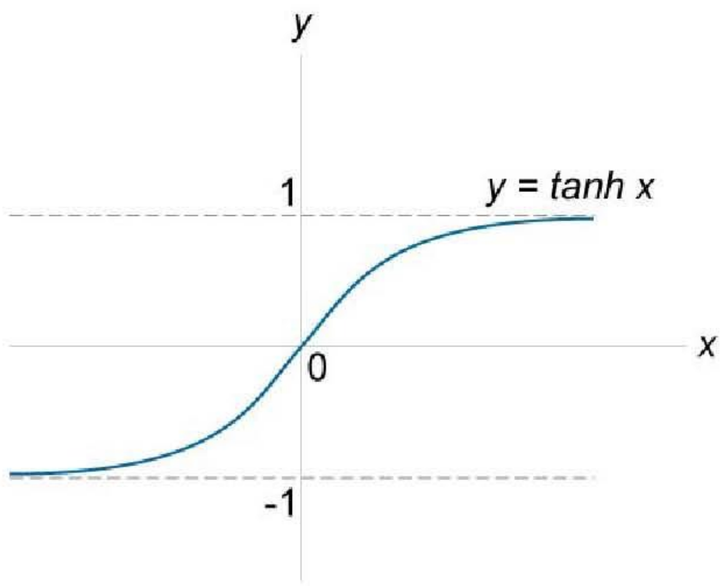
$$y = \cosh x\,,\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,,\ x \in R\,.$$



شکل ۱۶۴ **Figure 164.**

739. Hyperbolic Tangent Function تابع تانژانت هایپربولیک

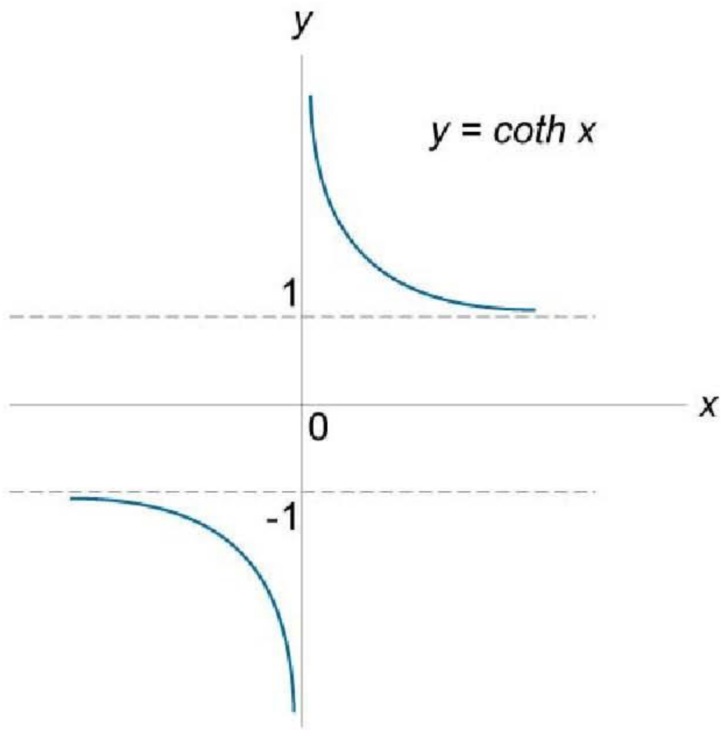
$$y = \tanh x\,,\ y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,,\ x \in R\,.$$



شکل ۱۶۵ **Figure 165.**

740. Hyperbolic Cotangent Function تابع کتانژانت هایپربولیک

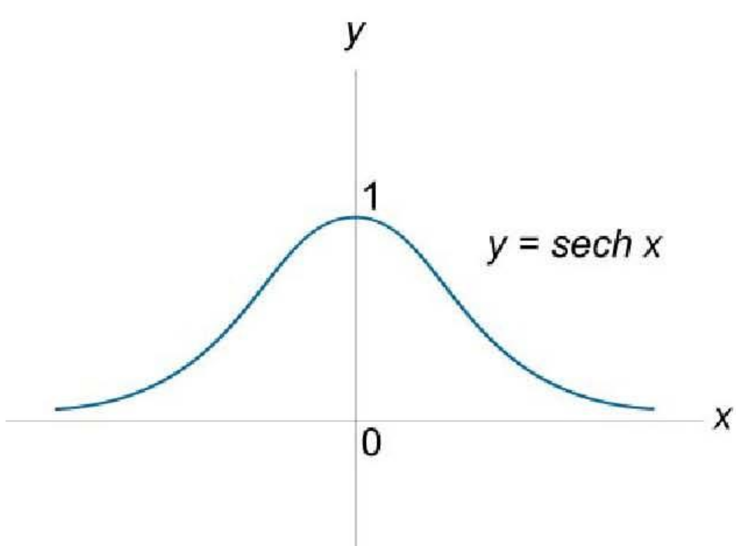
$$y = \coth x\,,\ y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,,\ x \in R\,,\ x \neq 0\,.$$



شکل ۱۶۶ **Figure 166.**

741. Hyperbolic Secant Function تابع سکانت هایپربولیک

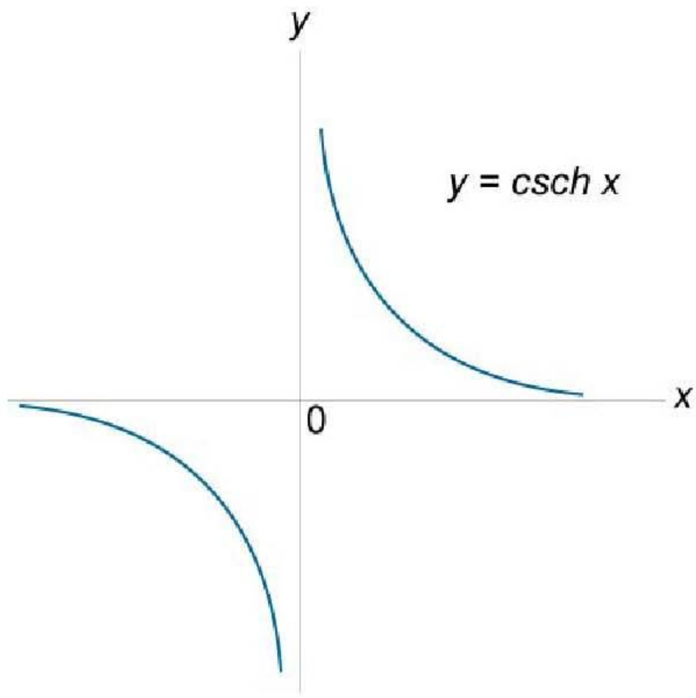
$$y=\operatorname{sech} x,\ y=\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^{x}+e^{-x}},\ x\in R.$$



شکل ۱۶۷ **Figure 167.**

742. Hyperbolic Cosecant Function تابع کسکانت هایپربولیک

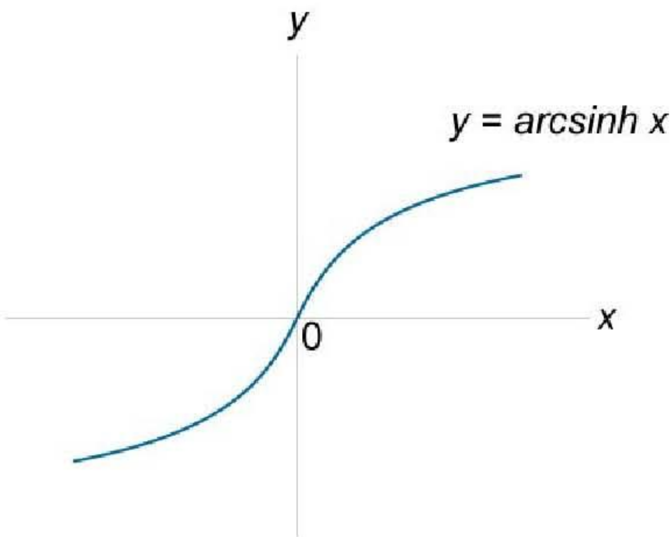
$$y = \operatorname{csch} x\,,\; y = \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}\,,\; x \in R\,,\; x \neq 0.$$



شکل ۱۶۸ **Figure 168.**

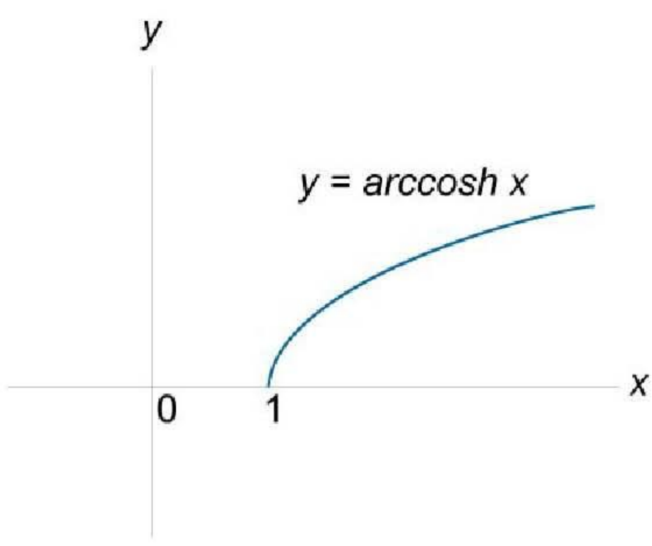
743. Inverse Hyperbolic Sine Function تابع وارون سینوس هایپربولیک

$$y = \operatorname{arcsinh} x\,,\; x \in R\,.$$



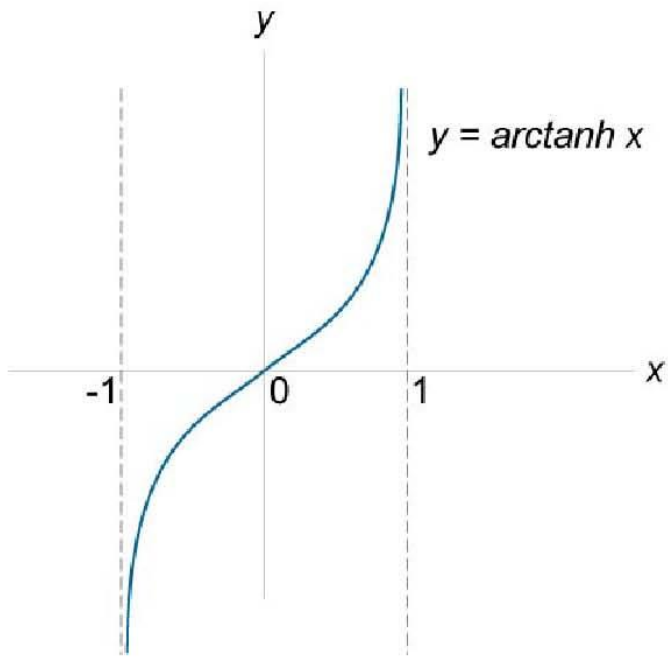
شکل ۱۶۹ **Figure 169.**

744. Inverse Hyperbolic Cosine Function تابع وارون کسینوس هایپربولیک
$y = \operatorname{arccosh} x\,,\ x \in [1, \infty).$



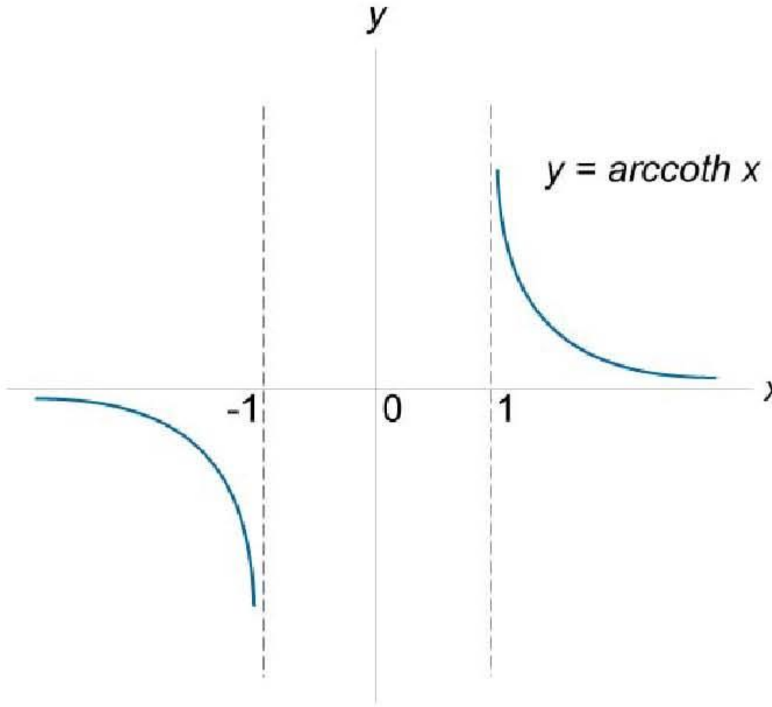
شکل ۱۷۰ **Figure 170.**

745. Inverse Hyperbolic Tangent Function تابع وارون تانژانت هایپربولیک
$y = \operatorname{arctanh} x\,,\ x \in (-1, 1).$



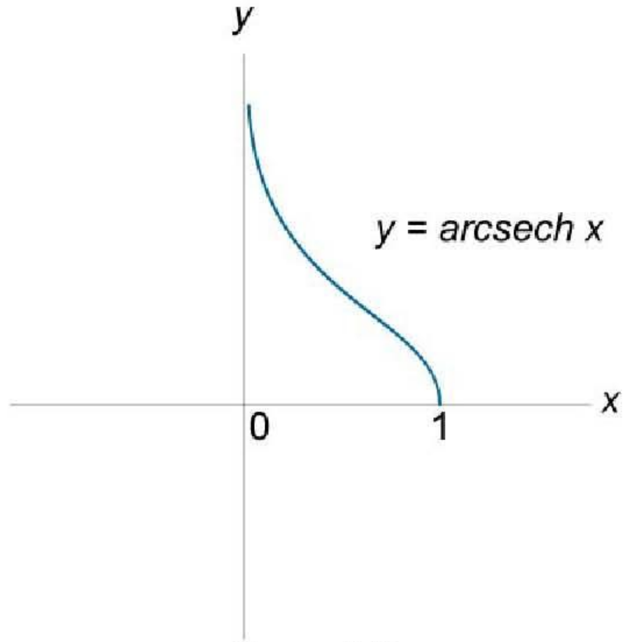
شکل ۱۷۱ **Figure 171.**

746. Inverse Hyperbolic Cotangent Function تابع وارون کتانژانت هایپربولیک
$y = \operatorname{arccoth} x\ ,\ x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$



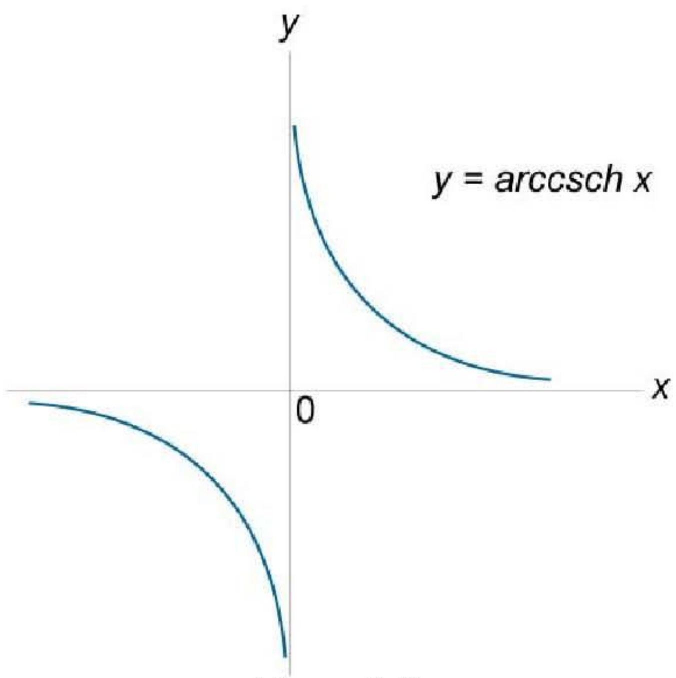
شکل ۱۷۲   **Figure 172.**

747. Inverse Hyperbolic Secant Function   تابع وارون سکانت هایپربولیک
$y = \operatorname{arcsech} x\,,\ x \in (0,1]$.



شکل ۱۷۳ **Figure 173.**

748. Inverse Hyperbolic Cosecant Function تابع وارون کسکانت هایپربولیک
$y = \operatorname{arccsch} x, \; x \in R, \; x \neq 0.$



شکل ۱۷۴ **Figure 174.**

8.2 Limits of Functions حدهای توابع

Functions: $f(x)$, $g(x)$ توابع
Argument: x متغیر (آرگومان)
Real constants: a, k ثوابت حقیقی

749. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$

750. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}g(x)$

751. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$

752. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, if $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$.

753. $\lim\limits_{x\to a}[kf(x)]=k\lim\limits_{x\to a}f(x)$

754. $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=f\left(\lim\limits_{x\to a}g(x)\right)$

755. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, if the function $f(x)$ is continuous at $x=a$.
اگر تابع f(x) در x=a پیوسته باشد.

756. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

757. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

758. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x}{x}=1$

759. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^{-1}x}{x}=1$

760. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

761. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

762. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$

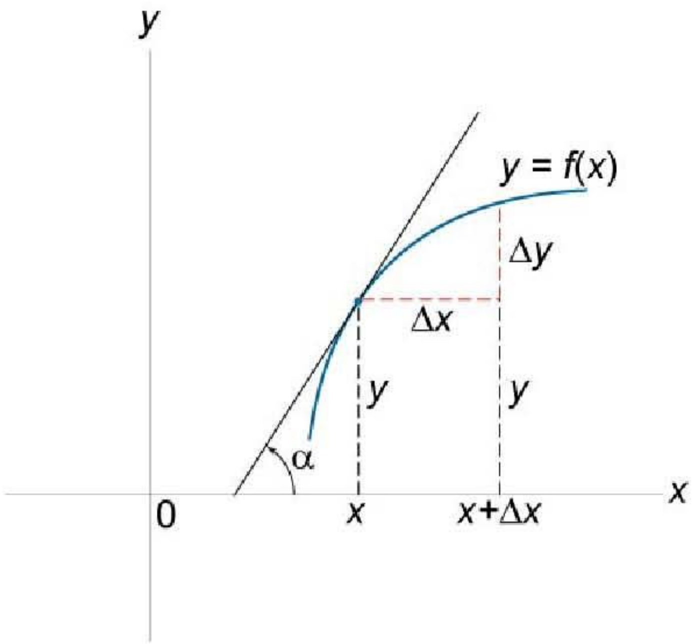
763. $\lim\limits_{x\to 0}a^{x}=1$

تعریف و خواص مشتق

8.3 Definition and Properties of the Derivative

Functions: f, g, y, u, v توابع
Independent variable: x متغیر مستقل
Real constant: k ثابت حقیقی
Angle: α زاویه

764. $y'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{dy}{dx}$



شکل ۱۷۵ **Figure 175.**

765. $\frac{dy}{dx} = \tan\alpha$

766. $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

767. $\frac{d(u-v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

768. $\frac{d(ku)}{dx} = k\frac{du}{dx}$

769. Product Rule قاعده ضرب

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}$$

770. Quotient Rule قاعده تقسیم

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\frac{du}{dx}\cdot v-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

771. Chain Rule قاعده مرکب (زنجیروار)

$y=f(g(x)),\ u=g(x),$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

772. Derivative of Inverse Function مشتق تابع وارون

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

که در آن $x(y)$ وارون تابع $y(x)$ است.

where $x(y)$ is the inverse function of $y(x)$.

773. Reciprocal Rule قاعده معکوس

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right)=-\frac{\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

774. Logarithmic Differentiation مشتق گیری لگاریتمی

$y=f(x),\ \ln y=\ln f(x),$

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot\frac{d}{dx}[\ln f(x)].$$

8.4 Table of Derivatives جدول مشتقات

Independent variable: x متغیر مستقل
Real constants: C, a, b, c ثوابت حقیقی
Natural number: n عدد طبیعی

775. $\frac{d}{dx}(C)=0$

776. $\frac{d}{dx}(x)=1$

777. $\frac{d}{dx}(ax+b)=a$

778. $\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)=ax+b$

779. $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$

780. $\frac{d}{dx}(x^{-n})=-\frac{n}{x^{n+1}}$

781. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$

782. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

783. $\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x})=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

784. $\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$

785. $\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}$, $a>0$, $a\neq 1$.

786. $\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \ln a\,,\ a > 0\,,\ a \neq 1.$

787. $\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$

788. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

789. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

790. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

791. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

792. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \cdot \sec x$

793. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \cdot \csc x$

794. $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

795. $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

796. $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

797. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

798. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

799. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

800. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

801. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

802. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$

803. $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x$

804. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$

805. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x$

806. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

807. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

808. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arctanh} x) = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$.

809. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccoth} x) = -\frac{1}{x^2-1}$, $|x| > 1$.

810. $\frac{d}{dx}\left(u^v\right) = vu^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \ln u \cdot \frac{dv}{dx}$

8.5 Higher Order Derivatives مشتقهای مرتبه بالاتر

Functions: f, y, u, v توابع
Independent variable: x متغیر مستقل
Natural number: n عدد طبیعی

811. Second derivative مشتق دوم

$$f'' = (f')' = \left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

812. Higher-Order derivative مشتق مرتبه بالاتر

$$f^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

813. $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$

814. $(u-v)^{(n)} = u^{(n)} - v^{(n)}$

815. Leibnitz's Formulas روابط لایبنیتز

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}$$

816. $(x^m)^{(n)} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$

817. $(x^n)^{(n)} = n!$

818. $(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$

819. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

820. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$

821. $(e^x)^{(n)} = e^x$

822. $(a^{mx})^{(n)} = m^n a^{mx} \ln^n a$

823. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

824. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

8.6 Applications of Derivative کاربردهای مشتق

Functions: f, g, y توابع
Position of an object: s موقعیت یک شیء
Velocity: v سرعت
Acceleration: w شتاب
Independent variable: x متغیر مستقل
Time: t زمان
Natural number: n عدد طبیعی

سرعت و شتاب

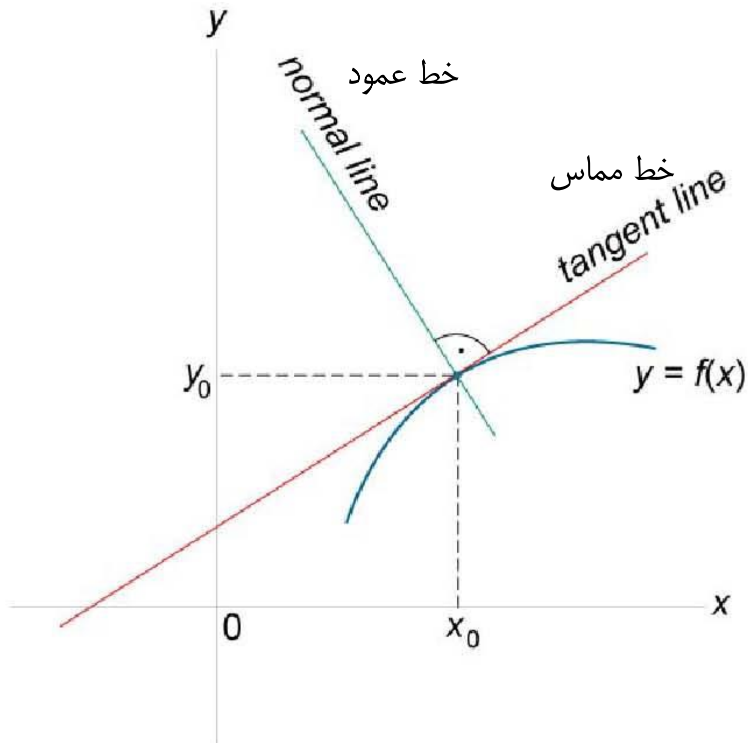
825. Velocity and Acceleration

$s=f(t)$ is the position of an object relative to a fixed coordinate system at a time t,
$v=s'=f'(t)$ is the instantaneous velocity of the object,
$w=v'=s''=f''(t)$ is the instantaneous acceleration of the object.

s=f(t) موقعیت یک شیء نسبت به یک دستگاه مختصات ثابت در زمان t است،
v=s'=f'(t) سرعت لحظه ای شیء است،
w=v'=s''=f''(t) شتاب لحظه ای شیء است.

826. Tangent Line خط مماس

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$



شکل ۱۷۶ **Figure 176.**

827. Normal Line خط عمود (نرمال)

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ (Fig 176)}$$

828. Increasing and Decreasing Functions. توابع افزاینده و کاهنده

If $f'(x_0) > 0$, then f(x) is increasing at x_0. (Fig 177, $x < x_1$, $x_2 < x$),

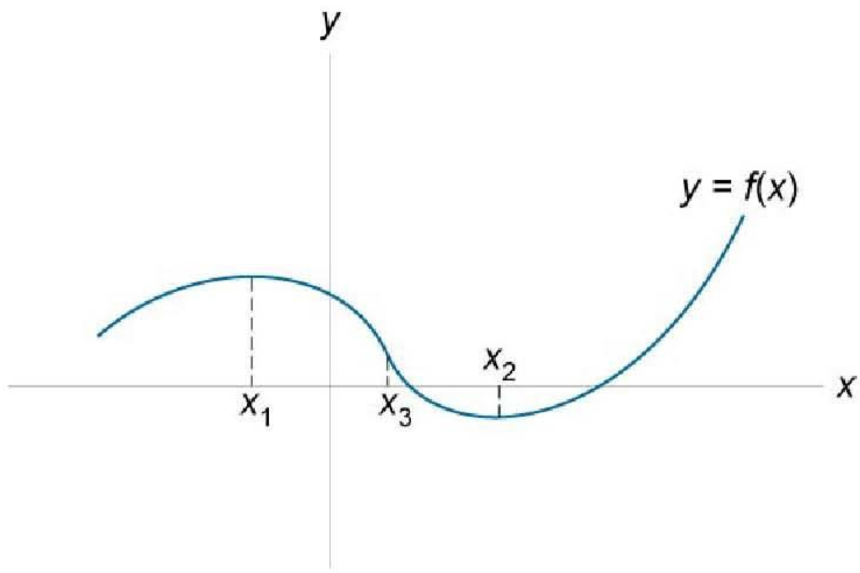
اگر $f'(x_0)>0$، آنگاه f(x) در x_0 افزاینده است (شکل ۱۷۷، $x<x_1$، $x_2<x$).

If $f'(x_0) < 0$, then f(x) is decreasing at x_0. (Fig 177, $x_1 < x < x_2$),

اگر $f'(x_0)<0$، آنگاه f(x) در x_0 کاهنده است (شکل ۱۷۷، $x_1<x<x_2$).

If $f'(x_0)$ does not exist or is zero, then the test fails.

اگر $f'(x_0)$ وجود نداشته باشد یا صفر باشد، آنگاه این آزمون با شکست مواجه می شود.



شکل ۱۷۷ **Figure 177.**

فرینه های موضعی

829. Local extrema

A function f(x) has a local maximum at x_1 if and only if there exists some interval containing x_1 such that $f(x_1) \geq f(x)$ for all x in the interval (Fig.177).

تابع f(x) در x_1 بیشینه موضعی است، اگر و تنها اگر بازه ای شامل x_1 وجود داشته باشد به گونه ای که برای تمامی x ها در آن بازه، $f(x_1)>=f(x)$ باشد (شکل ۱۷۷).

A function f(x) has a local minimum at x_2 if and only if there exists some interval containing x_2 such that $f(x_2) \leq f(x)$ for all x in the interval (Fig.177).

تابع f(x) در x_2 کمینه موضعی است، اگر و تنها اگر بازه ای شامل x_2 وجود داشته باشد به گونه ای که برای تمامی x ها در آن بازه، $f(x_2)<=f(x)$ باشد (شکل ۱۷۷).

830. Critical Points نقاط بحرانی

A critical point on f(x) occurs at x_0 if and only if either $f'(x_0)$ is zero or the derivative doesn't exist.

نقطه بحرانی بر f(x) در x_0 رخ می دهد، اگر و تنها $f'(x_0)$ صفر باشد یا مشتق وجود نداشته باشد.

831. First Derivative Test for Local Extrema. آزمون مشتق اول برای فرینه های موضعی

If f(x) is increasing ($f'(x)>0$) for all x in some interval $(a,x_1]$ and f(x) is decreasing ($f'(x)<0$) for all x in some interval $[x_1,b)$, then f(x) has a local maximum at x_1 (Fig.177).

اگر f(x) برای تمام x ها در بازه $(a,x_1]$ افزاینده باشد ($f'(x)>0$) و f(x) برای تمام x ها در بازه $[x_1,b)$ کاهنده باشد ($f'(x)<0$)، آنگاه f(x) یک بیشینه موضعی در x_1 دارد (شکل ۱۷۷).

اگر f(x) برای تمام x ها در بازه $[a,x_2]$ کاهنده باشد $(f'(x)<0)$ و f(x) برای تمام x ها در بازه $[x_2,b)$ افزاینده باشد $(f'(x)>0)$، آنگاه f(x) یک کمینه موضعی در x_2 دارد (شکل ۱۷۷).

832. If f(x) is decreasing $(f'(x)<0)$ for all x in some interval $(a,x_2]$ and f(x) is increasing $(f'(x)>0)$ for all x in some interval $[x_2,b)$, then f(x) has a local minimum at x_2. (Fig.177).

آزمون مشتق دوم برای فرینه های موضعی

833. Second Derivative Test for Local Extrema.
If $f'(x_1)=0$ and $f''(x_1)<0$, then f(x) has a local maximum at x_1.
اگر $f'(x_1)=0$ باشد و $f''(x_1)<0$، آنگاه f(x) بیشینه موضعی در x_1 دارد.
If $f'(x_2)=0$ and $f''(x_2)>0$, then f(x) has a local minimum at x_2. (Fig.177)
اگر $f'(x_2)=0$ باشد و $f''(x_2)>0$، آنگاه f(x) کمینه موضعی در x_2 دارد. (شکل ۱۷۷)

تقعر

834. Concavity.
f(x) در x_0 تقعر به سمت بالا دارد اگر و تنها اگر f'(x) در x_0 افزاینده باشد (شکل ۱۷۷، $x_3<x$).
f(x) is concave upward at x_0 if and only if $f'(x)$ is increasing at x_0 (Fig.177, $x_3<x$).
f(x) is concave downward at x_0 if and only if $f'(x)$ is decreasing at x_0. (Fig.177, $x<x_3$).
f(x) در x_0 تقعر به سمت پایین دارد اگر و تنها اگر f'(x) در x_0 کاهنده باشد (شکل ۱۷۷، $x<x_3$).

آزمون مشتق دوم برای تقعر

835. Second Derivative Test for Concavity.
If $f''(x_0)>0$, then f(x) is concave upward at x_0.
If $f''(x_0)<0$, then f(x) is concave downward at x_0.
If $f''(x)$ does not exist or is zero, then the test fails.

اگر $f''(x_0)>0$ باشد، آنگاه f(x) در x_0 به سمت بالا تقعر دارد.
اگر $f''(x_0)<0$ باشد، آنگاه f(x) در x_0 به سمت پایین تقعر دارد.
اگر $f''(x_0)$ صفر بوده و یا وجود نداشته باشد، آنگاه آزمون با شکست مواجه می شود.

836. Inflection Points نقاط عطف
If $f'(x_3)$ exists and $f''(x)$ changes sign at $x=x_3$, then the point $(x_3,f(x_3))$ is an inflection point of the graph of f(x). If $f''(x_3)$ exists at the inflection point, then $f''(x_3)=0$ (Fig.177).

اگر $f'(x_3)$ وجود داشته باشد و $f''(x)$ در $x=x_3$ تغییر علامت دهد، آنگاه نقطه $(x_3,f(x_3))$ یک نقطه عطف نمودار f(x) می باشد. اگر $f''(x_3)$ در نقطه عطف وجود داشته باشد، آنگاه $f''(x_3)=0$ است.

قاعده هوپیتال

837. L'Hopital's Rule

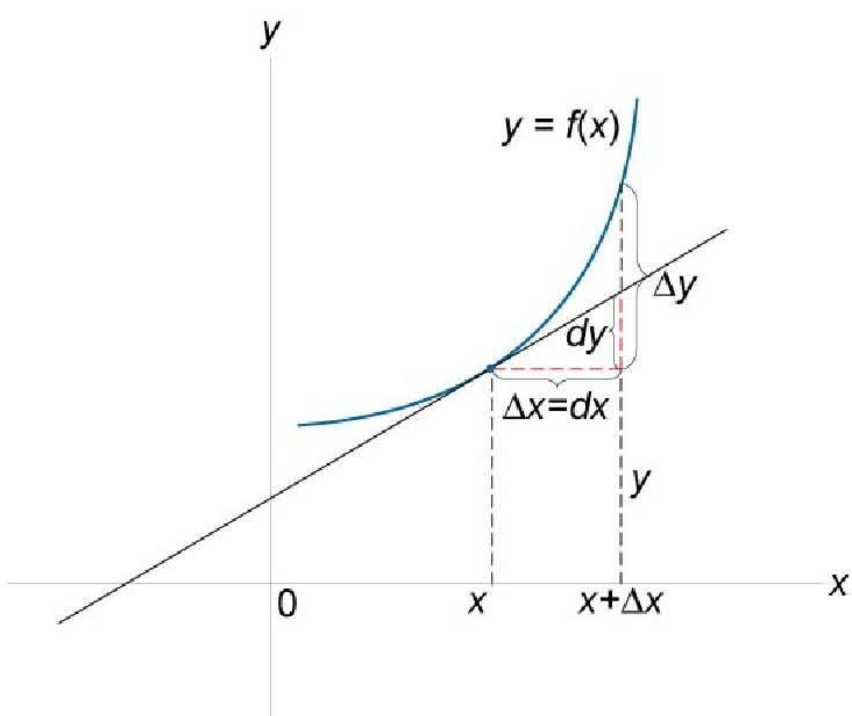
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ if (اگر) } \lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}.$$

8.7 Differential دیفرانسیل

Functions: f, u, v توابع
Independent variable: x متغیر مستقل
Derivative of a function: $y'(x)$, $f'(x)$ مشتق تابع
Real constant: C ثابت حقیقی
Differential of function $y = f(x)$: dy دیفرانسیل تابع
Differential of x: dx دیفرانسیل x
Small change in x: Δx تغییر اندک در x
Small change in y: Δy تغییر اندک در y

838. $dy = y'dx$

839. $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$



شکل ۱۷۸ **Figure 178.**

840. Small Change in y تغییر اندک در y
$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

841. $d(u+v) = du + dv$

842. $d(u-v) = du - dv$

843. $d(Cu) = Cdu$

844. $d(uv) = vdu + udv$

845. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

8.8 Multivariable Functions توابع چند متغیره

توابع دو متغیره Functions of two variables: $z(x,y)$, $f(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$
متغیرهای مستقل Arguments: x, y, t
Small changes in x, y, z, respectively: Δx, Δy, Δz.
تغییرات اندک در x، y، z، به ترتیب

846. First Order Partial Derivatives مشتقهای جزیی مرتبه اول
The partial derivative with respect to x مشتق جزیی نسبت به x
$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ (همچنین also $\frac{\partial z}{\partial x} = z_x$),
The partial derivative with respect to y مشتق جزیی نسبت به y
$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ (همچنین also $\frac{\partial z}{\partial y} = z_y$).

847. Second Order Partial Derivatives مشتقهای جزیی مرتبه دوم

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{yx}.$$

If the derivatives are continuous, then اگر مشتقها پیوسته باشند، آنگاه

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$

قواعد مرکب (زنجیره ای)

848. Chain Rules (g تابعی از یک متغیر h است)، آنگاه

اگر If $f(x,y)=g(h(x,y))$ (g is a function of one variable h), then

$$\frac{\partial f}{\partial x}=g'(h(x,y))\frac{\partial h}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=g'(h(x,y))\frac{\partial h}{\partial y}.$$

اگر آنگاه

If $h(t)=f(x(t),y(t))$, then $h'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

اگر آنگاه

If $z=f(x(u,v),y(u,v))$, then

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

849. Small Changes تغییرات اندک

$$\Delta z\approx\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

بیشینه ها و کمینه های موضعی

850. Local Maxima and Minima

f(x,y) در (x_0,y_0) دارای بیشینه موضعی است اگر برای تمامی (x,y) های به اندازه کافی نزدیک به (x_0,y_0)، $f(x,y)<=f(x_0,y_0)$ باشد.

$f(x,y)$ has a local maximum at (x_0,y_0) if $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ for all (x,y) sufficiently close to (x_0,y_0).

f(x,y) در (x_0,y_0) دارای کمینه موضعی است اگر برای تمامی (x,y) های به اندازه کافی نزدیک به (x_0,y_0)، $f(x,y)>=f(x_0,y_0)$ باشد.

$f(x,y)$ has a local minimum at (x_0,y_0) if $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$ for all (x,y) sufficiently close to (x_0,y_0).

نقاط ساکن

851. Stationary Points

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

بیشینه ها و کمینه های موضعی در نقاط ساکن رخ می دهند.

Local maxima and local minima occur at stationary points.

نقاط زین اسبی

852. Saddle Point

نقطه ساکنی است که نه بیشینه موضعی و نه کمینه موضعی باشد.

A stationary point which is neither a local maximum nor a local minimum

آزمون مشتق دوم برای نقاط ساکن

853. Second Derivative Test for Stationary Points

Let (x_0,y_0) be a stationary point ($\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$). فرض کنید (x_0,y_0) نقطه ساکن باشد.

$$D=\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}.$$

اگر If $D>0$, $f_{xx}(x_0,y_0)>0$, (x_0,y_0) is a point of local minima. نقطه کمینه موضعی است.

اگر If $D>0$, $f_{xx}(x_0,y_0)<0$, (x_0,y_0) is a point of local maxima. نقطه بیشینه موضعی است.

اگر If $D<0$, (x_0,y_0) is a saddle point. نقطه زین اسبی است.

اگر If $D=0$, the test fails. آزمون با شکست مواجه می شود.

854. Tangent Plane صفحه مماس

The equation of the tangent plane to the surface $z=f(x,y)$ at (x_0,y_0,z_0) is

معادله صفحه مماس بر سطح (رویه) $z=f(x,y)$ در (x_0,y_0,z_0) عبارت است از

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

عمود بر سطح

855. Normal to Surface

The equation of the normal to the surface $z=f(x,y)$ at (x_0,y_0,z_0) is معادله خط عمود بر سطح (رویه) z=f(x,y) در (x_0,y_0,z_0) عبارت است از

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

8.9 Differential Operators عملگرهای دیفرانسیل

بردارهای واحد در راستای محورهای مختصات

Unit vectors along the coordinate axes: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

توابع اسکالر (میادین اسکالر) Scalar functions (scalar fields): $f(x,y,z)$, $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

Gradient of a scalar field: $\text{grad}\, u$, ∇u گرادیان یک میدان اسکالر

Directional derivative: $\frac{\partial f}{\partial l}$ مشتق جهتی

Vector function (vector field): $\vec{F}(P,Q,R)$ تابع برداری (میدان برداری)

Divergence of a vector field: $\text{div}\,\vec{F}$, $\nabla\cdot\vec{F}$ دیورژانس میدان برداری

Curl of a vector field: $\text{curl}\,\vec{F}$, $\nabla\times\vec{F}$ کِرل میدان برداری

Laplacian operator: ∇^2 عملگر لاپلاس

856. Gradient of a Scalar Function گرادیان تابع اسکالر

$$\text{grad}\, f=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$\text{grad}\, u=\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

857. Directional Derivative مشتق جهتی

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

که در آن جهت با این بردار تعریف می شود.
where the direction is defined by the vector
$\vec{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

858. Divergence of a Vector Field دیورژانس میدان برداری

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

859. Curl of a Vector Field کِرل میدان برداری

$$\operatorname{curl} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

860. Laplacian Operator عملگر لاپلاس

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

861. $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \equiv 0$

862. $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla f) \equiv 0$

863. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$

864. $\operatorname{curl}(\operatorname{curl} \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$

فصل ۹ Chapter 9

حساب انتگرال Integral Calculus

Functions: f, g, u, v توابع

Independent variables: x, t, ξ متغیرهای مستقل

Indefinite integral of a function: $\int f(x)dx$, $\int g(x)dx$, … انتگرال نامعین تابع

Derivative of a function: $y'(x)$, $f'(x)$, $F'(x)$, … مشتق تابع

Real constants: C, a, b, c, d, k ثوابت حقیقی

Natural numbers: m, n, i, j اعداد طبیعی

9.1 Indefinite Integral انتگرال نامعین

865. $\int f(x)dx = F(x) + C$ if $F'(x) = f(x)$.

866. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

867. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

868. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

869. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

870. $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$

871. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

872. $\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x)+C$

873. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$

874. Method of Substitution روش جایگذاری
$\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt$ if $x = u(t)$.

875. Integration by Parts انتگرال گیری جزء به جزء
$\int u dv = uv - \int v du$,
که در آن where $u(x)$, $v(x)$ are differentiable functions. توابع مشتق پذیراند.

9.2 Integrals of Rational Functions انتگرالهای توابع گویا

876. $\int a dx = ax + C$

877. $\int x dx = \frac{x^2}{2}+C$

878. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}+C$

879. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}+C$, $p \neq -1$.

880. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C,\ n \neq -1.$

881. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

882. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

883. $\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + C$

884. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C,\ a \neq b.$

885. $\int \frac{xdx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}(a+bx-a\ln|a+bx|) + C$

886. $\int \frac{x^2dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln|a+bx|\right] + C$

887. $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$

888. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$

889. $\int \frac{xdx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bx| + \frac{a}{a+bx}\right) + C$

890. $$\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bx-2a\ln|a+bx| - \frac{a^2}{a+bx} \right) + C$$

891. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} + \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$$

892. $$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

893. $$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

894. $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

895. $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

896. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + C$$

897. $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

898. $$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + C$$

899. $$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(x\sqrt{\frac{b}{a}} \right) + C\,,\ ab>0\,.$$

900. $$\int \frac{xdx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln\left|x^2+\frac{a}{b}\right|+C$$

901. $$\int \frac{dx}{x\left(a+bx^2\right)} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x^2}{a+bx^2}\right|+C$$

902. $$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right|+C$$

903. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C,$$
$b^2-4ac>0$.

904. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C,$$
$b^2-4ac<0$.

9.3 Integrals of Irrational Functions انتگرالهای توابع ناگویا

905. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+C$$

906. $$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2}+C$$

907. $$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}+C$$

908. $\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}(ax+b)^{3/2}+C$

909. $\int \frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b-ac}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}\right|+C,$
$b-ac>0.$

910. $\int \frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{ac-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}}+C,$
$b-ac<0.$

911. $\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\,dx = \frac{1}{c}\sqrt{(ax+b)(cx+d)}-$
$-\frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}}\ln\left|\sqrt{a(cx+d)}+\sqrt{c(ax+b)}\right|+C,\ a>0.$

912. $\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\,dx = \frac{1}{c}\sqrt{(ax+b)(cx+d)}-$
$-\frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}}\arctan\sqrt{\frac{a(cx+d)}{c(ax+b)}}+C,\ (a<0,\ c>0).$

913. $\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)}{105b^3}\sqrt{(a+bx)^3}+C$

914. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx}+C$

915. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right|+C,\ a>0.$

916. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan\left|\frac{a+bx}{-a}\right| + C$, $a<0$.

917. $\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C$

918. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C$

919. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$

920. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-a)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$

921. $\int \sqrt{a+bx-cx^2}\,dx = \frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2} +$

$$+\frac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C$$

922. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| + C$,
$a>0$.

923. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin\frac{2ax+b}{4a}\sqrt{b^2-4ac} + C$, $a<0$.

924. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

925. $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{3}\left(x^2+a^2\right)^{3/2}+C$

926. $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{8}\left(2x^2+a^2\right)\sqrt{x^2+a^2}-$

$-\frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$

927. $\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$

928. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$

929. $\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx=\sqrt{x^2+a^2}+a\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right|+C$

930. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}+C$

931. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$

932. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right|+C$

933. $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

934. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{3}\left(x^2-a^2\right)^{3/2}+C$

935. $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2-a^2} + a\arcsin\frac{a}{x} + C$$

936. $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

937. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

938. $$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + C$$

939. $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

940. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x} + C$$

941. $$\int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} + C$$

942. $$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} + C$$

943. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$$

944. $$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$$

945. $$\int (x^2-a^2)^{3/2}dx = -\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \\ +\frac{3a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

946. $$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

947. $$\int x\sqrt{a^2-x^2}dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2} + C$$

948. $$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

949. $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2-x^2} + a\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right| + C$$

950. $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C$$

951. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

952. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin\frac{x}{a} + C$$

953. $$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C$$

954. $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

955. $\int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} + C$

956. $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C$

957. $\int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \arcsin \frac{bx+a^2}{a(x+b)} + C$, $b > a$.

958. $\int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln\left|\frac{x+b}{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-x^2}+a^2+bx}\right| + C,$
$b < a$.

959. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

960. $\int (a^2-x^2)^{3/2} dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} + C$

961. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$

انتگرالهای توابع مثلثاتی

9.4 Integrals of Trigonometric Functions

962. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

963. $\int \cos x dx = \sin x + C$

964. $\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

965. $\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

966. $\int \sin^3 x\, dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C$

967. $\int \cos^3 x\, dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C$

968. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \csc x\, dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

969. $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x\, dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

970. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

971. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

972. $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \csc^3 x\, dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

973. $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \sec^3 x\, dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

974. $\int \sin x \cos x\, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$

975. $\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

976. $\int \sin x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$

977. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C$

978. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

979. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C = \sec x + C$

980. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C$

981. $\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + C$

982. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

983. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + C = -\csc x + C$

984. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + \cos x + C$

985. $\int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x + C$

986. $\int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \ln|\tan x| + C$

987. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{\sin x} + \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

988. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

989. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \tan x - \cot x + C$

990. $\int \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C,$
$m^2 \neq n^2.$

991. $\int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C,$
$m^2 \neq n^2.$

992. $\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C,$
$m^2 \neq n^2.$

993. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

994. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

995. $\int \sin x \cos^n x \, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$

996. $\int \sin^n x \cos x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$

997. $\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

998. $\int \arccos x\, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

999. $\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$

1000. $\int \operatorname{arc}\cot x\, dx = x \operatorname{arc}\cot x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$

9.5 Integrals of Hyperbolic Functions انتگرالهای توابع هایپربولیک

1001. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$

1002. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$

1003. $\int \tanh x\, dx = \ln\cosh x + C$

1004. $\int \coth x\, dx = \ln\left|\sinh x\right| + C$

1005. $\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C$

1006. $\int \operatorname{csch}^2 x dx = -\coth x + C$

1007. $\int \operatorname{sech} x \tanh x dx = -\operatorname{sech} x + C$

1008. $\int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x + C$

انتگرالهای توابع نمایی و لگاریتمی

9.6 Integrals of Exponential and Logarithmic Functions

1009. $\int e^x \, dx = e^x + C$

1010. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

1011. $\int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$

1012. $\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$

1013. $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$

1014. $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| + C$

1015. $\int x^n \ln x \, dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C$

1016. $\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$

1017. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \dfrac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C$

9.7 Reduction Formulas روابط کاهنده

1018. $\int x^n e^{mx}dx = \dfrac{1}{m}x^n e^{mx} - \dfrac{n}{m}\int x^{n-1}e^{mx}dx$

1019. $\int \dfrac{e^{mx}}{x^n}dx = -\dfrac{e^{mx}}{(n-1)x^{n-1}} + \dfrac{m}{n-1}\int \dfrac{e^{mx}}{x^{n-1}}dx,\ n\neq 1.$

1020. $\int \sinh^n x\,dx = \dfrac{1}{n}\sinh^{n-1}x\cosh x - \dfrac{n-1}{n}\int \sinh^{n-2}x\,dx$

1021. $\int \dfrac{dx}{\sinh^n x} = -\dfrac{\cosh x}{(n-1)\sinh^{n-1}x} - \dfrac{n-2}{n-1}\int \dfrac{dx}{\sinh^{n-2}x},\ n\neq 1.$

1022. $\int \cosh^n x\,dx = \dfrac{1}{n}\sinh x\cosh^{n-1}x\cosh x + \dfrac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2}x\,dx$

1023. $\int \dfrac{dx}{\cosh^n x} = -\dfrac{\sinh x}{(n-1)\cosh^{n-1}x} + \dfrac{n-2}{n-1}\int \dfrac{dx}{\cosh^{n-2}x},\ n\neq 1.$

1024. $\int \sinh^n x\cosh^m x\,dx = \dfrac{\sinh^{n+1}x\cosh^{m-1}x}{n+m}$

$+\dfrac{m-1}{n+m}\int \sinh^n x\cosh^{m-2}x\,dx$

1025. $\int \sinh^n x\cosh^m x\,dx = \dfrac{\sinh^{n-1}x\cosh^{m+1}x}{n+m}$

$$-\frac{n-1}{n+m}\int \sinh^{n-2} x \cosh^{m} x dx$$

1026. $\int \tanh^{n} x dx = -\frac{1}{n-1}\tanh^{n-1} x + \int \tanh^{n-2} x dx\,,\; n \neq 1\,.$

1027. $\int \coth^{n} x dx = -\frac{1}{n-1}\coth^{n-1} x + \int \coth^{n-2} x dx\,,\; n \neq 1\,.$

1028. $\int \operatorname{sech}^{n} x dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} x dx\,,\; n \neq 1\,.$

1029. $\int \sin^{n} x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$

1030. $\int \frac{dx}{\sin^{n} x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}\,,\; n \neq 1\,.$

1031. $\int \cos^{n} x dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$

1032. $\int \frac{dx}{\cos^{n} x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}\,,\; n \neq 1\,.$

1033. $\int \sin^{n} x \cos^{m} x dx = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n+m}$

$$+\frac{m-1}{n+m}\int \sin^{n} x \cos^{m-2} x dx$$

1034. $\int \sin^{n} x \cos^{m} x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m}$

$$+\frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2} x \cos^{m} x dx$$

1035. $\int \tan^{n} x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx,\ n \neq 1.$

1036. $\int \cot^{n} x dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx,\ n \neq 1.$

1037. $\int \sec^{n} x dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x dx,\ n \neq 1.$

1038. $\int \csc^{n} x dx = -\frac{\csc^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x dx,\ n \neq 1.$

1039. $\int x^{n} \ln^{m} x dx = \frac{x^{n+1} \ln^{m} x}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^{n} \ln^{m-1} x dx$

1040. $\int \frac{\ln^{m} x}{x^{n}} dx = -\frac{\ln^{m} x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{m}{n-1}\int \frac{\ln^{m-1} x}{x^{n}} dx,\ n \neq 1.$

1041. $\int \ln^{n} x dx = x \ln^{n} x - n\int \ln^{n-1} x dx$

1042. $\int x^{n} \sinh x dx = x^{n} \cosh x - n\int x^{n-1} \cosh x dx$

1043. $\int x^{n} \cosh x dx = x^{n} \sinh x - n\int x^{n-1} \sinh x dx$

1044. $\int x^{n} \sin x dx = -x^{n} \cos x + n\int x^{n-1} \cos x dx$

1045. $\int x^{n} \cos x dx = x^{n} \sin x - n\int x^{n-1} \sin x dx$

1046. $\int x^n \sin^{-1} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin^{-1} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

1047. $\int x^n \cos^{-1} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cos^{-1} x + \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

1048. $\int x^n \tan^{-1} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{1+x^2} dx$

1049. $\int \frac{x^n dx}{ax^n + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{ax^n + b}$

1050. $$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{-2ax - b}{(n-1)(b^2 - 4ac)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(b^2 - 4ac)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}}, \; n \neq 1.$$

1051. $$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2 (x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}},$$
$n \neq 1.$

1052. $$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n} = -\frac{x}{2(n-1)a^2 (x^2 - a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n-1}}, \; n \neq 1.$$

9.8 Definite Integral انتگرال معین

انتگرال معین تابع Definite integral of a function: $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$, ...

مجموع ریمان Riemann sum: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

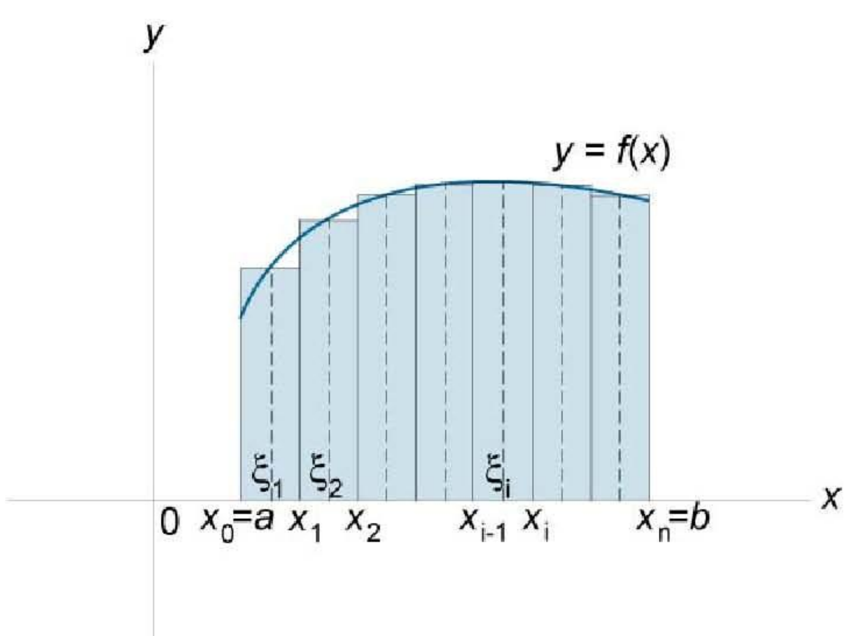
تغییرات کوچک Small changes: Δx_i

ضدمشتقها Antiderivatives: $F(x)$, $G(x)$

حدود انتگرال گیریها Limits of integrations: a, b, c, d

1053. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,

که در آن where $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$.



شکل ۱۷۹ **Figure 179.**

1054. $\int_a^b 1dx = b - a$

1055. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

1056. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

1057. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

1058. $\int_a^a f(x)dx = 0$

1059. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

1060. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ for $a < c < b$.

1061. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ if $f(x) \geq 0$ on $[a,b]$.

1062. $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ if $f(x) \leq 0$ on $[a,b]$.

1063. Fundamental Theorem of Calculus قضیه بنیادین حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ if } F'(x) = f(x).$$

1064. Method of Substitution روش جایگذاری

اگر If $x = g(t)$, then آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt,$$

که در آن where

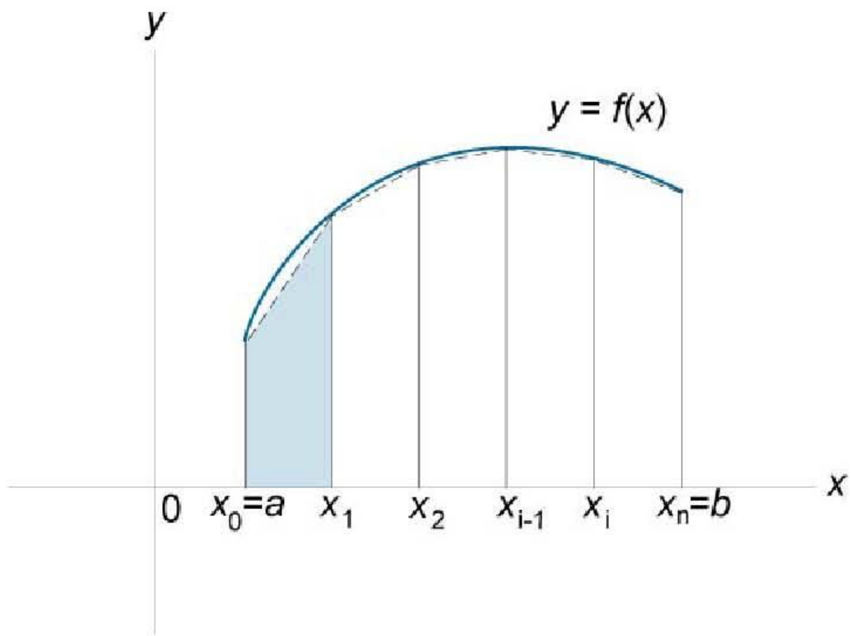
$$c = g^{-1}(a),\ d = g^{-1}(b).$$

1065. Integration by Parts انتگرال گیری جزء به جزء

$$\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

1066. Trapezoidal Rule قاعده ذوزنقه ای

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$



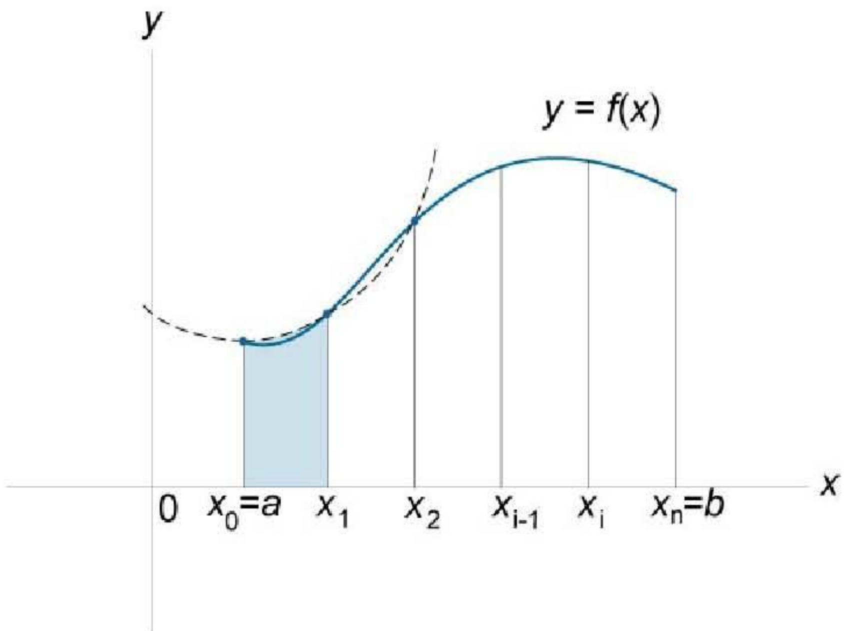
شکل ۱۸۰ **Figure 180.**

1067. Simpson's Rule قاعده سیمپسون

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\right.$$
$$\left.+2f(x_4)+\ldots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right],$$

where که در آن

$$x_i = a+\frac{b-a}{n}i,\ i=0,1,2,\ldots,n.$$

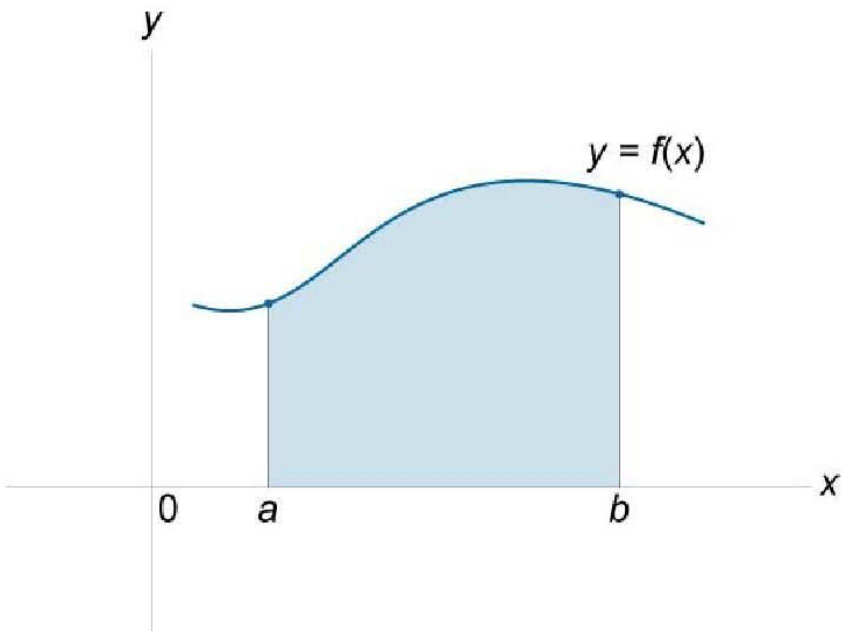


شکل ۱۸۱ **Figure 181.**

1068. Area Under a Curve مساحت زیر منحنی

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

که در آن where $F'(x) = f(x)$.

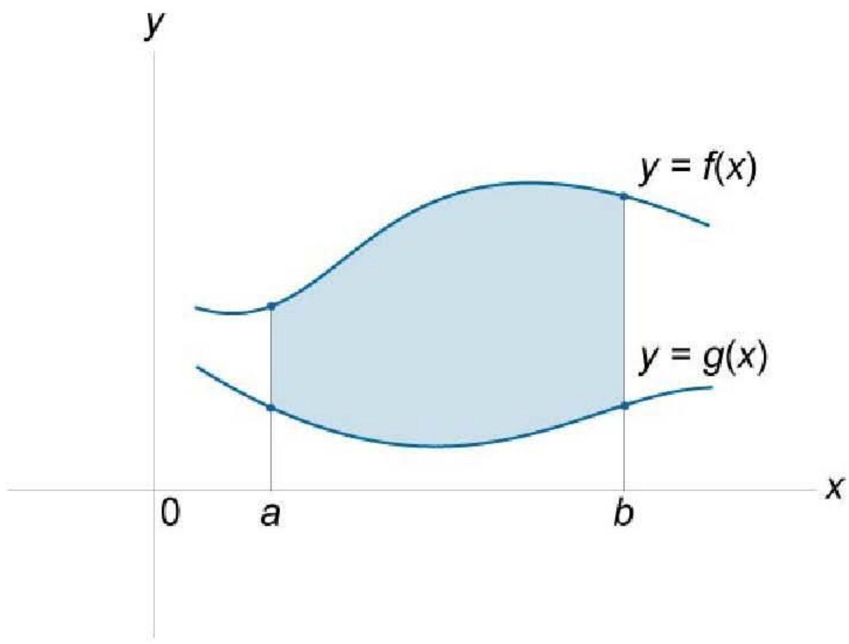


شکل ۱۸۲ **Figure 182.**

1069. Area Between Two Curves مساحت میان دو منحنی

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = F(b) - G(b) - F(a) + G(a),$$

که در آن where $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$.



شکل ۱۸۳ **Figure 183.**

9.9 Improper Integral انتگرال ناسره

انتگرال معین — انتگرال ناسره نامیده می شود اگر

1070. The definite integral $\int_a^b f(x)dx$ is called an improper integral

if

- a or b is infinite, a یا b بی نهایت باشند،
- $f(x)$ has one or more points of discontinuity in the interval $[a,b]$. f(x) یک یا چند نقطه ناپیوستگی در بازه [a,b] داشته باشد.

اگر f(x) تابع پیوسته ای در بازه

1071. If $f(x)$ is a continuous function on $[a,\infty)$, then باشد، آنگاه

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^n f(x)dx .$$

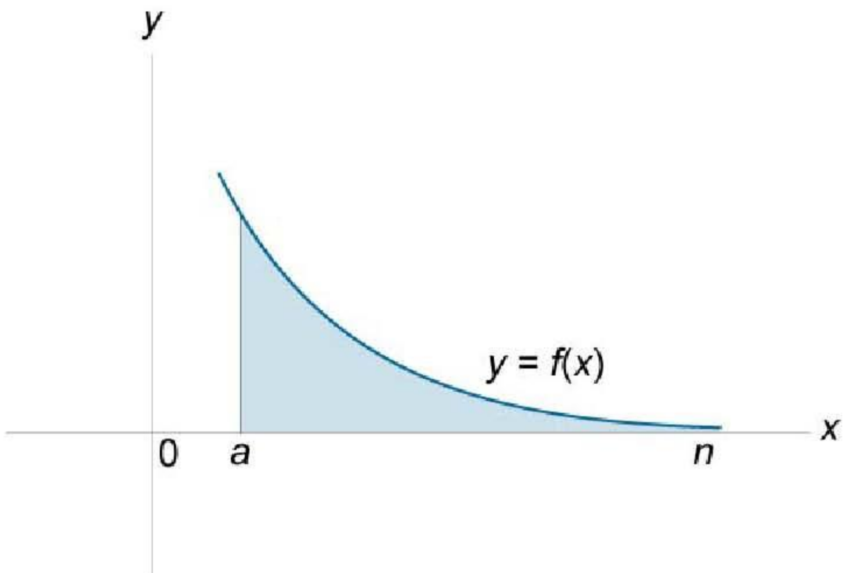


Figure 184. شکل ۱۸۴

اگر f(x) تابع پیوسته ای در بازه

1072. If $f(x)$ is a continuous function on $(-\infty, b]$, then باشد، آنگاه

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{n \to -\infty} \int_{n}^{b} f(x)dx.$$

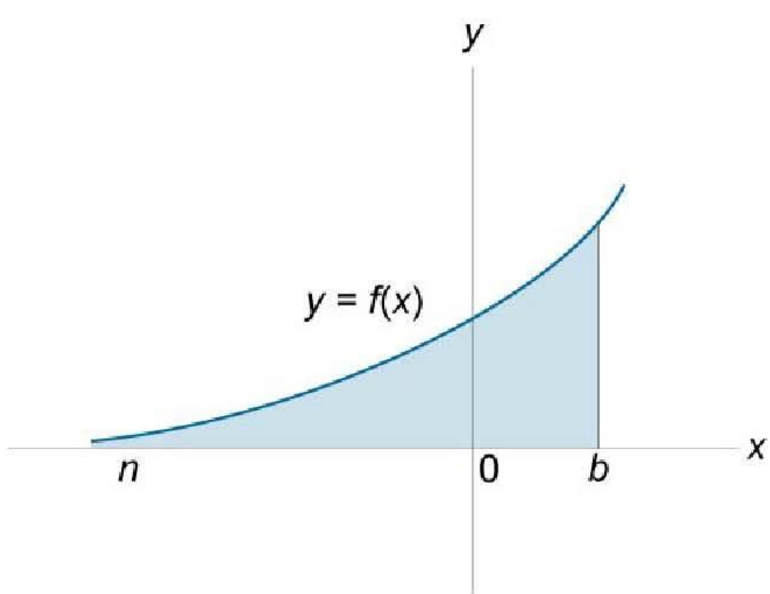
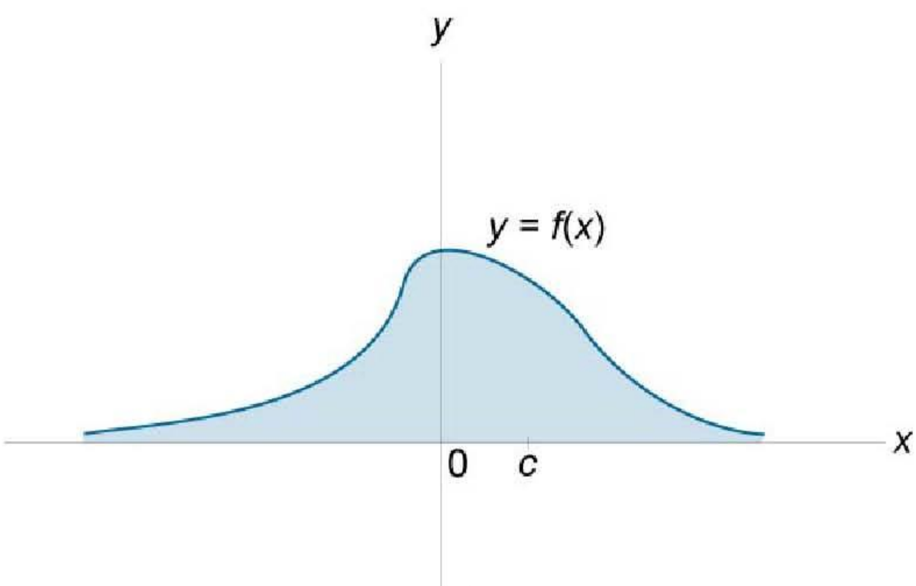


Figure 185. شکل ۱۸۵

Note : The improper integrals in 1071, 1072 are convergent if the limits exist and are finite; otherwise the integrals are divergent.

یادداشت: انتگرالهای ناسره در روابط ۱۰۷۱ و ۱۰۷۲ همگرا هستند اگر حدها وجود داشته و بی نهایت نباشند؛ در غیر این صورت انتگرالها واگرا می باشند.

1073. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$



شکل ۱۸۶

Figure 186.

اگر برای عدد حقیقی c، هر دو انتگرال در سمت راست همگرا باشند، آنگاه انتگرال مجموع نیز همگرا می باشد؛ در غیر این صورت واگرا می باشد.

If for some real number c, both of the integrals in the right side are convergent, then the integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ is also convergent; otherwise it is divergent.

1074. Comparison Theorems قضیه های مقایسه

Let $f(x)$ and $g(x)$ be continuous functions on the closed interval $[a,\infty)$. Suppose that $0 \le g(x) \le f(x)$ for all x in $[a,\infty)$.

f(x) و g(x) توابعی پیوسته بر روی بازه بسته $[a,\infty)$ می باشند. فرض کنید که برای تمامی x های در بازه $[a,\infty)$، شرط $0 \le g(x) \le f(x)$ برقرار باشد.

اگر همگرا باشد، آنگاه نیز همگراست.

- If $\int_a^\infty f(x)dx$ is convergent, then $\int_a^\infty g(x)dx$ is also convergent,

اگر واگرا باشد، آنگاه نیز واگراست.

- If $\int_a^\infty g(x)dx$ is divergent, then $\int_a^\infty f(x)dx$ is also divergent.

همگرایی مطلق

1075. Absolute Convergence

اگر همگرا باشد، آنگاه انتگرال همگرای مطلق است.

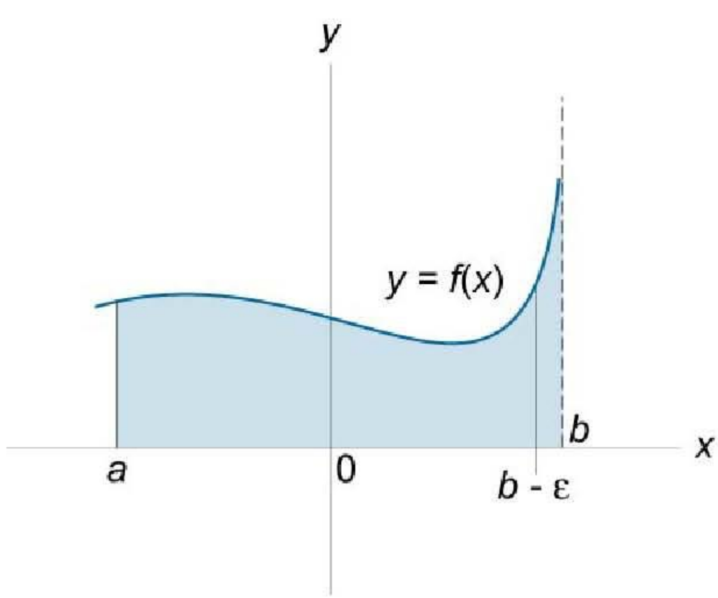
If $\int_a^\infty |f(x)|dx$ is convergent, then the integral $\int_a^\infty f(x)dx$ is absolutely convergent.

1076. Discontinuous Integrand تابع تحت انتگرال ناپیوسته

Let $f(x)$ be a function which is continuous on the interval $[a,b)$ but is discontinuous at $x=b$. Then

f(x) تابعی است که در بازه [a,b) پیوسته بوده ولی در x=b ناپیوسته است. آنگاه

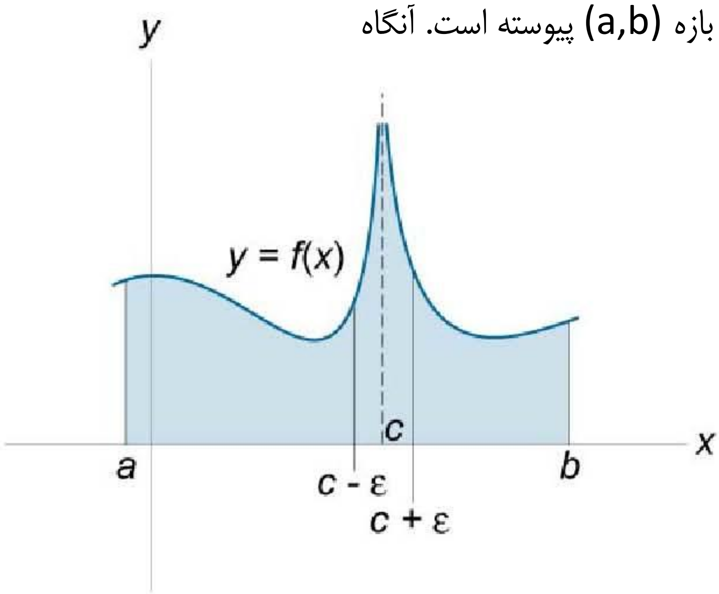
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$



شکل ۱۸۷ **Figure 187.**

1077. Let $f(x)$ be a continuous function for all real numbers x in the interval $[a,b]$ except for some point c in (a,b). Then $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0+} \int_{c+\delta}^b f(x)dx$.

f(x) تابعی است که برای همه اعداد حقیقی x در بازه [a,b] به جز نقطه c در بازه (a,b) پیوسته است. آنگاه



شکل ۱۸۸ **Figure 188.**

9.10 Double Integral انتگرال دوگانه

Functions of two variables: $f(x,y)$, $f(u,v)$, ... توابع دو متغیره

Double integrals: $\iint_R f(x,y)dxdy$, $\iint_R g(x,y)dxdy$, ... انتگرالهای دوگانه

Riemann sum: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(u_i,v_j)\Delta x_i \Delta y_j$ مجموع ریمان

Small changes: Δx_i, Δy_j تغییرات اندک

Regions of integration: R, S نواحی انتگرال گیری

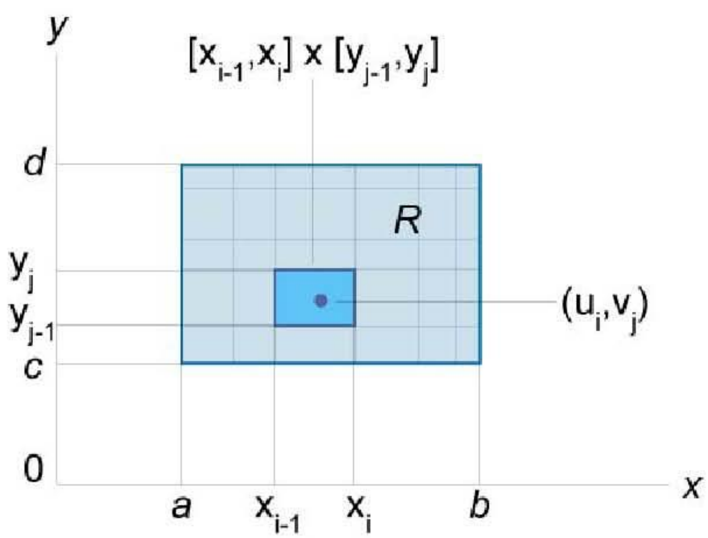
Polar coordinates: r, θ مختصات قطبی

Area: A مساحت
Surface area: S مساحت سطح (رویه)
Volume of a solid: V حجم جسم سه بعدی
Mass of a lamina: m جرم ورق
Density: $\rho(x,y)$ چگالی
First moments: M_x , M_y ممانهای (گشتاورهای) اول
Moments of inertia: I_x , I_y , I_0 ممانهای (گشتاورهای) اینرسی
Charge of a plate: Q بار ورق
Charge density: $\sigma(x,y)$ چگالی بار
Coordinates of center of mass: $\bar{x}$, $\bar{y}$ مختصات مرکز جرم
Average of a function: μ میانگین تابع

1078. Definition of Double Integral تعریف انتگرال دوگانه
The double integral over a rectangle $[a, b]\times[c, d]$ is defined to be انتگرال دوگانه بر روی مستطیل [a,b]*[c,d] به صورت زیر تعریف می شود

$$\iint\limits_{[a,\,b]\times[c,\,d]} f(x,y)dA = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(u_i,v_j)\Delta x_i \Delta y_j \,,$$

که در آن (u_i,v_j) نقطه ای در مستطیل است
where (u_i,v_j) is some point in the rectangle $(x_{i-1},x_i)\times(y_{j-1},y_j)$, and $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.



شکل ۱۸۹ **Figure 189.**

انتگرال دوگانه بر روی ناحیه کلی R به صورت زیر است

The double integral over a general region R is

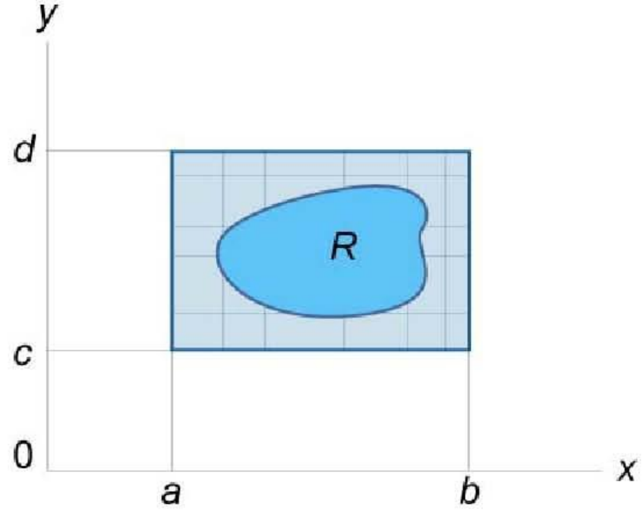
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{[a,\,b]\times[c,\,d]} g(x,y)\,dA\,,$$

که در آن مستطیل [a,b]*[c,d] شامل R است،

where rectangle $[a,\,b]\times[c,\,d]$ contains R,

$g(x,y)=f(x,y)$ if $f(x,y)$ is in R and $g(x,y)=0$ otherwise.

اگر f(x,y) درون R واقع باشد، g(x,y)=f(x,y) است و در غیر این صورت g(x,y)=0 می باشد.



شکل ۱۹۰ **Figure 190.**

1079. $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$

1080. $\iint_R [f(x,y)-g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA - \iint_R g(x,y)dA$

1081. $\iint_R kf(x,y)dA = k\iint_R f(x,y)dA\,,$

where k is a constant. که در آن k ثابت است.

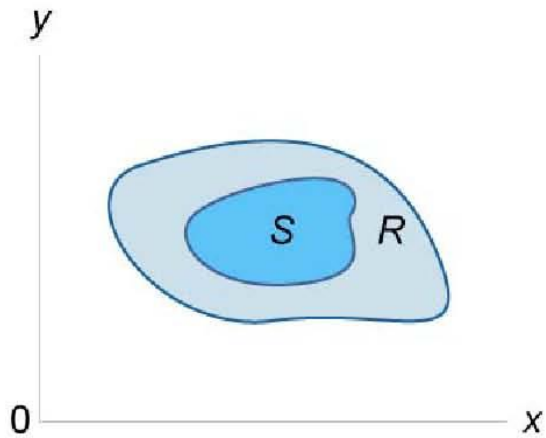
اگر بر روی R برقرار باشد، آنگاه

1082. If $f(x,y)\le g(x,y)$ on R, then $\iint_R f(x,y)dA \le \iint_R g(x,y)dA$.

اگر بر روی R برقرار باشد و آنگاه

1083. If $f(x,y)\ge 0$ on R and $S\subset R$, then

$$\iint\limits_{S} f(x,y)\,dA \le \iint\limits_{R} f(x,y)\,dA\,.$$



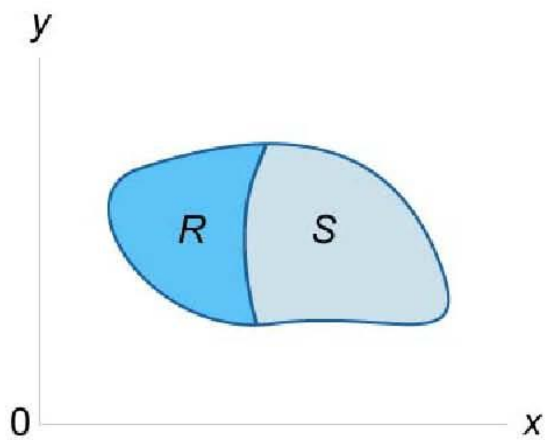
شکل ۱۹۱
Figure 191.

اگر بر روی R برقرار باشد و R و S نواحی غیر همپوشانی باشند، آنگاه

1084. If $f(x,y)\ge 0$ on R and R and S are non-overlapping regions, then $\iint\limits_{R\cup S} f(x,y)\,dA = \iint\limits_{R} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{S} f(x,y)\,dA$.

Here $R\cup S$ is the union of the regions R and S.

در اینجا اجتماع نواحی R و S است.



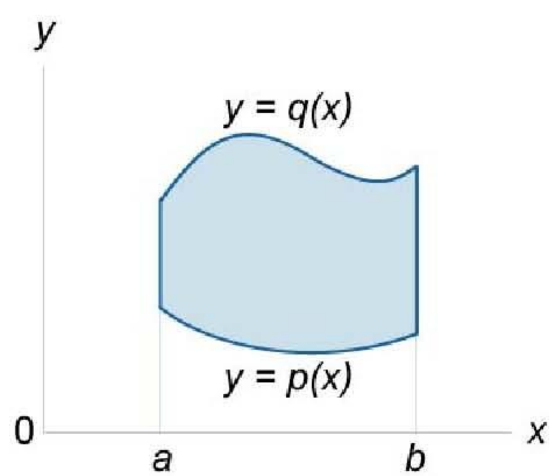
شکل ۱۹۲ **Figure 192.**

1085. Iterated Integrals and Fubini's Theorem انتگرالهای مکرر و قضیه فوبینی

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dydx$$

for a region of type I, برای ناحیه نوع یک

$R = \{(x,y) | a \le x \le b, p(x) \le y \le q(x)\}.$

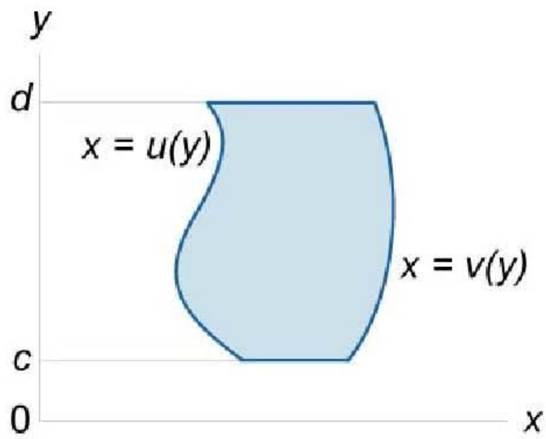


شکل ۱۹۳ **Figure 193.**

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy$$

for a region of type II, برای ناحیه نوع دو

$R = \{(x,y) | u(y) \le x \le v(y), c \le y \le d\}.$



شکل ۱۹۴ **Figure 194.**

انتگرالهای دوگانه بر روی نواحی مستطیلی

1086. Double Integrals over Rectangular Regions

اگر R ناحیه مستطیلی [a,b]*[c,d] باشد، آنگاه

If R is the rectangular region $[a,b]\times[c,d]$, then

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy\,.$$

در حالت خاصی که تابع تحت انتگرال f(x,y) را بتوان به صورت g(x)h(y) نوشت، خواهیم داشت

In the special case where the integrand $f(x,y)$ can be written as $g(x)h(y)$ we have

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy=\iint\limits_R g(x)h(y)dxdy=\left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right).$$

1087. Change of Variables تغییر متغیرها

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy=\iint\limits_S f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv\,,$$

که در آن ژاکوبین تبدیلات

where $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$ is the jacobian of the transformations $(x,y)\to(u,v)$, and S is the pullback of R which

است، و S تبدیل یافته ناحیه R است که

که می تواند با روابط x=x(u,v) و y=y(u,v) به تعریف R، محاسبه شود.
can be computed by $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ into the definition of R.

1088. Polar Coordinates مختصات قطبی
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

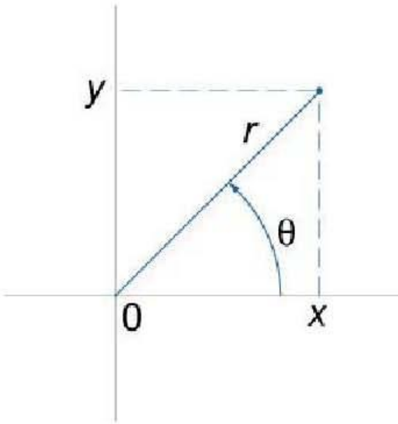


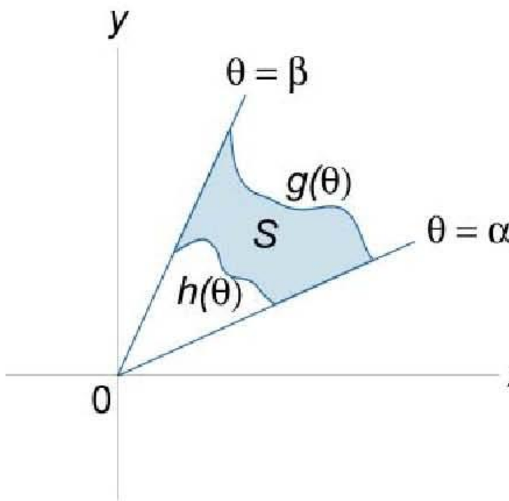
Figure 195.

1089. Double Integrals in Polar Coordinates انتگرالهای دوگانه در مختصات قطبی
دیفرانسیل dxdy برای مختصات قطبی برابر است با
The Differential dxdy for Polar Coordinates is

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta = rdrd\theta .$$

اگر ناحیه R به صورت زیر تعیین شود:
Let the region R is determined as follows:
$0 \le g(\theta) \le r \le h(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, where $\beta - \alpha \le 2\pi$.
Then آنگاه

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdrd\theta .$$



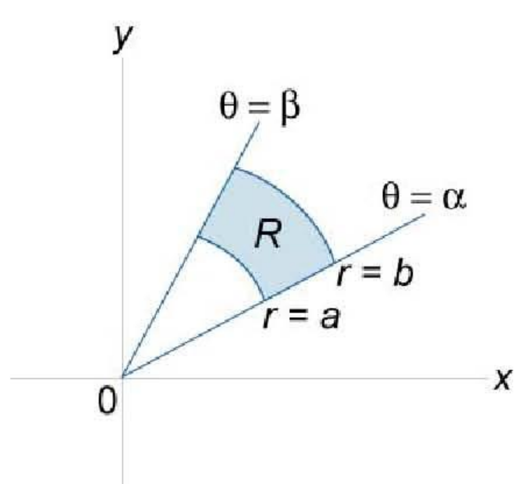
شکل ۱۹۶ **Figure 196.**

اگر ناحیه R مستطیل قطبی باشد که با روابط زیر تعریف شده باشد

If the region R is the polar rectangle given by
$0 \le a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$, where $\beta - \alpha \le 2\pi$,
که در آن

then آنگاه

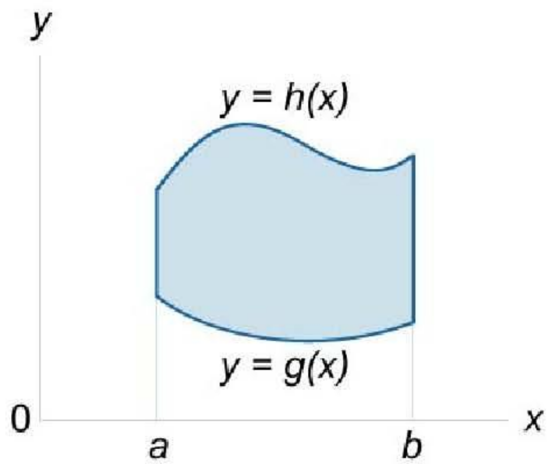
$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta .$$



شکل ۱۹۷ **Figure 197.**

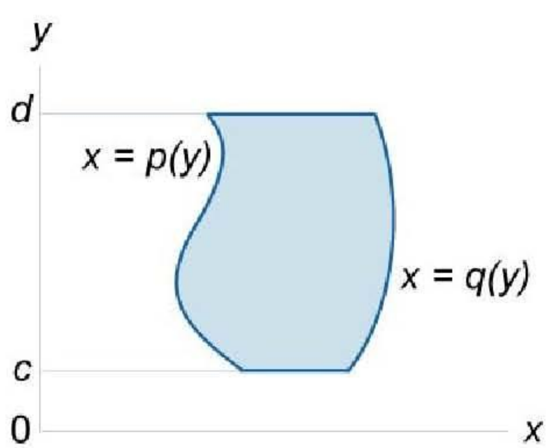
1090. Area of a Region مساحت ناحیه

$$A = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} dydx \quad \text{(for a type I region).}$$ (برای ناحیه نوع یک)



شکل ۱۹۸ **Figure 198.**

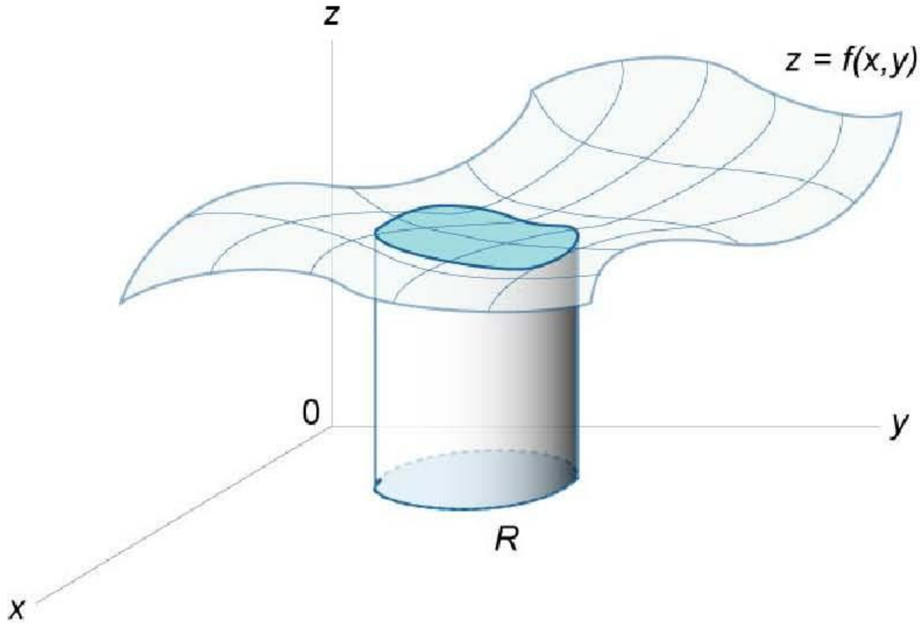
$$A = \int_c^d \int_{p(y)}^{q(y)} dxdy \quad \text{(for a type II region).}$$ (برای ناحیه نوع دو)



شکل ۱۹۹ **Figure 199.**

1091. Volume of a Solid حجم جسم سه بعدی

$$V = \iint_R f(x,y)dA .$$



شکل ۲۰۰

Figure 200.

اگر R ناحیه نوع یک با مرزهای x=a، x=b، y=h(x)، و y=g(x) باشد، آنگاه

If R is a type I region bounded by $x = a$, $x = b$, $y = h(x)$, $y = g(x)$, then

$$V = \iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dydx .$$

اگر R ناحیه نوع دو با مرزهای y=c، y=d، x=q(y) و x=p(y) باشد، آنگاه

If R is a type II region bounded by $y = c$, $y = d$, $x = q(y)$, $x = p(y)$, then

$$V = \iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dxdy .$$

اگر بر روی ناحیه R، $f(x,y) \geq g(x,y)$ باشد، آنگاه حجم جسم سه بعدی میان $z_1=f(x,y)$ و $z_2=g(x,y)$ بر روی ناحیه R با رابطه زیر به دست می آید

If $f(x,y) \geq g(x,y)$ over a region R, then the volume of the solid between $z_1 = f(x,y)$ and $z_2 = g(x,y)$ over R is given by

$$V = \iint_R [f(x,y) - g(x,y)] dA .$$

مساحت و حجم در مختصات قطبی

1092. Area and Volume in Polar Coordinates

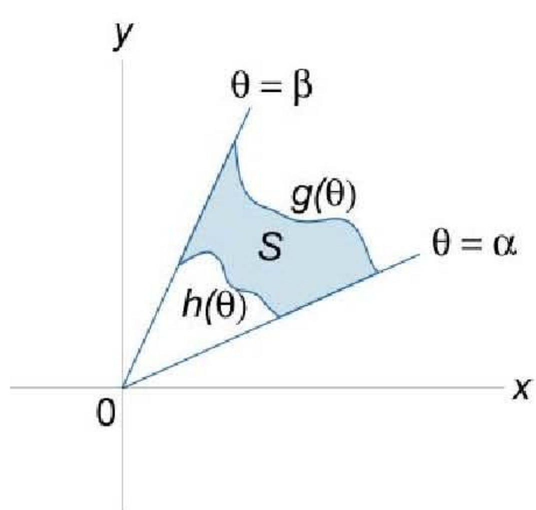
اگر S ناحیه ای در صفحه xy باشد که مرزهای آن برابر باشد با

If S is a region in the xy-plane bounded by $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $r = h(\theta)$, $r = g(\theta)$,

آنگاه then

$$A = \iint_S dA = \int_\alpha^\beta \int_{h(\theta)}^{g(\theta)} r dr d\theta ,$$

$$V = \iint_S f(r,\theta) r dr d\theta .$$



شکل ۲۰۱ **Figure 201.**

1093. Surface Area مساحت سطح (رویه)

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

جرم ورق

1094. Mass of a Lamina

$$m = \iint_R \rho(x,y)dA,$$

که در آن ورق ناحیه R را در بر گرفته و چگالی آن در نقطه (x,y) عبارت است از ρ(x,y).

where the lamina occupies a region R and its density at a point (x,y) is $\rho(x,y)$.

1095. Moments گشتاورها (ممانها)

The moment of the lamina about the x-axis is given by formula

گشتاور (ممان) ورق حول محور x با این رابطه به دست می آید

$$M_x = \iint_R y\rho(x,y)dA.$$

گشتاور (ممان) ورق حول محور y برابر است با

The moment of the lamina about the y-axis is

$$M_y = \iint_R x\rho(x,y)dA.$$

ممان اینرسی حول محور x برابر است با

The moment of inertia about the x-axis is

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x,y)dA.$$

ممان اینرسی حول محور y برابر است با

The moment of inertia about the y-axis is

$$I_y = \iint_R x^2\rho(x,y)dA.$$

ممان اینرسی قطبی برابر است با

The polar moment of inertia is

$$I_0 = \iint_R (x^2+y^2)\rho(x,y)dA.$$

1096. Center of Mass مرکز جرم

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_R x\rho(x,y)dA = \frac{\iint_R x\rho(x,y)dA}{\iint_R \rho(x,y)dA},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_R y\rho(x,y)dA = \frac{\iint_R y\rho(x,y)dA}{\iint_R \rho(x,y)dA}.$$

بار ورق

1097. Charge of a Plate

$$Q = \iint_R \sigma(x,y)dA,$$

که در آن بار الکتریکی بر روی ناحیه R گسترده شده و چگالی بار آن در نقطه (x,y) برابر است با σ(x,y).

where electrical charge is distributed over a region R and its charge density at a point (x,y) is $\sigma(x,y)$.

1098. Average of a Function میانگین تابع

$$\mu = \frac{1}{S}\iint_R f(x,y)dA,$$

که در آن where $S = \iint_R dA$.

9.11 Triple Integral انتگرال سه گانه

Functions of three variables: $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, ... توابع سه متغیره

Triple integrals: $\iiint_G f(x,y,z)dV$, $\iiint_G g(x,y,z)dV$, ... انتگرالهای سه گانه

Riemann sum: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f(u_i, v_j, w_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ مجموع ریمان

Small changes: Δx_i, Δy_j, Δz_k تغییرات اندک

Limits of integration: a, b, c, d, r, s حدود انتگرال گیری

Regions of integration: G, T, S نواحی انتگرال گیری

Cylindrical coordinates: r, θ, z مختصات استوانه ای

Spherical coordinates: r, θ, φ مختصات کروی

Volume of a solid: V حجم جسم سه بعدی

Mass of a solid: m جرم جسم سه بعدی
Density: $\mu(x,y,z)$ چگالی
Coordinates of center of mass: $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ مختصات مرکز جرم
First moments: M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} ممانهای (گشتاورهای) اول
Moments of inertia: I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}, I_x, I_y, I_z, I_0 ممانهای (گشتاورهای) اینرسی

تعریف انتگرال سه گانه
1099. Definition of Triple Integral
The triple integral over a parallelepiped $[a, b]\times[c, d]\times[r, s]$ is defined to be انتگرال سه گانه بر روی متوازی السطوح [a,b]*[c,d]*[r,s] به صورت زیر تعریف می شود

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[r,s]} f(x,y,z)dV = \lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_j\to 0\\ \max\Delta z_k\to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f(u_i,v_j,w_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k,$$

که در آن where (u_i,v_j,w_k) is some point in the parallelepiped نقطه ای در متوازی السطوح است $(x_{i-1},x_i)\times(y_{j-1},y_j)\times(z_{k-1},z_k)$, and $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, و $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

1100. $\iiint\limits_G [f(x,y,z)+g(x,y,z)]dV = \iiint\limits_G f(x,y,z)dV + \iiint\limits_G g(x,y,z)dV$

1101. $\iiint\limits_G [f(x,y,z)-g(x,y,z)]dV = \iiint\limits_G f(x,y,z)dV - \iiint\limits_G g(x,y,z)dV$

1102. $\iiint\limits_G kf(x,y,z)dV = k\iiint\limits_G f(x,y,z)dV$,
where k is a constant. که در آن k ثابت است.

اگر و G و T نواحی پایه غیرهمپوشان هستند، آنگاه
1103. If $f(x,y,z)\geq 0$ and G and T are nonoverlapping basic regions, then

$$\iiint\limits_{G\cup T} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_G f(x,y,z)dV + \iiint\limits_T f(x,y,z)dV.$$

Here $G\cup T$ is the union of the regions G and T.
در اینجا اجتماع نواحی G و T است.

برآورد انتگرالهای سه گانه با انتگرالهای مکرر. اگر جسم سه بعدی G مجموعه ای از نقاط (x,y,z) باشد به گونه ای که

1104. Evaluation of Triple Integrals by Repeated Integrals

If the solid G is the set of points (x,y,z) such that

$(x,y)\in R,\ \chi_1(x,y)\le z\le \chi_2(x,y)$, then آنگاه

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_R\left[\int\limits_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy,$$

که در آن R تصویر G بر روی صفحه xy است.

where R is projection of G onto the xy-plane.

اگر جسم سه بعدی G مجموعه ای از نقاط (x,y,z) باشد به گونه ای که

If the solid G is the set of points (x,y,z) such that

$a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x), \chi_1(x,y)\le z\le\chi_2(x,y)$, then آنگاه

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int\limits_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right]dx$$

انتگرالهای سه گانه بر روی متوازی السطوح

1105. Triple Integrals over Parallelepiped

If G is a parallelepiped $[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$, then

اگر G یک متوازی السطوح باشد، آنگاه

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d\left(\int\limits_r^s f(x,y,z)dz\right)dy\right]dx.$$

در حالت خاصی که تابع تحت انتگرال f(x,y,z) را می توان به صورت g(x)h(y)k(z) نوشت، داریم

In the special case where the integrand $f(x,y,z)$ can be written as $g(x)h(y)k(z)$ we have

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\left(\int\limits_a^b g(x)dx\right)\left(\int\limits_c^d h(y)dy\right)\left(\int\limits_r^s k(z)dz\right).$$

1106. Change of Variables تغییر متغیرها

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_S f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dxdydz,$$

که در آن where $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$ is the jacobian of ژاکوبین تبدیل است

the transformations $(x,y,z) \to (u,v,w)$, and S is the pull-back of G which can be computed by $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ and $z = z(u,v,w)$ into the definition of G.

و S مستخرج از G است که با روابط x=x(u,v,w)، y=y(u,v,w) و z=z(u,v,w) به تعریف G محاسبه می شود.

انتگرالهای سه گانه در مختصات استوانه ای

1107. Triple Integrals in Cylindrical Coordinates

The differential dxdydz for cylindrical coordinates is

دیفرانسیل dxdydz برای مختصات استوانه ای برابر است با

$$dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| drd\theta dz = rdrd\theta dz .$$

جسم سه بعدی G به صورت زیر تعریف شده است:

Let the solid G is determined as follows:

$(x,y) \in R,\ \chi_1(x,y) \le z \le \chi_2(x,y)$, که در آن R تصویر G بر روی صفحه xy است. آنگاه

where R is projection of G onto the xy-plane. Then

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz$$

$$= \iint_{R(r,\theta)} \left[\int_{\chi_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{\chi_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz \right] rdrd\theta .$$

در اینجا S مستخرج G در مختصات استوانه ای است.

Here S is the pullback of G in cylindrical coordinates.

انتگرالهای سه گانه در مختصات کروی

1108. Triple Integrals in Spherical Coordinates

The Differential dxdydz for Spherical Coordinates is

دیفرانسیل dxdydz برای مختصات کروی برابر است با

$$dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| drd\theta d\varphi = r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_S f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

where the solid S is the pullback of G in spherical coordinates. The angle θ ranges from 0 to 2π, the angle φ ranges from 0 to π. که در آن جسم سه بعدی S مستخرج از G در مختصات کروی است. زاویه θ از 0 تا 2π تغییر می کند، زاویه ϕ از 0 تا 2π تغییر می کند.

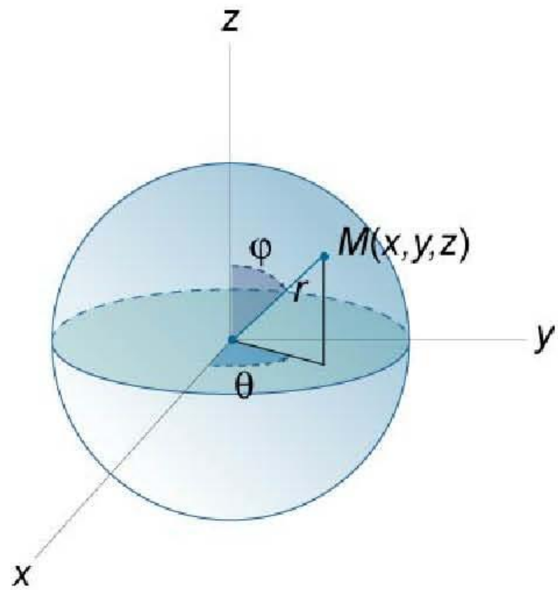


Figure 202. شکل ۲۰۲

1109. Volume of a Solid حجم جسم سه بعدی

$$V = \iiint_G dx\,dy\,dz$$

1110. Volume in Cylindrical Coordinates حجم در مختصات استوانه ای

$$V = \iiint_{S(r,\theta,z)} r\,dr\,d\theta\,dz$$

1111. Volume in Spherical Coordinates حجم در مختصات کروی

$$V = \iiint_{S(r,\theta,\varphi)} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

جرم جسم سه بعدی

1112. Mass of a Solid

$$m = \iiint\limits_G \mu(x,y,z)dV,$$

که در آن جسم سه بعدی ناحیه G را اشغال می کند و چگالی آن در نقطه (x,y,z) برابر با μ(x,y,z) است.

where the solid occupies a region G and its density at a point (x,y,z) is $\mu(x,y,z)$.

1113. Center of Mass of a Solid مرکز جرم جسم سه بعدی

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m},\ \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m},\ \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m},$$

where که در آن

$$M_{yz} = \iiint\limits_G x\mu(x,y,z)dV,$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_G y\mu(x,y,z)dV,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_G z\mu(x,y,z)dV$$

ممانها (گشتاورها)ی اول حول صفحات به ترتیب، x=0، y=0، z=0، می باشند، μ(x,y,z) تابع چگالی است.

are the first moments about the coordinate planes $x=0$, $y=0$, $z=0$, respectively, $\mu(x,y,z)$ is the density function.

1114. Moments of Inertia about the xy-plane (or $z=0$), yz-plane ($x=0$), and xz-plane ($y=0$)

ممانها (گشتاورها)ی اینرسی حول صفحه xy (یا z=0)، صفحه yz (x=0)، و صفحه xz (y=0)

$$I_{xy} = \iiint\limits_G z^2\mu(x,y,z)dV,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_G x^2\mu(x,y,z)dV,$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_G y^2\mu(x,y,z)dV.$$

ممانها (گشتاورها)ی اینرسی حول محور-x، محور-y، و محور-z

1115. Moments of Inertia about the x-axis, y-axis, and z-axis

$$I_x = I_{xy} + I_{xz} = \iiint\limits_G (z^2 + y^2)\mu(x,y,z)dV,$$

$$I_y = I_{xy} + I_{yz} = \iiint\limits_G (z^2 + x^2)\mu(x,y,z)dV,$$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz} = \iiint_G (y^2 + x^2)\mu(x,y,z)\,dV .$$

1116. Polar Moment of Inertia ممان (گشتاور) اینرسی قطبی

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz} = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)\mu(x,y,z)\,dV$$

9.12 Line Integral انتگرال خط

Scalar functions: $F(x,y,z)$, $F(x,y)$, $f(x)$ توابع اسکالر
Scalar potential: $u(x,y,z)$ پتانسیل اسکالر
Curves: C, C_1, C_2 منحنی ها
Limits of integrations: a, b, α, β حدود انتگرال گیریها
Parameters: t, s پارامترها
Polar coordinates: r, θ مختصات قطبی
Vector field: $\vec{F}(P,Q,R)$ میدان برداری
Position vector: $\vec{r}(s)$ بردار مکان
Unit vectors: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{\tau}$ بردار واحد
Area of region: S مساحت ناحیه
Length of a curve: L طول منحنی
Mass of a wire: m جرم سیم
Density: $\rho(x,y,z)$, $\rho(x,y)$ چگالی
Coordinates of center of mass: $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ مختصات مرکز جرم
First moments: M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} ممانهای (گشتاورهای) اول
Moments of inertia: I_x, I_y, I_z ممانهای (گشتاورهای) اینرسی
Volume of a solid: V حجم جسم سه بعدی
Work: W کار
Magnetic field: $\vec{B}$ میدان مغناطیسی
Current: I جریان
Electromotive force: ε نیروی الکتروموتیو
Magnetic flux: ψ شار مغناطیسی

انتگرال خط یک تابع اسکالر

1117. Line Integral of a Scalar Function

منحنی C با این تابع برداری داده شده است

Let a curve C be given by the vector function $\vec{r}=\vec{r}(s)$, $0\le s\le S$, and a scalar function F is defined over the curve C. Then

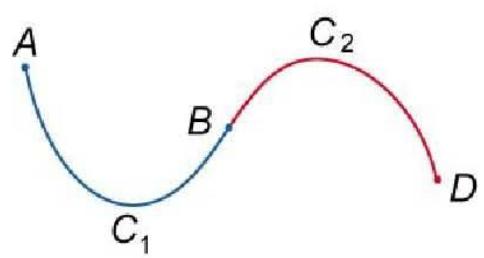
و تابع اسکالر F بر روی منحنی C تعریف شده است. آنگاه

$$\int_0^S F(\vec{r}(s))ds=\int_C F(x,y,z)ds=\int_C F ds,$$

where ds is the arc length differential.

که در آن ds دیفرانسیل طول کمان است.

1118. $\displaystyle\int_{C_1\cup C_2} F\,ds=\int_{C_1} F\,ds+\int_{C_2} F\,ds$



شکل ۲۰۳

Figure 203.

اگر منحنی هموار C با این رابطه به صورت پارامتری نوشته شود،

1119. If the smooth curve C is parametrized by $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, then

آنگاه

$$\int_C F(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta F(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

اگر C منحنی همواری در صفحه xy باشد که با این رابطه داده شده باشد،

1120. If C is a smooth curve in the xy-plane given by the equation $y=f(x)$, $a\le x\le b$, then

آنگاه

$$\int_C F(x,y)ds=\int_a^b F(x,f(x))\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

انتگرال خط تابع اسکالر در مختصات قطبی

1121. Line Integral of Scalar Function in Polar Coordinates

$$\int_C F(x,y)ds = \int_\alpha^\beta F(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\,,$$

که در آن منحنی C با تابع قطبی r(θ) تعریف می شود

where the curve C is defined by the polar function $r(\theta)$.

انتگرال خط تابع برداری

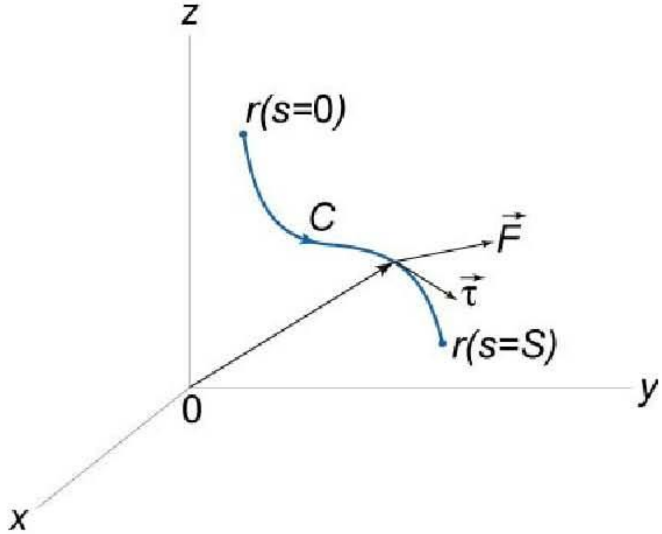
1122. Line Integral of Vector Field

Let a curve C be defined by the vector function $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $0 \le s \le S$. Then آنگاه

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

بردار واحد خط مماس بر این منحنی است.

is the unit vector of the tangent line to this curve.



شکل ۲۰۴

Figure 204.

میدان برداری F(P,Q,R) بر روی منحنی C تعریف می شود.

Let a vector field $\vec{F}(P,Q,R)$ is defined over the curve C. Then the line integral of the vector field $\vec{F}$ along the curve C is

آنگاه انتگرال خط میدان برداری F در راستای منحنی C برابر است با

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_0^S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds\,.$$

خواص انتگرالهای خط میادین برداری

1123. Properties of Line Integrals of Vector Fields

$$\int_{-C}\left(\vec{F}\cdot d\vec{r}\right)=-\int_{C}\left(\vec{F}\cdot d\vec{r}\right),$$

که در آن C– بیانگر منحنی با راستای مخالف است.

where -C denote the curve with the opposite orientation.

$$\int_{C}\left(\vec{F}\cdot d\vec{r}\right)=\int_{C_1\cup C_2}\left(\vec{F}\cdot d\vec{r}\right)=\int_{C_1}\left(\vec{F}\cdot d\vec{r}\right)+\int_{C_2}\left(\vec{F}\cdot d\vec{r}\right),$$

که در آن C اجتماع منحنیهای C_1 و C_2 است.

where C is the union of the curves C_1 and C_2.

اگر منحنی C به صورت پارامتری با رابطه زیر بیان شود،

1124. If the curve C is parameterized by $\vec{r}(t)=\langle x(t),y(t),z(t)\rangle$,

$\alpha\le t\le\beta$, then آنگاه

$$\int_C Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\left(P(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt}+Q(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt}+R(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}\right)dt$$

1125. If C lies in the xy-plane and given by the equation $y=f(x)$, then

اگر C در صفحه xy قرار داشته باشد و با رابطه y=f(x) داده شده باشد، آنگاه

$$\int_C Pdx+Qdy=\int_a^b\left(P(x,f(x))+Q(x,f(x))\frac{df}{dx}\right)dx.$$

1126. Green's Theorem قضیه گرین

$$\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_C Pdx+Qdy,$$

where $\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ is a continuous vector function with continuous first partial derivatives $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ in a some domain R, which is bounded by a closed, piecewise smooth curve C.

که در آن F یک تابع برداری پیوسته با مشتقات جزیی اول پیوسته در دامنه R است، که مرز این دامنه با منحنی بسته، هموار تکه ای C مشخص شده است.

مساحت ناحیه R که مرز آن با منحنی C مشخص شده است.

1127. Area of a Region R Bounded by the Curve C

$$S = \iint_R dxdy = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

استقلال مسیر انتگرالهای خط

1128. Path Independence of Line Integrals

The line integral of a vector function $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ is said to be path independent, if and only if P, Q, and R are continuous in a domain D, and if there exists some scalar function $u = u(x, y, z)$ (a scalar potential) in D such that

$$\vec{F} = \text{grad}\, u \text{, or } \frac{\partial u}{\partial x} = P,\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

یا

انتگرال خط تابع برداری F=Pi+Qj+Rk گفته می شود که مستقل از مسیر است، اگر و تنها اگر P، Q و R در دامنه D پیوسته باشند، و اگر تابع اسکالر u=u(x,y,z) (پتانسیل اسکالر) در D وجود داشته باشد به گونه ای که

Then آنگاه

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A).$$

آزمون برای میدان پایستار

1129. Test for a Conservative Field

A vector field of the form $\vec{F} = \text{grad}\, u$ is called a conservative field. The line integral of a vector function $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ is path independent if and only if

$$\text{curl}\, \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

میدان برداری به شکل F=grad u میدان پایستار نامیده می شود. انتگرال خط تابع برداری F=Pi+Qj+Rk مستقل از مسیر است اگر و تنها اگر

اگر انتگرال خط در صفحه xy گرفته شود به گونه ای که

If the line integral is taken in xy-plane so that

$$\int_C Pdx + Qdy = u(B) - u(A),$$

then the test for determining if a vector field is conservative can be written in the form

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

آنگاه آزمون برای تعیین اینکه آیا میدان برداری پایستار است یا نه می تواند به این شکل نوشته شود.

1130. Length of a Curve طول منحنی

$$L=\int_C ds=\int_\alpha^\beta\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right|dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt,$$

where C ia a piecewise smooth curve described by the position vector $\vec{r}(t)$, $\alpha\le t\le\beta$.

که در آن C منحنی هموار تکه ای است که با بردار مکان r(t) توصیف می شود

If the curve C is two-dimensional, then

$$L=\int_C ds=\int_\alpha^\beta\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right|dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

اگر منحنی C دوبعدی باشد، آنگاه

If the curve C is the graph of a function $y=f(x)$ in the xy-plane $(a\le x\le b)$, then

اگر منحنی C نمودار تابع y=f(x) در صفحه xy باشد، آنگاه

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

1131. Length of a Curve in Polar Coordinates طول منحنی در مختصات قطبی

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}\,d\theta,$$

where the curve C is given by the equation $r=r(\theta)$, $\alpha\le\theta\le\beta$ in polar coordinates.

که در آن منحنی C با معادله r=r(θ) در مختصات قطبی داده می شود، α≤θ≤β

1132. Mass of a Wire جرم سیم

$$m=\int_C\rho(x,y,z)ds,$$

که در آن ρ(x,y,z) جرم بر واحد طول سیم است.

where $\rho(x,y,z)$ is the mass per unit length of the wire.

If C is a curve parametrized by the vector function $\vec{r}(t)=\langle x(t),y(t),z(t)\rangle$, then the mass can be computed by the formula

اگر منحنی C با تابع برداری r(t) به صورت پارامتری نوشته شود، آنگاه جرم را می توان با این فرمول محاسبه کرد

$$m=\int_{\alpha}^{\beta}\rho(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt\,.$$

If C is a curve in xy-plane, then the mass of the wire is given by

اگر منحنی C در صفحه xy باشد، آنگاه جرم سیم به این صورت محاسبه می شود

$$m=\int_{C}\rho(x,y)ds\,,$$

or یا

(در شکل پارامتری)

$$m=\int_{\alpha}^{\beta}\rho(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \text{ (in parametric form).}$$

1133. Center of Mass of a Wire مرکز جرم سیم

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m},\ \bar{y}=\frac{M_{xz}}{m},\ \bar{z}=\frac{M_{xy}}{m},$$

where که در آن

$$M_{yz}=\int_{C}x\rho(x,y,z)ds\,,$$

$$M_{xz}=\int_{C}y\rho(x,y,z)ds\,,$$

$$M_{xy}=\int_{C}z\rho(x,y,z)ds\,.$$

1134. Moments of Inertia ممانها (گشتاورها)ی اینرسی

The moments of inertia about the x-axis, y-axis, and z-axis are given by the formulas

ممانها (گشتاورها)ی اینرسی حول محور x، محور y، و محور z با این روابط داده می شود

$$I_x=\int_{C}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds\,,$$

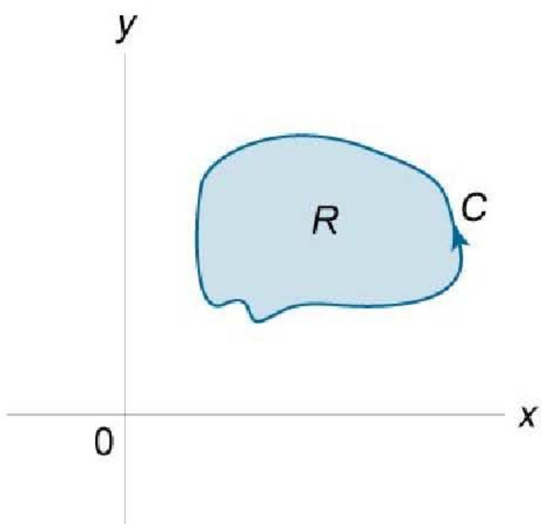
$$I_y=\int_{C}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)ds\,,$$

$$I_z=\int_{C}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds\,.$$

1135. Area of a Region Bounded by a Closed Curve

مساحت ناحیه با مرز یک منحنی بسته

$$S=\oint_C xdy=-\oint_C ydx=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx.$$



شکل ۲۰۵

Figure 205.

اگر منحنی بسته C به شکل پارامتری r(t) داده شود، آنگاه مساحت را می توان با این رابطه محاسبه کرد

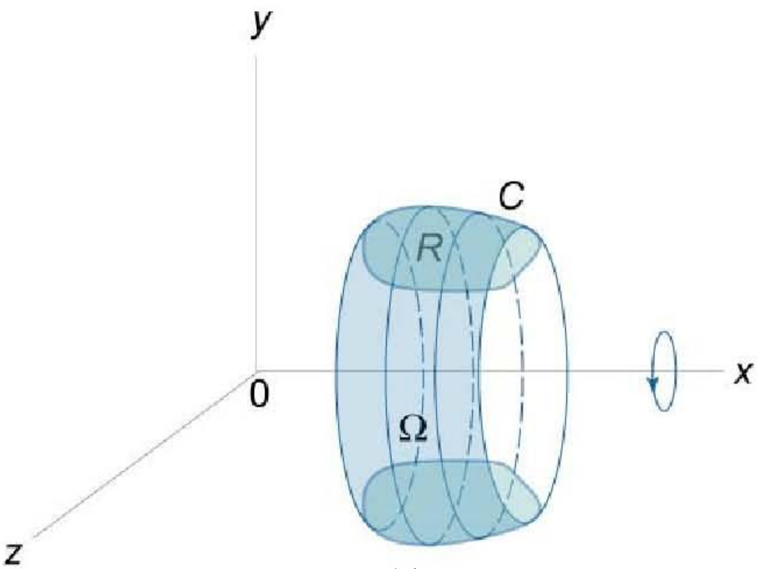
If the closed curve C is given in parametric form $\vec{r}(t)=\langle x(t),y(t)\rangle$, then the area can be calculated by the formula

$$S=\int_\alpha^\beta x(t)\frac{dy}{dt}dt=-\int_\alpha^\beta y(t)\frac{dx}{dt}dt=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left(x(t)\frac{dy}{dt}-y(t)\frac{dx}{dt}\right)dt.$$

حجم جسم سه بعدی تشکیل شده با دوران منحنی بسته حول محور x

1136. Volume of a Solid Formed by Rotating a Closed Curve about the x-axis

$$V=-\pi\oint_C y^2dx=-2\pi\oint_C xydy=-\frac{\pi}{2}\oint_C 2xydy+y^2dx$$



شکل ۲۰۶

Figure 206.

1137. Work کار

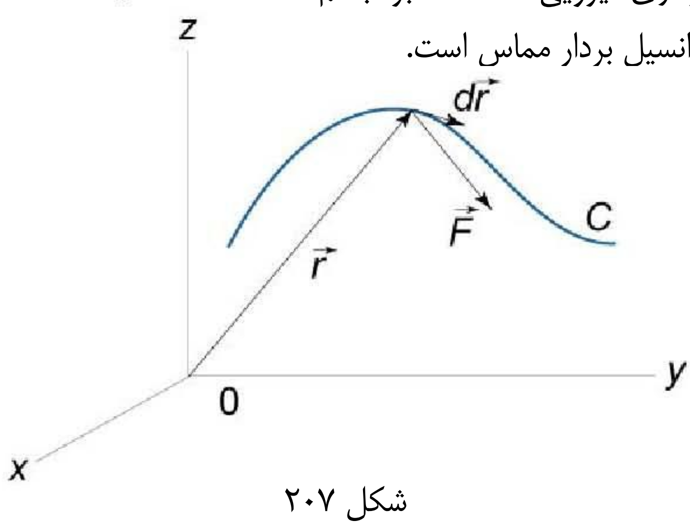
Work done by a force $\vec{F}$ on an object moving along a curve C is given by the line integral

کار انجام شده توسط نیروی F بر روی جسم متحرک در راستای منحنی C با این انتگرال خط داده می شود

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

where $\vec{F}$ is the vector force field acting on the object, $d\vec{r}$ is the unit tangent vector.

که در آن F میدان برداری نیرویی است که بر جسم وارد می شود، dr دیفرانسیل بردار مماس است.



شکل ۲۰۷

Figure 207.

اگر جسم در راستای منحنی C در صفحه xy حرکت کند، آنگاه

If the object is moved along a curve C in the xy-plane, then

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy\,,$$

اگر مسیر C با پارامتر t مشخص شود (t غالبا به معنی زمان است)، رابطه برای محاسبه کار می شود

If a path C is specified by a parameter t (t often means time), the formula for calculating work becomes

$$W = \int_\alpha^\beta \left[P(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt} + R(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt} \right] dt,$$

where t goes from α to β. که در آن t از α به β می رود.

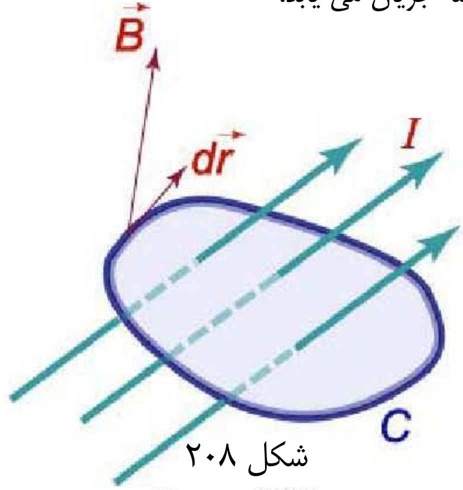
If a vector field $\vec{F}$ is conservative and $u(x,y,z)$ is a scalar potential of the field, then the work on an object moving from A to B can be found by the formula

$W = u(B) - u(A)$. اگر میدان برداری F پایستار باشد و u(x,y,z) اسکالر پتانسیل میدان باشد، آنگاه کار بر روی جسم متحرک از A به B را می توان با این رابطه به دست آورد

1138. Ampere's Law قانون آمپر

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I\,.$$

The line integral of a magnetic field $\vec{B}$ around a closed path C is equal to the total current I flowing through the area bounded by the path. انتگرال خط میدان مغناطیسی B اطراف مسیر بسته C برابر با جریان کل I است که از مساحت با مرز مسیر بسته جریان می یابد.



شکل ۲۰۸

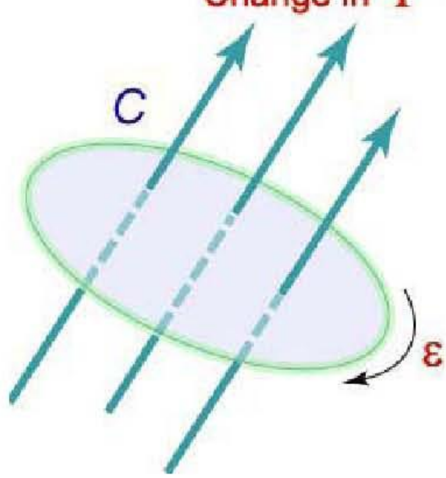
Figure 208.

1139. Faraday's Law قانون فارادی

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\psi}{dt}$$

نیروی الکتروموتیو (emf) ε القا شده اطراف حلقه بسته C برابر است با نرخ تغییر شار مغناطیسی ψ گذرنده از حلقه

The electromotive force (emf) ε induced around a closed loop C is equal to the rate of the change of magnetic flux ψ passing through the loop.



شکل ۲۰۹

Figure 209.

9.13 Surface Integral انتگرال سطح

Scalar functions: $f(x,y,z)$, $z(x,y)$ توابع اسکالر

Position vectors: $\vec{r}(u,v)$, $\vec{r}(x,y,z)$ بردارهای موقعیت

Unit vectors: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ بردارهای واحد

Surface: S سطح (رویه)

Vector field: $\vec{F}(P,Q,R)$ میدان برداری

Divergence of a vector field: $\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$ دیورژانس میدان برداری

Curl of a vector field: $\operatorname{curl}\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ کِرل میدان برداری

Vector element of a surface: $d\vec{S}$ المان برداری سطح

Normal to surface: $\vec{n}$ عمود (نرمال) بر سطح

Surface area: A مساحت سطح

Mass of a surface: m جرم سطح

Density: $\mu(x,y,z)$ چگالی

Coordinates of center of mass: $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ مختصات مرکز جرم

First moments: M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} مختصات مرکز جرم

Moments of inertia: I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}, I_x, I_y, I_z ممانها (گشتاورها)ی اینرسی

Volume of a solid: V حجم جسم سه بعدی

Force: $\vec{F}$ نیرو

Gravitational constant: G ثابت گرانش

Fluid velocity: $\vec{v}(\vec{r})$ سرعت سیال

Fluid density: ρ چگالی سیال

Pressure: $p(\vec{r})$ فشار

Mass flux, electric flux: Φ شار جرمی، شار الکتریکی

Surface charge: Q بار سطح

Charge density: $\sigma(x,y)$ چگالی بار

Magnitude of the electric field: $\vec{E}$ شدت میدان الکتریکی

انتگرال سطح تابع اسکالر

1140. Surface Integral of a Scalar Function

سطح S با این بردار موقعیت داده شده است

Let a surface S be given by the position vector

که در آن محدوده (u,v) در دامنه D(u,v) صفحه uv تغییر می کند

$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$,

where (u,v) ranges over some domain $D(u,v)$ of the uv-plane.

انتگرال سطح تابع اسکالر f(x,y,z) بر روی سطح S به این صورت تعریف می شود

The surface integral of a scalar function $f(x,y,z)$ over the surface S is defined as

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{D(u,v)} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du\,dv,$$

where the partial derivatives $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ and $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ are given by

که در آن مشتقات جزیی با روابط زیر داده می شود

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\vec{k},$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\vec{k}$$

و and $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ is the cross product. ضرب برداری است.

اگر سطح (رویه) S با معادله z=z(x,y) داده شود که در آن z(x,y) یک تابع مشتق پذیر در دامنه D(x,y) باشد، آنگاه

1141. If the surface S is given by the equation $z=z(x,y)$ where $z(x,y)$ is a differentiable function in the domain $D(x,y)$, then

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_{D(x,y)} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

انتگرال سطح میدان برداری F بر روی سطح S

1142. Surface Integral of the Vector Field $\vec{F}$ over the Surface S

- If S is oriented outward, then اگر S به سمت بیرون گرایش یافته باشد، آنگاه

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}dS$$
$$=\iint_{D(u,v)} \vec{F}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right]dudv.$$

- If S is oriented inward, then اگر S به سمت درون گرایش یافته باشد، آنگاه

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}dS$$
$$=\iint_{D(u,v)} \vec{F}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right]dudv.$$

dS المان برداری سطح نامیده می شود. نقطه به معنی ضرب اسکالر بردارهای مرتبط است.

$d\vec{S}=\vec{n}dS$ is called the vector element of the surface. Dot means the scalar product of the appropriate vectors.

The partial derivatives $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ and $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ are given by

مشتقهای جزیی با این روابط داده می شود.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\cdot\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\cdot\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\cdot\vec{k},$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\cdot\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\cdot\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\cdot\vec{k}.$$

اگر سطح S با معادله z=z(x,y) داده شود، که در آن z(x,y) یک تابع مشتق پذیر در دامنه D(x,y) باشد، آنگاه

1143. If the surface S is given by the equation $z=z(x,y)$, where $z(x,y)$ is a differentiable function in the domain $D(x,y)$, then

- If S is oriented upward, i.e. the k-th component of the normal vector is positive, then

اگر S به سمت بالا گرایش یافته باشد، یعنی مولفه k–ام بردار عمود (نرمال) مثبت باشد، آنگاه

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}dS$$
$$=\iint_{D(x,y)}\vec{F}(x,y,z)\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}+\vec{k}\right)dxdy,$$

- If S is oriented downward, i.e. the k-th component of the normal vector is negative, then

اگر S به سمت پایین گرایش یافته باشد، یعنی مولفه k–ام بردار عمود (نرمال) منفی باشد، آنگاه

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}dS$$
$$=\iint_{D(x,y)}\vec{F}(x,y,z)\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}-\vec{k}\right)dxdy.$$

1144. $$\iint_S(\vec{F}\cdot\vec{n})dS=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$
$$=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS,$$

where $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ are the components of the vector field $\vec{F}$.
$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ are the angles between the outer unit normal vector $\vec{n}$ and the x-axis, y-axis, and z-axis, respectively.

که در آن P(x,y,z)، Q(x,y,z)، R(x,y,z) مولفه های میدان برداری F می باشند. cosα، cosβ، cosγ به ترتیب زوایای میان بردار عمود (نرمال) n و محور x، محور y، و محور z است.

اگر سطح (رویه) S به شکل پارامتری با بردار r(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) داده شده باشد آنگاه رابطه پیشین به این صورت نوشته می شود

1145. If the surface S is given in parametric form by the vector $\vec{r}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, then the latter formula can be written as

$$\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})dS = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{D(u,v)} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv,$$

where (u,v) ranges over some domain $D(u,v)$ of the uv-plane. که در آن (u,v) در دامنه D(u,v) از صفحه uv تغییر می کند.

قضیه دیورژانس

1146. Divergence Theorem

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_G (\nabla\cdot\vec{F})dV,$$

where که در آن

$\vec{F}(x,y,z) = \langle P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\rangle$

is a vector field whose components P, Q, and R have continuous partial derivatives,

یک میدان برداری است که مولفه های آن P، Q، و R مشتقات جزیی پیوسته دارند.

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

is the divergence of $\vec{F}$, also denoted $\operatorname{div}\vec{F}$. The symbol $\oiint$ indicates that the surface integral is taken over a closed surface.

دیورژانس F است که با divF نیز نشان داده می شود. نماد انتگرال دوگانه نشان داده شده به معنی انتگرال سطح است که بر روی سطح بسته گرفته می شود.

قضیه دیورژانس در شکل مختصات

1147. Divergence Theorem in Coordinate Form

$$\oiint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

1148. Stoke's Theorem قضیه استوکس

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S},$$

where که در آن

$\vec{F}(x,y,z)=\langle P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\rangle$

is a vector field whose components P, Q, and R have continuous partial derivatives,

یک میدان برداری است که مولفه های آن P، Q، و R مشتقات جزیی پیوسته دارند.

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

is the curl of $\vec{F}$, also denoted curl $\vec{F}$.

The symbol $\oint$ indicates that the line integral is taken over a closed curve.

کِرل F است که با curlF نیز نشان داده می شود. نماد انتگرال نشان داده شده به معنی انتگرال خط است که بر روی منحنی بسته گرفته می شود.

1149. Stoke's Theorem in Coordinate Form قضیه استوکس در شکل مختصات

$$\oint_C Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

1150. Surface Area مساحت سطح

$$A=\iint_S dS$$

1151. If the surface S is parameterized by the vector $\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$, then the surface area is

اگر سطح (رویه) S با این بردار به صورت پارامتری بیان شود، آنگاه مساحت سطح برابر است با

$$A=\iint_{D(u,v)}\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|dudv,$$

where $D(u,v)$ is the domain where the surface $\vec{r}(u,v)$ is defined.

که در آن D(u,v) دامنه ای است که در آن سطح (رویه) r(u,v) تعریف شده است.

اگر S به صورت صریح با تابع z(x,y) بیان شود، آنگاه مساحت سطح برابر است با

1152. If S is given explicitly by the function $z(x,y)$, then the surface area is

$$A = \iint_{D(x,y)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,$$

where $D(x,y)$ is the projection of the surface S onto the xy-plane. که در آن D(x,y) تصویر سطح S بر روی صفحه xy است.

جرم سطح

1153. Mass of a Surface

$$m = \iint_S \mu(x,y,z)dS,$$

که در آن μ(x,y,z) جرم بر واحد سطح (تابع چگالی) است.

where $\mu(x,y,z)$ is the mass per unit area (density function).

1154. Center of Mass of a Shell مرکز جرم پوسته

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m},\ \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m},\ \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m},$$

where که در آن

$$M_{yz} = \iint_S x\mu(x,y,z)dS,$$

$$M_{xz} = \iint_S y\mu(x,y,z)dS,$$

$$M_{xy} = \iint_S z\mu(x,y,z)dS$$

به ترتیب گشتاورها (ممانها)ی اول حول صفحات مختصات x=0، y=0، z=0 می باشند.
μ(x,y,z) تابع چگالی است.

are the first moments about the coordinate planes $x=0$, $y=0$, $z=0$, respectively. $\mu(x,y,z)$ is the density function.

1155. Moments of Inertia about the xy-plane (or $z=0$), yz-plane ($x=0$), and xz-plane ($y=0$)

گشتاورها (ممانها)ی اینرسی حول صفحه xy (یا z=0)، صفحه yz (x=0)، و صفحه xz (y=0)

$$I_{xy} = \iint_S z^2\mu(x,y,z)dS,$$

$$I_{yz} = \iint_S x^2\mu(x,y,z)dS,$$

$$I_{xz} = \iint_S y^2 \mu(x,y,z)dS .$$

1156. Moments of Inertia about the x-axis, y-axis, and z-axis

گشتاورها (ممانها)ی اینرسی حول محور x، محور y، و محور z

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\mu(x,y,z)dS ,$$

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\mu(x,y,z)dS ,$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\mu(x,y,z)dS .$$

حجم جسم سه بعدی با مرزهای یک سطح (رویه)

1157. Volume of a Solid Bounded by a Closed Surface

$$V = \frac{1}{3}\left| \oiint_S xdydz + ydxdz + zdxdy \right|$$

1158. Gravitational Force نیروی گرانش

$$\vec{F} = Gm\iint_S \mu(x,y,z)\frac{\vec{r}}{r^3}dS ,$$

که در آن m جرم نقطه (x_0,y_0,z_0) بیرون از سطح (رویه) است،

where m is a mass at a point $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ outside the surface,

$\vec{r} = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$,

$\mu(x,y,z)$ is the density function,

and G is gravitational constant.

$\mu(x,y,z)$ تابع چگالی است، و G ثابت گرانش است.

1159. Pressure Force نیروی فشار

$$\vec{F} = \iint_S p(\vec{r})d\vec{S} ,$$

که در آن فشار $p(r)$ بر روی سطح (رویه) S که با بردار موقعیت r داده شده، اعمال می شود.

where the pressure $p(\vec{r})$ acts on the surface S given by the position vector $\vec{r}$.

1160. Fluid Flux (across the surface S) شار سیال (گذرنده از سطح (رویه) S)

$$\Phi = \oiint_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} ,$$

where $\vec{v}(\vec{r})$ is the fluid velocity. که در آن v(r) سرعت سیال است.

1161. Mass Flux (across the surface S) شار جرمی (گذرنده از سطح (رویه) S)

$$\Phi = \oiint_S \rho\vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{S},$$

که در آن F=ρv میدان برداری است، ρ چگالی سیال است.

where $\vec{F} = \rho\vec{v}$ is the vector field, ρ is the fluid density.

1162. Surface Charge بار سطحی

$$Q = \iint_S \sigma(x,y)dS,$$

که در آن σ(x,y) چگالی بار سطحی است.

where $\sigma(x,y)$ is the surface charge density.

1163. Gauss' Law قانون گوس

The electric flux through any closed surface is proportional to the charge Q enclosed by the surface

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

شار الکتریکی گذرنده از هر سطح (رویه) بسته متناسب با بار Q دربرگرفته شده توسط آن سطح (رویه) است.

where

Φ is the electric flux,

$\vec{E}$ is the magnitude of the electric field strength,

$\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\ \frac{F}{m}$ is permittivity of free space.

که در آن

ϕ شار الکتریکی است،

E مقدار شدت میدان الکتریکی است،

ε_0 نفوذپذیری فضای آزاد است.

فصل ۱۰

معادلات دیفرانسیل   Chapter 10

Differential Equations

Functions of one variable: y, p, q, u, g, h, G, H, r, z توابع تک متغیره
Arguments (independent variables): x, y آرگومانها (متغیرهای مستقل)
Functions of two variables: $f(x,y)$, $M(x,y)$, $N(x,y)$ توابع دو متغیره
First order derivative: y', u', $\dot{y}$, $\frac{dy}{dt}$, ... مشتق مرتبه اول
Second order derivatives: y'', $\ddot{y}$, $\frac{d^2I}{dt^2}$, ... مشتقات مرتبه دوم
Partial derivatives: $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ... مشتقات جزیی
Natural number: n عدد طبیعی
Particular solutions: y_1, y_p جوابهای خاص
Real numbers: k, t, C, C_1, C_2, p, q, α, β اعداد حقیقی
Roots of the characteristic equations: λ_1, λ_2 ریشه های معادلات مشخصه
Time: t زمان
Temperature: T, S دما
Population function: $P(t)$ تابع جمعیت
Mass of an object: m جرم جسم
Stiffness of a spring: k سفتی فنر
Displacement of the mass from equilibrium: y جابجایی جرم از تعادل
Amplitude of the displacement: A دامنه جابجایی
Frequency: ω فرکانس
Damping coefficient: γ ضریب میرایی
Phase angle of the displacement: δ زاویه فاز جابجایی
Angular displacement: θ جابجایی زاویه ای
Pendulum length: L طول پاندول

Acceleration of gravity: g شتاب گرانش
Current: I جریان
Resistance: R مقاومت
Inductance: L ضریب القایی (اندوکتانس)
Capacitance: C ظرفیت (خازن)

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

10.1 First Order Ordinary Differential Equations

1164. Linear Equations معادلات خطی

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

The general solution is حل کلی برابر است با

$$y = \frac{\int u(x)q(x)dx + C}{u(x)},$$

where که در آن

$$u(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right).$$

1165. Separable Equations معادلات جداشونده

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = g(x)h(y)$$

The general solution is given by حل کلی برابر است با

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C,$$

or یا

$$H(y) = G(x) + C.$$

1166. Homogeneous Equations معادلات همگن

The differential equation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ is homogeneous, if the function $f(x, y)$ is homogeneous, that is $f(tx, ty) = f(x, y)$.

معادله دیفرانسیل dy/dx=f(x,y) همگن است، اگر تابع f(x,y) همگن باشد، یعنی f(tx,ty)=f(x,y).

The substitution $z = \frac{y}{x}$ (then $y = zx$) leads to the separable equation

$$x\frac{dz}{dx} + z = f(1, z).$$

جایگذاری z=y/x (آنگاه y=zx) منجر به پیدایش این معادله جداشونده می شود.

1167. Bernoulli Equation معادله برنولی

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n.$$

جایگذاری $z=y^{1-n}$ منجر به معادله خطی زیر می شود.

The substitution $z = y^{1-n}$ leads to the linear equation

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

1168. Riccati Equation معادله ریکاتی

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$$

If a particular solution y_1 is known, then the general solution can be obtained with the help of substitution

$z = \frac{1}{y - y_1}$, which leads to the first order linear equation

$$\frac{dz}{dx} = -[q(x) + 2y_1 r(x)]z - r(x).$$

اگر جواب خاص y_1 معلوم باشد، آنگاه حل کلی را می توان با کمک جایگذاری $z=1/(y-y_1)$ به دست آورد، که منجر به این معادله خطی مرتبه اول می شود.

1169. Exact and Nonexact Equations معادلات دقیق و غیردقیق
The equation معادله
$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$
is called exact if دقیق نامیده می شود اگر
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},$$
and nonexact otherwise. و در غیر این صورت غیر دقیق است.

The general solution is حل کلی برابر است با
$$\int M(x,y)dx+\int N(x,y)dy=C.$$

1170. Radioactive Decay تجزیه رادیواکتیو
$$\frac{dy}{dt}=-ky,$$
که در آن $y(t)$ مقدار عنصر رادیواکتیو در زمان t، و k نرخ تجزیه است.
where $y(t)$ is the amount of radioactive element at time t, k is the rate of decay.
جواب برابر است با
The solution is
که در آن $y_0=y(0)$ مقدار اولیه است.
$y(t)=y_0e^{-kt}$, where $y_0=y(0)$ is the initial amount.

قانون خنک شدن نیوتون
1171. Newton's Law of Cooling
$$\frac{dT}{dt}=-k(T-S),$$
که در آن $T(t)$ دمای جسم در زمان t، S دمای محیط اطراف، k ثابت مثبت است.
where $T(t)$ is the temperature of an object at time t, S is the temperature of the surrounding environment, k is a positive constant.

The solution is جواب برابر است با
$$T(t)=S+(T_0-S)e^{-kt},$$
where $T_0=T(0)$ is the initial temperature of the object at time $t=0$. که در آن $T_0=T(0)$ دمای اولیه جسم در زمان $t=0$ است.

دینامیک جمعیت (مدل آمایش)

1172. Population Dynamics (Logistic Model)

$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$, که در آن P(t) جمعیت در زمان t، k ثابت مثبت، M اندازه حدی برای جمعیت است.

where $P(t)$ is population at time t, k is a positive constant, M is a limiting size for the population.

جواب معادله دیفرانسیل برابر است با

The solution of the differential equation is

$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kt}}$, where $P_0 = P(0)$ is the initial population at time $t = 0$. که در آن $P_0=P(0)$ جمعیت اولیه در زمان t=0 است.

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم

10.2 Second Order Ordinary Differential Equations

معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت

1173. Homogeneous Linear Equations with Constant Coefficients

$y'' + py' + qy = 0$. معادله مشخصه برابر است با

The characteristic equation is

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

اگر λ_1 و λ_2 ریشه های حقیقی متمایز معادله مشخصه باشند، آنگاه جواب عمومی برابر است با

If λ_1 and λ_2 are distinct real roots of the characteristic equation, then the general solution is

$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, where که در آن C_1 و C_2 ثوابت انتگرال گیری اند.

C_1 and C_2 are integration constants.

اگر $\lambda_1=\lambda_2=-p/2$، آنگاه جواب عمومی برابر است با

If $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$, then the general solution is

$y = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{p}{2}x}$.

If λ_1 and λ_2 are complex numbers: اگر $\lambda_1=\lambda_2$ اعداد مختلط باشند:

$\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, where که در آن

$\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$,

then the general solution is

$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

معادلات خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت

1174. Inhomogeneous Linear Equations with Constant Coefficients

$y'' + py' + qy = f(x)$.

جواب عمومی برابر است با

The general solution is given by

$y = y_p + y_h$, where

y_p جواب خاص معادله غیرهمگن است و

y_h جواب عمومی معادله همگن مرتبط

(موضوع پیشین ۱۱۷۳ را ببینید).

y_p is a particular solution of the inhomogeneous equation and y_h is the general solution of the associated homogeneous equation (see the previous topic 1173).

اگر سمت راست شکل زیر را داشته باشد

If the right side has the form

$f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_1(x)\sin\beta x)$, آنگاه جواب خاص y_p برابر است با

then the particular solution y_p is given by

$y_p = x^k e^{\alpha x}(R_1(x)\cos\beta x + R_2(x)\sin\beta x)$,

که در آن چندجمله ای های $R_1(x)$ و $R_2(x)$ با استفاده از روش ضرایب نامعین به دست می آیند.

where the polynomials $R_1(x)$ and $R_2(x)$ have to be found by using the method of undetermined coefficients.

- If $\alpha + \beta i$ is not a root of the characteristic equation, then the power $k = 0$, اگر $\alpha+\beta i$ ریشه معادله مشخصه نباشد، آنگاه توان $k=0$ است.
- If $\alpha + \beta i$ is a simple root, then $k = 1$, اگر $\alpha+\beta i$ ریشه ساده باشد، آنگاه $k=1$ است.
- If $\alpha + \beta i$ is a double root, then $k = 2$. اگر $\alpha+\beta i$ ریشه دوگانه باشد، آنگاه $k=2$ است.

1175. Differential Equations with y Missing معادلات دیفرانسیل بدون وجود y

$y'' = f(x, y')$.

$u=y'$ را قرار دهید. آنگاه معادله جدید ارضا شده با u برابر است با

Set $u = y'$. Then the new equation satisfied by v is

$u' = f(x, u)$,

که معادله دیفرانسیل مرتبه اول است.

which is a first order differential equation.

1176. Differential Equations with x Missing معادلات دیفرانسیل بدون وجود x
$y'' = f(y, y')$.
Set $u = y'$. Since را قرار دهید. از آنجا که $u=y'$

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy},$$

we have داریم

$$u\frac{du}{dy} = f(y, u),$$

که معادله دیفرانسیل مرتبه اول است.
which is a first order differential equation.

1177. Free Undamped Vibrations ارتعاشات آزاد غیرمیرا شونده
The motion of a Mass on a Spring is described by the equation
حرکت جرم بر روی فنر با این معادله توصیف می شود

$$m\ddot{y} + ky = 0,$$

where که در آن
m جرم جسم است، k سفتی فنر است،
m is the mass of the object,
k is the stiffness of the spring,
y جابجایی جرم از تعادل است.
y is displacement of the mass from equilibrium.

The general solution is جواب عمومی برابر است با

$$y = A\cos(\omega_0 t - \delta),$$

where که در آن، A دامنه جابجایی است، ω_0 فرکانس پایه، دوره تناوب برابر است با $T=2\pi/\omega_0$،
A is the amplitude of the displacement,
ω_0 is the fundamental frequency, the period is $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$,
δ is phase angle of the displacement. δ زاویه فاز جابجایی است.
This is an example of simple harmonic motion.
این یک مثالی از حرکت نوسانی ساده است.

1178. Free Damped Vibrations ارتعاشات آزاد میراشده
$m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + ky = 0$, where
γ is the damping coefficient. که در آن γ ضریب میرایی است. سه حالت
There are 3 cases for the general solution: برای جواب کلی وجود دارد:

Case 1. $\gamma^2 > 4km$ (overdamped) حالت ۱. $\gamma^2>4km$ (بیش میرا شده)

$y(t)= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$,

where که در آن

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma-\sqrt{\gamma^2-4km}}{2m},\ \lambda_2 = \frac{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-4km}}{2m}.$$

Case 2. $\gamma^2 = 4km$ (critically damped) حالت ۲. $\gamma^2=4km$ (میرا شده بحرانی)

$y(t)=(A+Bt)e^{\lambda t}$,

where که در آن

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2m}.$$

Case 3. $\gamma^2 < 4km$ (underdamped) حالت ۳. $\gamma^2<4km$ (کم میرا شده)

$y(t)=e^{-\frac{\gamma}{2m}t}A\cos(\omega t-\delta)$, where که در آن

$$\omega = \sqrt{4km-\gamma^2}.$$

1179. Simple Pendulum آونگ ساده

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\theta = 0,$$

که در آن θ جابجایی زاویه ای، L طول آونگ، g شتاب گرانش است.

where θ is the angular displacement, L is the pendulum length, g is the acceleration of gravity.

جواب عمومی برای زوایای کوچک θ برابر است با

The general solution for small angles θ is

$\theta(t)=\theta_{max}\sin\sqrt{\frac{g}{L}}t$, the period is $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

دوره تناوب برابر است با

1180. RLC Circuit مدار RLC

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I = V'(t) = \omega E_0\cos(\omega t),$$

که در آن I جریان در مدار RLC با یک منبع ولتاژ ac (متناوب) $V(t)=E_0 \sin(\omega t)$ است.

where I is the current in an RLC circuit with an ac voltage source $V(t)=E_0 \sin(\omega t)$.

The general solution is جواب عمومی برابر است با

$$I(t)=C_1 e^{r_1 t}+C_2 e^{r_2 t}+A\sin(\omega t-\varphi),$$

where که در آن

$$r_{1,2}=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L},$$

$$A=\frac{\omega E_0}{\sqrt{\left(L\omega^2-\frac{1}{C}\right)^2+R^2\omega^2}},$$

$$\varphi=\arctan\left(\frac{L\omega}{R}-\frac{1}{RC\omega}\right),$$

C_1، C_2 ثابتهای وابسته به شرایط اولیه می باشند.

C_1, C_2 are constants depending on initial conditions.

برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

10.3. Some Partial Differential Equations

1181. The Laplace Equation معادله لاپلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

به تابع انرژی پتانسیل $u(x,y)$ برای میدان نیروی پایستار اعمال می شود.
معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی از این نوع، بیضوی نامیده می شوند.

applies to potential energy function $u(x,y)$ for a conservative force field in the xy-plane. Partial differential equations of this type are called elliptic.

1182. The Heat Equation معادله گرما

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

که هنگامی که گرما از مناطق گرم به مناطق سرد جریان می یابد به توزیع دما u(x,y) در صفحه xy اعمال می شود.
معادلات از این نوع، سهموی نامیده می شوند.

applies to the temperature distribution $u(x,y)$ in the xy-plane when heat is allowed to flow from warm areas to cool ones. The equations of this type are called parabolic.

1183. The Wave Equation معادله موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

applies to the displacement $u(x,y)$ of vibrating membranes and other wave functions. The equations of this type are called hyperbolic.

به تابع جابجایی u(x,y) غشاهای در حال ارتعاش و دیگر توابع موج اعمال می شود. معادلات از این نوع، هذلولی نامیده می شوند.

فصل ۱۱ Chapter 11

سریها Series

11.1 Arithmetic Series سریهای حسابی

Initial term: a_1 عبارت اولیه

Nth term: a_n عبارت N ام

Difference between successive terms: d اختلاف میان عبارات متوالی

Number of terms in the series: n تعداد عبارات در سری

Sum of the first n terms: S_n مجموع n عبارت نخست

1184. $a_n = a_{n-1} + d = a_{n-2} + 2d = \ldots = a_1 + (n-1)d$

1185. $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_i + a_{n+1-i}$

1186. $a_i = \dfrac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}$

1187. $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

11.2 Geometric Series سریهای هندسی

Initial term: a_1 عبارت اولیه
Nth term: a_n عبارت N ام
Common ratio: q نسبت به عمومی
Number of terms in the series: n تعداد عبارات در سری
Sum of the first n terms: S_n مجموع n عبارت نخست
Sum to infinity: S مجموع تا بی نهایت

1188. $a_n = qa_{n-1} = a_1 q^{n-1}$

1189. $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \ldots = a_i \cdot a_{n+1-i}$

1190. $a_i = \sqrt{a_{i-1} \cdot a_{i+1}}$

1191. $S_n = \dfrac{a_n q - a_1}{q-1} = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$

1192. $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$ برای $|q|<1$، مجموع S همچنان که $n \to \infty$ می باشد.
For $|q| < 1$, the sum S converges as $n \to \infty$.

11.3 Some Finite Series برخی از سریهای متناهی

Number of terms in the series: n تعداد عبارات در سری

1193. $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

1194. $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$

1195. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

1196. $k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+n-1)=\dfrac{n(2k+n-1)}{2}$

1197. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1198. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

1199. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

1200. $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$

1201. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots=2$

1202. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\ldots=1$

1203. $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)!}+\ldots=e$

11.4 Infinite Series سریهای نامتناهی

Sequence: $\{a_n\}$ توالی
First term: a_1 عبارت اول
Nth term: a_n عبارت N ام

1204. Infinite Series سریهای نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

1205. Nth Partial Sum مجموع جزیی N ام

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

1206. Convergence of Infinite Series همگرایی سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \text{, if } \lim_{n\to\infty} S_n = L$$

اگر

1207. Nth Term Test آزمون عبارت N ام

اگر سری زیر همگرا باشد، آنگاه

- If the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent, then $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- If $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, then the series is divergent.

اگر حد صفر نباشد آنگاه سری واگرا است.

11.5 Properties of Convergent Series خواص سریهای همگرا

Convergent Series: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ سریهای همگرا

Real number: c عدد حقیقی

1208. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$

1209. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = cA$.

11.6 Convergence Tests آزمونهای همگرایی

آزمون مقایسه

1210. The Comparison Test سریهای زیر به گونه ای است که برای همه n ها $0<a_n \le b_n$ برقرار است.

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ be series such that $0 < a_n \le b_n$ for all n.

اگر سری b_n همگرا باشد آنگاه سری a_n نیز همگرا است.

- If $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is convergent then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is also convergent.

اگر سری a_n واگرا باشد آنگاه سری b_n نیز واگرا است.

- If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergent then $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is also divergent.

1211. The Limit Comparison Test آزمون مقایسه حد

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ be series such that a_n and b_n are positive for all n. سریهای زیر به گونه ای است که برای همه n ها a_n و b_n مثبت است.

- If اگر $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ then آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ are either both convergent or both divergent. یا هر دو همگرا یا هر دو واگرا می باشند.
- If اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ then $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent implies that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is also convergent.

آنگاه همگرا بودن b_n به این معنی است که a_n نیز همگرا است.

- If $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ then $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent implies that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is also divergent.
  اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ آنگاه واگرا بودن b_n به این معنی است که a_n نیز واگرا است.

1212. p-series سری p

p-series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ converges for $p>1$ and diverges for $0<p\le 1$.

سری p برای $p>1$ همگرا است و برای $0<p\le1$ واگرا است.

1213. The Integral Test آزمون انتگرال

Let $f(x)$ be a function which is continuous, positive, and decreasing for all $x\ge 1$. The series $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)+\ldots$ converges if $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converges, and diverges if $\int_1^{n} f(x)dx\to\infty$ as $n\to\infty$.

تابع $f(x)$ تابعی است که برای تمامی $x\ge1$ پیوسته، مثبت و کاهنده است. سری زیر همگرا است اگر این انتگرال همگرا باشد، و واگرا است اگر همچنان که

1214. The Ratio Test آزمون نسبت

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a series with positive terms.

اگر a_n سری با عبارات مثبت باشد.

- اگر If $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent. آنگاه a_n همگرا است.
- اگر If $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergent. آنگاه a_n واگرا است.
- اگر If $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ may converge or diverge and the ratio test is inconclusive; some other tests must be used.
  آنگاه a_n می تواند همگرا یا واگرا باشد و آزمون نسبت نمی تواند قضاوت کند؛ از آزمونهای دیگر باید استفاده شود.

1215. The Root Test آزمون ریشه

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a series with positive terms. اگر a_n سری با عبارات مثبت باشد.

- اگر If $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent. آنگاه a_n همگرا است.
- اگر If $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergent. آنگاه a_n واگرا است.
- اگر If $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ may converge or diverge, but no conclusion can be drawn from this test.

آنگاه a_n می تواند همگرا یا واگرا باشد، اما نتیجه ای از این آزمون نمی توان به دست آورد.

11.7 Alternating Series سریهای متناوب

آزمون سریهای متناوب (قضیه لایبنیتز)

1216. The Alternating Series Test (Leibniz's Theorem)

اگر $\{a_n\}$ یک توالی از اعداد مثبت باشد به گونه ای که برای همه n ها $a_{n+1}<a_n$ باشد.

Let $\{a_n\}$ be a sequence of positive numbers such that

$a_{n+1} < a_n$ for all n.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

آنگاه سریهای متناوب و

Then the alternating series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ both converge. هر دو همگرا می باشند.

1217. Absolute Convergence همگرایی مطلق

- A series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is absolutely convergent if the series

سری a_n همگرای مطلق است اگر سری $|a_n|$ همگرا باشد.

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ is convergent.

اگر سری a_n همگرای مطلق باشد آنگاه این سری همگرا است.

- If the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is absolutely convergent then it is convergent.

1218. Conditional Convergence همگرایی مشروط

A series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is conditionally convergent if the series is convergent but is not absolutely convergent.

سری a_n همگرای مشروط است اگر همگرا باشد ولی همگرای مطلق نباشد.

11.8 Power Series سریهای توانی

Real numbers: x, x_0 اعداد حقیقی

Power series: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ سریهای توانی

Whole number: n عدد کامل

Radius of Convergence: R شعاع همگرایی

1219. Power Series in x سریهای توانی برحسب x

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

1220. Power Series in $(x-x_0)$ سریهای توانی برحسب $(x-x_0)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

بازه همگرایی

1221. Interval of Convergence

The set of those values of x for which the function $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ is convergent is called the interval of convergence.

مجموعه ای از مقادیر x که برای آن تابع f(x) همگرا است بازه همگرایی نامیده می شود.

1222. Radius of Convergence شعاع همگرایی

If the interval of convergence is $(x_0 - R, x_0 + R)$ for some $R \geq 0$, the R is called the radius of convergence. It is given as

اگر بازه همگرایی برای R≥0 برابر با (x_0-R,x_0+R) باشد، R شعاع همگرایی نامیده می شود. مقدار آن از رابطه زیر به دست می آید

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \text{ or } R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

مشتق و انتگرال سریهای توانی

11.9 Differentiation and Integration of Power Series

Continuous function: $f(x)$ تابع پیوسته

Power series: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ سریهای توانی

Whole number: n عدد کامل

Radius of Convergence: R شعاع همگرایی

مشتق سریهای توانی

1223. Differentiation of Power Series

در نظر بگیرید Let $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ for (برای) $|x| < R$.

Then, for $|x| < R$, $f(x)$ is continuous, the derivative $f'(x)$ exists and

آنگاه، برای $|x|<R$، تابع $f(x)$ پیوسته است، مشتق $f'(x)$ وجود دارد و

$$f'(x) = \frac{d}{dx} a_0 + \frac{d}{dx} a_1 x + \frac{d}{dx} a_2 x^2 + \ldots$$

$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

1224. Integration of Power Series انتگرال گیری از سریهای توانی

Let $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ for $|x|<R$. در نظر بگیرید برای

Then, for $|x|<R$, the indefinite integral $\int f(x)dx$ exists and

$$\int f(x)dx = \int a_0 dx + \int a_1 x dx + \int a_2 x^2 dx + \ldots$$

$$= a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

آنگاه، برای |x|<R، انتگرال نامعین f(x) وجود دارد و

سریهای تیلور و مک لورن

11.10 Taylor and Maclaurin Series

Whole number: n عدد کامل
Differentiable function: $f(x)$ تابع مشتق پذیر
Remainder term: R_n عبارت باقیمانده

1225. Taylor Series سری تیلور

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n.$$

1226. The Remainder After $n+1$ Terms is given by باقیمانده پس از n+1 عبارت برابر است با

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad a<\xi<x.$$

1227. Maclaurin Series سری مک لورن

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+R_n$$

بسطهای سریهای توانی برای برخی از توابع

11.11 Power Series Expansions for Some Functions

Whole number: n عدد کامل
Real number: x عدد حقیقی

1228. $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$

1229. $a^x = 1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+\frac{(x\ln a)^3}{3!}+\ldots+\frac{(x\ln a)^n}{n!}+\ldots$

1230. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\pm\ldots,\ -1<x\le 1.$

1231. $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right),\ |x|<1.$

1232. $\ln x=2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5\ldots\right],\ x>0.$

1233. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\pm\ldots$

1234. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \ldots$

1235. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \ldots,\ |x| < \frac{\pi}{2}.$

1236. $\cot x = \frac{1}{x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{2x^7}{4725} + \ldots\right),\ |x| < \pi.$

1237. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)(2n+1)} + \ldots,$
$|x| < 1.$

1238. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)(2n+1)} + \ldots\right),$
$|x| < 1.$

1239. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \pm \ldots,\ |x| \le 1.$

1240. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

1241. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$

11.12 Binomial Series سریهای دو جمله ای

Whole numbers: n, m اعداد کامل
Real number: x عدد حقیقی
Combinations: ${}^{n}C_{m}$ ترکیبها

1242. $(1+x)^n = 1 + {}^{n}C_1 x + {}^{n}C_2 x^2 + \ldots + {}^{m}C_n x^m + \ldots + x^n$

1243. ${}^{n}C_{m} = \dfrac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{m!}, \ |x|<1.$

1244. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \ |x|<1.$

1245. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \ |x|<1.$

1246. $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2\cdot 4} + \dfrac{1\cdot 3x^3}{2\cdot 4\cdot 6} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5x^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \ldots, \ |x|\le 1.$

1247. $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{1\cdot 2x^2}{3\cdot 6} + \dfrac{1\cdot 2\cdot 5x^3}{3\cdot 6\cdot 9} - \dfrac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8x^4}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} + \ldots, \ |x|\le 1.$

11.13 Fourier Series سریهای فوریه

Integrable function: $f(x)$ تابع انتگرال پذیر
Fourier coefficients: a_0, a_n, b_n ضرایب فوریه
Whole number: n عدد کامل

1248. $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$

1249. $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

1250. $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

فصل ۱۲ Chapter 12

احتمال Probability

12.1 Permutations and Combinations ترتیبها و ترکیبها

Permutations: ${}^{n}P_{m}$ ترتیبها

Combinations: ${}^{n}C_{m}$ ترکیبها

Whole numbers: n, m اعداد کامل

1251. Factorial فاکتوریل

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-2)(n-1)n$

$0! = 1$

1252. ${}^{n}P_{n} = n!$

1253. ${}^{n}P_{m} = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

1254. Binomial Coefficient ضرایب دو جمله ای

$${}^{n}C_{m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

1255. ${}^{n}C_{m} = {}^{n}C_{n-m}$

1256. ${}^{n}C_{m} + {}^{n}C_{m+1} = {}^{n+1}C_{m+1}$

1257. $^{n}C_0 + ^{n}C_1 + ^{n}C_2 + \ldots + ^{n}C_n = 2^n$

1258. Pascal's Triangle مثلث پاسکال

سطر 0 Row 0							1						
سطر 1 Row 1						1		1					
Row 2					1		2		1				
Row 3				1		3		3		1			
Row 4			1		4		6		4		1		
Row 5		1		5		10		10		5		1	
Row 6	1		6		15		20		15		6		1

12.2 Probability Formulas روابط احتمال

Events: A, B رویدادها
Probability: P احتمال
Random variables: X, Y, Z متغیرهای تصادفی
Values of random variables: x, y, z مقادیر متغیرهای تصادفی
Expected value of X: μ مقدار انتظاری X
Any positive real number: ε هر عدد حقیقی مثبت
Standard deviation: σ انحراف معیار
Variance: σ^2 واریانس
Density functions: $f(x)$, $f(t)$ توابع چگالی

1259. Probability of an Event احتمال یک رویداد

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

where
m is the number of possible positive outcomes,
n is the total number of possible outcomes.

که در آن
m تعداد خروجیهای مثبت ممکن،
n تعداد کل خروجیهای ممکن است.

1260. Range of Probability Values محدوده مقادیر احتمال
$0 \le P(A) \le 1$

1261. Certain Event رویداد حتمی
$P(A) = 1$

1262. Impossible Event رویداد ناممکن
$P(A) = 0$

1263. Complement مکمل
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

1264. Independent Events رویدادهای مستقل
$P(A/B) = P(A),$
$P(B/A) = P(B)$

1265. Addition Rule for Independent Events قاعده جمع برای رویدادهای مستقل
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (این فرمول غلط است! به دو فرمول بعدی توجه کنید [م.])

1266. Multiplication Rule for Independent Events قاعده ضرب برای رویدادهای مستقل
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

1267. General Addition Rule قاعده عمومی جمع
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$
where
$A \cup B$ is the union of events A and B,
$A \cap B$ is the intersection of events A and B.

که در آن
AUB اجتماع رویدادهای A و B است.
A∩B اشتراک رویدادهای A و B است.

1268. Conditional Probability احتمال مشروط
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1269. $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$

1270. Law of Total Probability قانون احتمال کل

$$P(A)=\sum_{i=1}^{m} P(B_i)P(A/B_i),$$

که در آن B_i توالی رویدادهای مستقل از یکدیگر است.

where B_i is a sequence of mutually exclusive events.

1271. Bayes' Theorem قضیه بایس

$$P(B/A)=\frac{P(A/B)\cdot P(B)}{P(A)}$$

1272. Bayes' Formula رابطه بایس

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{\sum_{k=1}^{m} P(B_i)\cdot P(A/B_i)},$$

که در آن

where

B_i مجموعه رویدادهای مستقل از یکدیگر (فرضیات) است.

B_i is a set of mutually exclusive events (hypotheses),

A رویداد نهایی است، $P(B_i)$ احتمالات پیشین است،

A is the final event,

$P(B_i)$ are the prior probabilities,

$P(B_i/A)$ احتمالات پسین است.

$P(B_i/A)$ are the posterior probabilities.

1273. Law of Large Numbers قانون اعداد بزرگ

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|\geq\varepsilon\right)\to 0 \text{ as } n\to\infty,$$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|<\varepsilon\right)\to 1 \text{ as } n\to\infty,$$

که در آن

where

S_n مجموع متغیرهای تصادفی است،

S_n is the sum of random variables,

N تعداد رویدادهای ممکن است.

n is the number of possible outcomes.

1274. Chebyshev Inequality نابرابری چبیشف

$$P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{V(X)}{\varepsilon^2},$$

where $V(X)$ is the variance of X. که در آن V(X) واریانس X است.

1275. Normal Density Function تابع چگالی نرمال

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

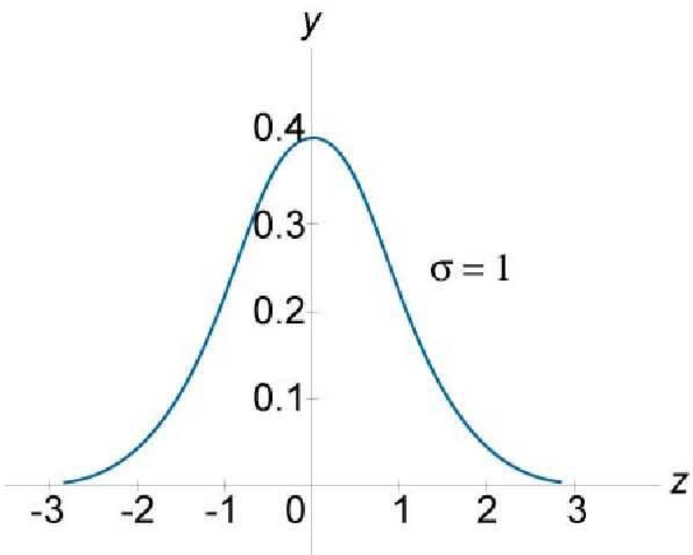
where x is a particular outcome. که در آن x خروجی خاص است.

1276. Standard Normal Density Function تابع چگالی نرمال استاندارد

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

مقدار میانگین μ=0، انحراف معیار σ=1.

Average value $\mu=0$, deviation $\sigma=1$.



شکل ۲۱۰
Figure 210.

1277. Standard Z Value مقدار استاندارد Z

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

تابع توزیع نرمال تجمعی

1278. Cumulative Normal Distribution Function

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,$$

که در آن

where

x is a particular outcome, x خروجی خاص است،

t is a variable of integration. t متغیر انتگرال گیری است.

1279. $P(\alpha < X < \beta) = F\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right)$,

که در آن

where

X is normally distributed random variable, X متغیر تصادفی با توزیع نرمال است،

F is cumulative normal distribution function, F تابع توزیع نرمال تجمعی است،

$P(\alpha < X < \beta)$ is interval probability. P(α<X<β) بازه احتمال است.

1280. $P(|X - \mu| < \varepsilon) = 2F\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$,

که در آن

where

X is normally distributed random variable, X متغیر تصادفی با توزیع نرمال است،

F is cumulative normal distribution function. F تابع توزیع نرمال تجمعی است.

1281. Cumulative Distribution Function تابع توزیع تجمعی

$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$,

where t is a variable of integration. که در آن t متغیر انتگرال گیری است.

1282. Bernoulli Trials Process فرآیند آزمونهای برنولی

$\mu = np \quad , \sigma^2 = npq$,

که در آن n توالی آزمایشها است، p احتمال موفقیت هر آزمایش است، q احتمال شکست است، q=1-p.

where

n is a sequence of experiments,

p is the probability of success of each experiments,

q is the probability of failure, $q = 1 - p$.

1283. Binomial Distribution Function تابع توزیع دو جمله ای

$b(n,p,q) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$,

$\mu = np$, $\sigma^2 = npq$,

$f(x) = (q + pe^x)^n$,

where

n is the number of trials of selections,

p is the probability of success,

q is the probability of failure, $q = 1 - p$.

که در آن n تعداد تلاشهای انتخابها است، p احتمال موفقیت، q احتمال شکست است، q=1-p.

1284. Geometric Distribution توزیع هندسی

$P(T = j) = q^{j-1}p$,

$\mu = \frac{1}{p}$, $\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$,

where

T is the first successful event is the series,

j is the event number,

p is the probability that any one event is successful,

q is the probability of failure, $q = 1 - p$.

که در آن T نخستین رویداد موفق در سری است، j شماره رویداد است، p احتمال موفق بودن هر یک از رویدادها است، q احتمال شکست است، q=1-p.

1285. Poisson Distribution توزیع پواسون

$P(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\lambda = np$,

$\mu = \lambda$, $\sigma^2 = \lambda$,

where

λ is the rate of occurrence,

k is the number of positive outcomes.

که در آن λ نرخ رخداد، k تعداد خروجیهای مثبت است.

1286. Density Function تابع چگالی

$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$

1287. Continuous Uniform Density چگالی یکنواخت پیوسته

$f = \frac{1}{b-a}$, $\mu = \frac{a+b}{2}$, where f is the density function. که در آن f تابع چگالی است.

1288. Exponential Density Function تابع چگالی نمایی

$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $\mu = \lambda$, $\sigma^2 = \lambda^2$

where t is time, λ is the failure rate. که در آن t زمان، λ نرخ شکست است.

1289. Exponential Distribution Function تابع توزیع نمایی

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$,

where t is time, λ is the failure rate. که در آن t زمان، λ نرخ شکست است.

مقدار انتظاری متغیرهای تصادفی گسسته

1290. Expected Value of Discrete Random Variables

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i ,$$

که در آن x_i خروجی خاص، p_i احتمال مربوط به آن است.

where x_i is a particular outcome, p_i is its probability.

مقدار انتظاری متغیرهای تصادفی پیوسته

1291. Expected Value of Continuous Random Variables

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

1292. Properties of Expectations ویژگیهای مقادیر انتظاری

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$,

$E(X-Y) = E(X) - E(Y)$,

$E(cX) = cE(X)$,

$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$,

where c is a constant. که در آن c ثابت است.

1293. $E(X^2) = V(X) + \mu^2$,

where

$\mu = E(X)$ is the expected value, که در آن μ=E(X) مقدار انتظاری

$V(X)$ is the variance. است، V(X) واریانس است.

1294. Markov Inequality نابرابری مارکوف

$$P(X > k) \leq \frac{E(X)}{k},$$

where k is some constant. که در آن k مقداری ثابت است.

1295. Variance of Discrete Random Variables واریانس متغیرهای تصادفی گسسته

$$\sigma^2 = V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i \,,$$

where
x_i is a particular outcome,
p_i is its probability.

که در آن x_i خروجی خاص، p_i احتمال مربوط به آن است.

واریانس متغیرهای تصادفی پیوسته

1296. Variance of Continuous Random Variables

$$\sigma^2 = V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

1297. Properties of Variance ویژگیهای واریانس

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y),$$
$$V(X-Y) = V(X) + V(Y),$$
$$V(X+c) = V(X),$$
$$V(cX) = c^2 V(X),$$

where c is a constant. که در آن c ثابت است.

1298. Standard Deviation انحراف معیار

$$D(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E\left[(X-\mu)^2\right]}$$

1299. Covariance کوواریانس

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\left[(X-\mu(X))(Y-\mu(Y))\right] = E(XY) - \mu(X)\mu(Y),$$

where
X is random variable,
$V(X)$ is the variance of X,
μ is the expected value of X or Y.

که در آن X متغیر تصادفی است، V(X) واریانس X است، μ مقدار انتظاری X یا Y است.

1300. Correlation همبستگی

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}},$$

where
$V(X)$ is the variance of X,
$V(Y)$ is the variance of Y.

که در آن V(X) واریانس X است،
V(Y) واریانس Y است.