

واحد های کمان و زاویه:

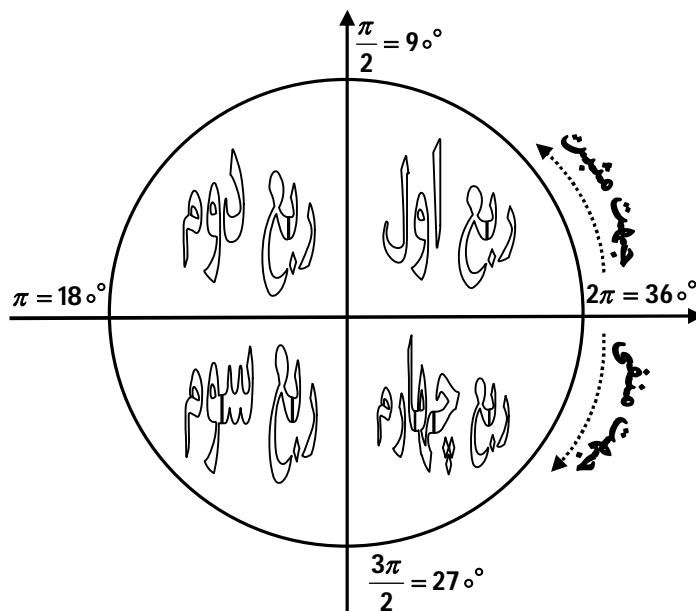
درجه: اگر محیط دایره را به 360 قسمت مساوی تقسیم کنیم، به هر قسمت یک درجه گفته می شود.
 رادیان: رادیان طول کمانی از دایره است برابر شعاع دایره است.

$$\begin{array}{c} \times \frac{\pi}{180} \\ \text{رادیان} \leftarrow \text{درجه} \\ \frac{180}{\pi} \times \end{array}$$

تبدیل واحد درجه به رادیان: برای این کار زاویه را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب می کنیم
 تبدیل واحد رادیان به درجه: برای این کار زاویه را در $\frac{180}{\pi}$ ضرب می کنیم

$$1R \approx 57^\circ \approx 60^\circ \quad \text{پارازیت: هر رادیان تقریباً } 57/5^\circ \text{ است}$$

دایره ی مثلثاتی: دایره ای به شعاع 1 واحد می باشد. در این دایره جهت مثبت، خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت است



مثال 1: انتهای کمان زاویه ی 9- رادیان در کدام ناحیه ی مثلثاتی قرار دارد؟

1) اول 2) دوم 3) سوم 4) چهارم

پاسخ: **بیا اول رادیان رو به درجه تبدیل کنیم** $-9 \times 57^\circ = -513^\circ$

فوق روی دایره ی مثلثاتی داری میبینی که هر 360° بزمی گردیم سر جای اول مون پس از -513° به 360° رو می ریزیم دور 0 می مونه -153° در ضمن چون ضرب منفی داریم باید در جهت منفی دایره مثلثاتی برگردیم که آنگاه 153° در جهت منفی دایره ی مثلثاتی برگردیم میرسیم به ربع سوم

مثال 2: اگر زاویه ی 16° در یک دایره، کمانی به طول 24 سانتی متر اجدا کند، شعاع دایره چند سانتی متر است؟

($\pi = 3$)

پاسخ: **یادت باشه در فرمول روبرو مهمترین مورد اینه که زاویه باید بر حسب رادیان باشه.**
 پس اول زاویه رو به رادیان تبدیل کنیم

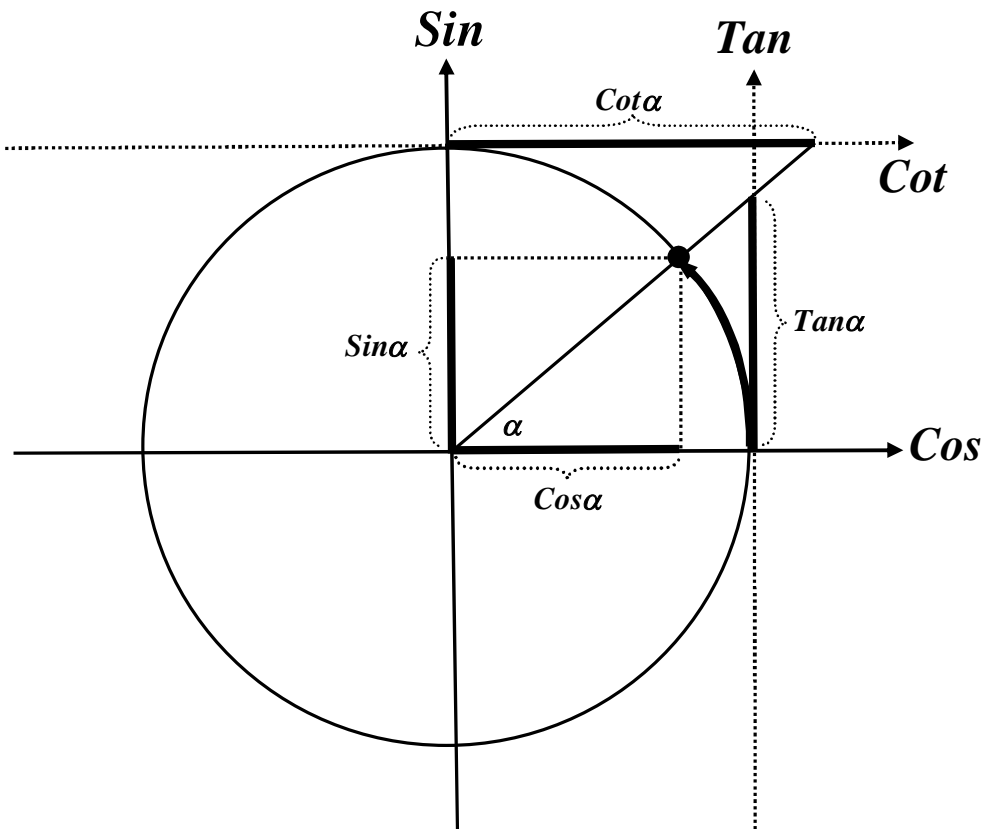
$$\alpha = 16^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{8\pi}{9} \quad \frac{\pi=3}{\rightarrow} \frac{8 \times 3}{9} = \frac{8}{3}$$

حالا بریم شعاع رو از رابطه بدست بیاریم

$$L = r \cdot \alpha \rightarrow 24 = r \times \frac{8}{3} \rightarrow r = 9$$



دایره و نسبت های مثلثاتی :



پارازیت مهم :
مختصات یک نقطه رو دایره
(Cos α , Sin α)
عرض طول



مثال 3: چه مدت طول می کشد تا عقربه ی دقیقه شمار، به اندازه ی $2/5\pi$ رادیان دوران کند؟
(1) 65 دقیقه (2) 70 دقیقه (3) 75 دقیقه (4) 80 دقیقه

پاسخ : میدونی که فاصله ی بین هر یک ساعت 60 دقیقه طول می کشه

پس یک دور کامل دایره یعنی 2π رادیان معادل با 60 دقیقه است حالا ببینیم $2/5\pi$ رادیان معادل چند دقیقه است

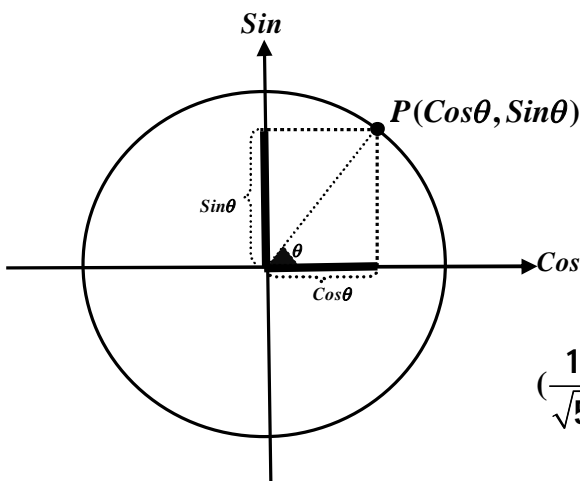
$$\frac{2\pi}{2/5\pi} = \frac{60}{?} \rightarrow 60 \times 2/5\pi = 2\pi \times ? \rightarrow ? = 75 \text{ min}$$

مثال 4: زاویه ی θ رادرموقعیت استاندارد در نظر بگیرید . اگر نقطه ی انتهایی کمان θ دایره ی مثلثاتی رادرنقطه ی

$(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ قطع کند ، مقدار $Tan\theta - Cot\theta$ کدام است؟

- (1) $\frac{3}{2}$ (2) $-\frac{3}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $-\frac{5}{2}$

پاسخ : روی دایره داری میبینی که طول نقطه روی دایره Cos زاویه رو نشون میده و عرض نقطه ، Sin رو نشون میده

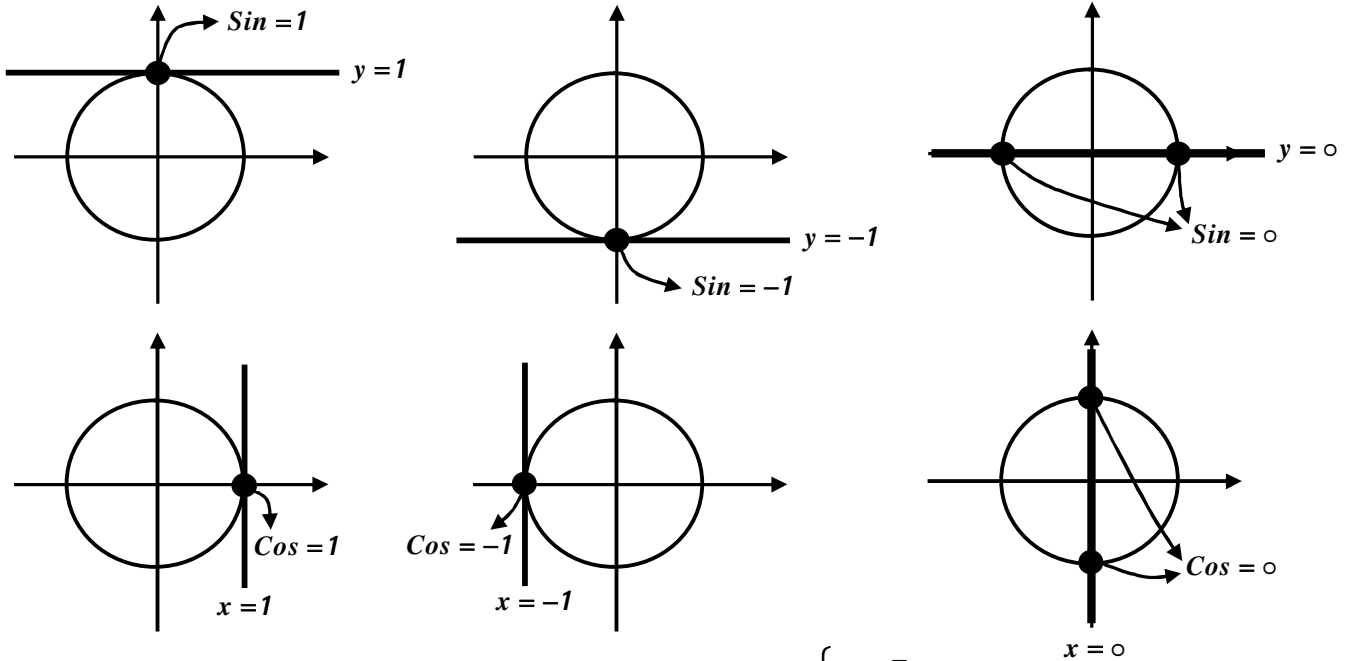


$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \rightarrow \begin{cases} Sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ Cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Tan\theta = \frac{Sin\theta}{Cos\theta} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = -2 \\ \Rightarrow Cot\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Tan\theta - Cot\theta = -2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$



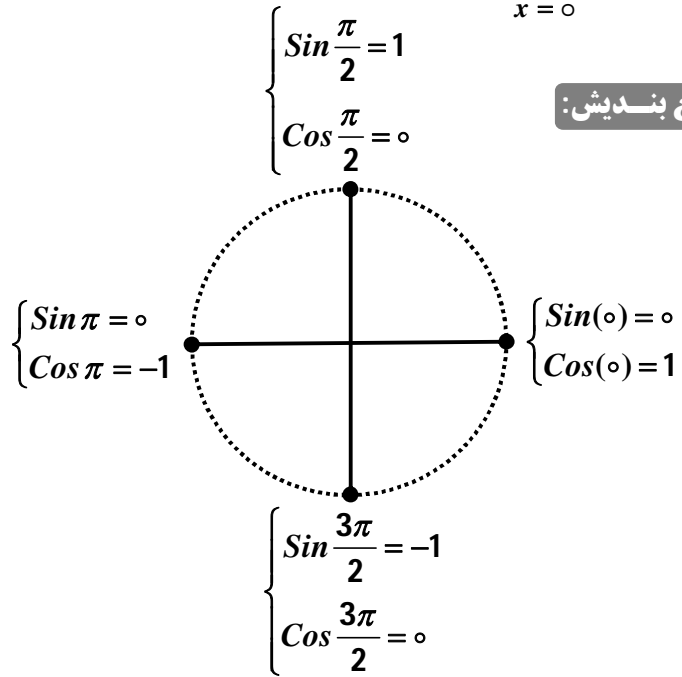
حالا که فهمیدیم طول یا x معادل \cos است و عرض یا y معادل \sin است پس:



نسبت های مثلثاتی زوایای معروف:

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
\sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
\cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
\tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
\cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

جمع بندیش:



مثال 5: اگر $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ باشد حاصل $\frac{\sin^2 x + 2\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{6} + \cot x}$ کدام است؟

- 1 (4) 2 (3) 3 (2) 4 (1)

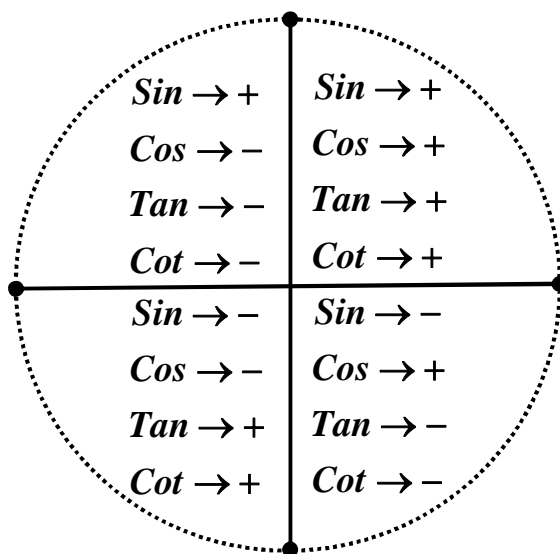
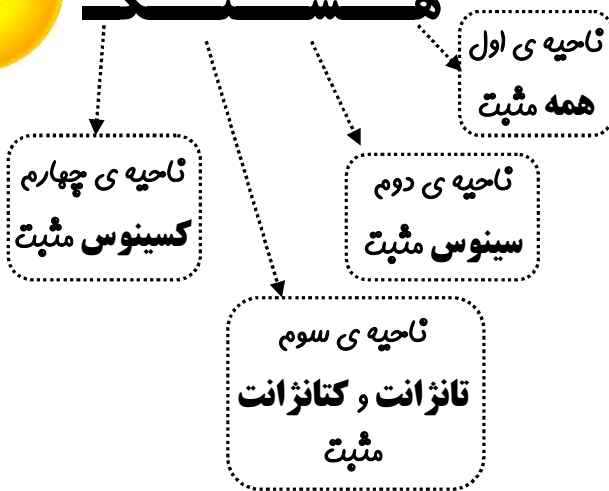
چربیازی:



علامت نسبت های مثلثاتی در نواحی چهار گانه:



هستند



مثال 6: اگر $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$ و $\cos \alpha \cdot \tan \alpha < 0$ باشد آن گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه ی مثلثاتی است؟

- 1) اول (2) دوم (3) سوم (4) چهارم

پاسخ:

مثال 7: اگر $\sin x + \tan x > 0$ و $\frac{1}{\cos x} - \sin x \cdot \tan x < 0$ باشد آن گاه انتهای کمان x در کدام ناحیه است؟

- 1) اول (2) دوم (3) سوم (4) چهارم

پاسخ:

$$\frac{1}{\cos x} - \sin x \cdot \tan x < 0 \rightarrow \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{\cos x} < 0 \rightarrow \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} < 0 \rightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos x} < 0 \rightarrow \cos x < 0$$

فیب تو کدوم ناحیه ها $\cos x$ منفی بود؟؟؟ . باریکلا ناحیه های دوم یا سوم . حالا ببریم سراغ اون یکی رابطه از اینجا به بعد برای این که بفهمیم با توجه به $\sin x + \tan x > 0$ ، x در کدام ناحیه است دو تاره داریم

راه دوم:

راه اول:

$$\sin x + \tan x > 0 \rightarrow \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} > 0 \text{ از } \sin x \text{ فاکتور می گیریم}$$

$$\sin x \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) > 0 \rightarrow \sin x \left(\frac{1 + \cos x}{\cos x}\right) > 0$$

$$\rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \times (1 + \cos x) > 0 \rightarrow \tan x \times (1 + \cos x) > 0$$

چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ است پس:

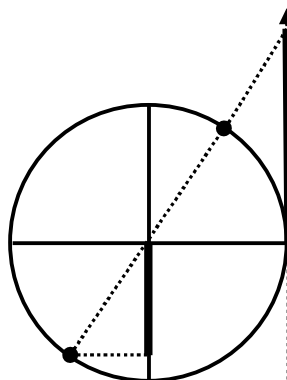
$$0 \leq (1 + \cos x) \leq 2$$

همواره نامنفی است

$$\tan x > 0$$

فیب $\tan x$ تو کدوم ناحیه ها مثبت بود؟ درست ناحیه های اول و سوم .

پس اشتراک ناحیه ها همیشه ناحیه ی سوم



روابط زاویه های مثلثاتی :

نحوه ی محاسبه	نوع زاویه
با توجه به اینکه زاویه در کدام ربع قرار دارد . به کمک قانون "هستک" علامت را می یابیم و نسبت مثلثاتی را برای زاویه ی α محاسبه می کنیم	$2\pi \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ یا $36^\circ \pm \alpha$, $18^\circ \pm \alpha$
مانند بالا عمل می کنیم با این تفاوت که پس از یافتن علامت ، تغییر فاز می دهیم یعنی :	$\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ یا $27^\circ \pm \alpha$, $9^\circ \pm \alpha$
فقط Cos منفی خ ور است بقیه منفی داخل کمان رو پرت می کنن بیرون !!	$-\alpha$
"مضارب زوج π روحذف کن و به جای "مضارب فرد π ،" فقط π رو قرار بده	$2k\pi \pm \alpha$, $(2k + 1)\pi \pm \alpha$

عبارت های زیر را ساده کنید :

$$1) \cos \frac{3\pi}{4} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$2) \sin \frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = +\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$3) \tan \frac{7\pi}{6} = \tan(\pi + \frac{\pi}{6}) = +\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$4) \cos \frac{11\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = +\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$5) \sin \frac{9\pi}{4} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = +\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$6) \cos \frac{5\pi}{12} = \cos(\frac{6\pi}{12} - \frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) = +\sin \frac{\pi}{12}$$



$$7) \sin 11^\circ = \sin(\frac{\pi}{2} + 2^\circ) = +\cos 2^\circ$$

$$8) \cos 25^\circ = \cos(\frac{3\pi}{2} - 2^\circ) = -\sin 2^\circ$$

$$9) \tan \frac{3\pi}{8} = \tan(\frac{4\pi}{8} - \frac{\pi}{8}) = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) = +\cot \frac{\pi}{8}$$

زندگی زیاتر از اون چیزست که ما می پنداریم . . حتی در بدترین شرایط! فقط کافیت که به خاطر داشته باشیم: درست نگاه کنیم ، درست

فکر کنیم ، درست تصمیم بگیریم و هرگز فراموش نکنیم که "خدا بزرگ است"



$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= +\cos\alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha \end{aligned}$$

$$10) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$11) \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\frac{3\pi}{4} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$12) \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$13) \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = \frac{-1}{2}$$

Cos منفی خور است

نتیجه: به جز Cos، برای سایر نسبتهای مثلثاتی اگر داخل کمان تفاضل بود و جای دو عبارت رو عوض کنیم باید یک منفی بزاریم پشت نسبت مثلثاتی

$$14) \sin(x - \pi) = -\sin(\pi - x) = -(+\sin x) = -\sin x$$

$$15) \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -(+\cot x) = -\cot x$$

$$16) \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = +\sin\frac{\pi}{8}$$

$$\begin{aligned} \sin(a - b) &= -\sin(b - a) \\ \cos(a - b) &= +\cos(b - a) \\ \tan(a - b) &= -\tan(b - a) \\ \cot(a - b) &= -\cot(b - a) \end{aligned}$$

یادآوری از صفحه ی قبلی: "مضارب زوج π" رو حذف کن و به جای "مضارب فرد π"، فقط π رو قرار بده

$$17) \cos(37\pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$18) \sin\left(\frac{37\pi}{3} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{36\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin\left(12\pi + \frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$19) \sin(49\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

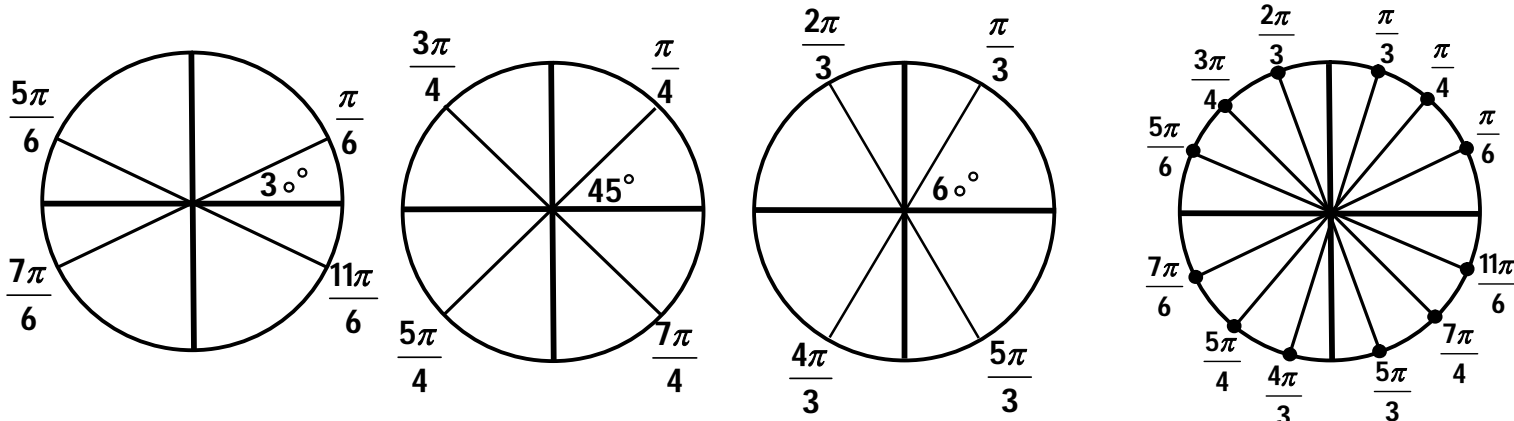
$$20) \cos\left(\frac{13\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(6\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$21) \tan\left(\frac{37\pi}{3} - \alpha\right) = \tan\left(12\pi + \frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$22) \cot\left(\frac{23\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(11\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$$



خانواده های زاویه های پُر کاربرد :



برای محاسبه ی مقدار نسبت های مثلثاتی برای خانواده های $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{6}$ ، ابتدا باید ببینیم اونو در کدوم ناحیه ی مثلثاتی هستن. بعدشم علامت نسبت مثلثاتی رو در اون ناحیه در نظر می گیریم و در آخر عددی که بغل π توی صورت قرار گرفته رو بیخیال میشیم و نسبت مثلثاتی رو حساب می کنیم

برای دونستن این که یک زاویه از خانواده های $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{6}$ در کدام ناحیه هستن به نکات زیر دقت کنید

- 1
- 2
- 3
- 4



مثال 8: مقادیر زیر را حساب کنید :

الف : $Tan \frac{3\pi}{4} = ?$

راه اول : $Tan(\frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = Tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -Tan(\frac{\pi}{4}) = -1$

راه دوم : $Tan(\frac{3\pi}{4}) \xrightarrow[Tan(\frac{\pi}{4}) = 1]{\text{صورت از مفرج یک واحد کمتر}} -1$
ربع دوم و در ربع دوم تانژانت منفی است

ب : $Sin \frac{7\pi}{6} = ?$

راه اول :

راه دوم :

می گویند ملا نصرالدین از همسایه اش دیگی را قرض گرفت. چند روز بعد دیگ را به همراه دیگی کوچک به او پس داد. وقتی همسایه قصه دیگ اضافی را پرسید ملا گفت دیگ شما در خانه ما وضع حمل کرد. چند روز بعد، ملا دوباره برای قرض گرفتن دیگ به سراغ همسایه رفت و همسایه خوش خیال این بار دیگی بزرگتر به ملا داد به این امید که دیگچه بزرگتری نصیبش شود. تا مدتی از ملا نصرالدین خبری نشد. همسایه به در خانه ملا رفت و سراغ دیگ خود را گرفت. ملا گفت دیگ شما در خانه ما فوت کرد. همسایه گفت مگر دیگ هم می می میرد و جواب شنید: چرا روزی که گفتم دیگ تو زاییده نگفتی که دیگ نمی زاید. دیگی که می زاید حتما مردن هم دارد.

و این حکایت اغلب ما مردم است هر جا که به نفع ما باشد عجیب ترین دروغ ها رو باور می کنیم اما کوچکترین ضرر رو قبول نمی کنیم !!



مهندسی یغما کلاتریان

مثلثات

مثال 9: اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ باشد و انتهای کمان α در ناحیه دوم باشد مقدار $\cos \alpha$ چقدر است؟

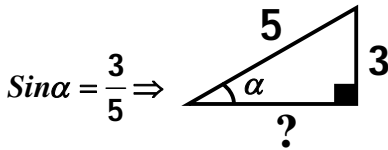
- (1) $-\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{1}{4}$ (3) $-\frac{4}{5}$ (4) $-\frac{2}{5}$

پاسخ

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

ربع دوم $\cos \alpha < 0 \rightarrow -\frac{4}{5}$

یه جور دیگه



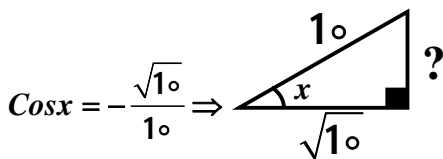
اعداد فیثاغورث خیلی پدرد بخورن

- 3, 4, 5
5, 12, 13
8, 15, 17



مثال 10: اگر $\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ و انتهای کمان x در ناحیه سوم دایره ی مثلثاتی باشد، $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ کدام است؟

- (1) -3 (2) $-\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) 3



پاسخ اولاً فواسته ی مسئله $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ رو آله ساره کنی میشه $+Cotx$

پون کمان $\frac{3\pi}{2} - x$ در ربع 3 است پس علامت مثبت رو در نظر می گیریم پس مسئله $\cos x$ داده و $Cotx$ رو میفواد که ما از راه مثلث هاش می کنیم

رابطه ی فیثاغورث $(10)^2 = (\sqrt{10})^2 + ?^2 \rightarrow 100 = 10 + ?^2 \rightarrow ? = \sqrt{90} \Rightarrow Cotx = +\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = +\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{90}} = \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{10}} = +\frac{1}{3}$

مثال 11: اگر $Cotx = 2$ باشد، حاصل $\frac{2\sin x + \cos x}{\sin x - 2\cos x}$ کدام است؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) $-\frac{3}{4}$ (4) $-\frac{4}{3}$

پاسخ

$Cotx = 2 \rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \rightarrow \cos x = 2\sin x$

$$\frac{2\sin x + \cos x}{\sin x - 2\cos x} \xrightarrow{\cos x = 2\sin x} \frac{2\sin x + (2\sin x)}{\sin x - 2(2\sin x)} = \frac{4\sin x}{\sin x - 4\sin x} = \frac{4\sin x}{-3\sin x} = -\frac{4}{3}$$

یه جور دیگه

$$\frac{2\sin x + \cos x}{\sin x - 2\cos x} \xrightarrow{\div \sin x} \frac{\frac{2\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\sin x} - \frac{2\cos x}{\sin x}} = \frac{2 + Cotx}{1 - 2Cotx}$$

$$\frac{2 + Cotx}{1 - 2Cotx} \xrightarrow{Cotx = 2} \frac{2 + 2}{1 - 2(2)} = \frac{4}{-3}$$




مثال 12: با توجه به تساوی $2 = \frac{2\sin(\alpha - 3\pi) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}$ مقدار $\tan \alpha$ ، کدام است؟

(1) -2 (2) -1/5 (3) 2 (4) 1/5

پاسخ در گام اول پای کمان هارو عوض کنیم تا راحت تر از اونجا عبور کنیم و بتونیم علامت نامیه ای که در آن هستیم رو اعمال کنیم

$$\frac{2\sin(\alpha - 3\pi) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = 2 \rightarrow \frac{-2\sin(3\pi - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = 2 \rightarrow \frac{-2\sin(\pi - \alpha) + \sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = 2$$

$$\frac{-2\sin(\alpha) + \sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = 2 \rightarrow \frac{-\sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = 2 \rightarrow \tan \alpha = 2$$

مثال 13: اگر $\tan 35^\circ = a - 2$ باشد ، مقدار $\frac{\sin 145^\circ - 2\sin 235^\circ}{\cos 325^\circ}$ کدام است؟ 

(مشابه سراسری تجربی داخل 84 و ریاضی 91)

(1) $a + 2$ (2) $2a - 4$ (3) $2a$ (4) a

پاسخ همه ی زاویه های داده شده رو بر حسب 35° می بینیم

$$\frac{\sin 145^\circ - 2\sin 235^\circ}{\cos 325^\circ} = \frac{\sin(\pi - 35^\circ) - 2\sin(\frac{3\pi}{2} - 35^\circ)}{\cos(2\pi - 35^\circ)} = \frac{\sin 35^\circ + 2\cos 35^\circ}{\cos 35^\circ}$$

$$\xrightarrow{\div \cos 35^\circ} \frac{\tan 35^\circ + 2}{1} \quad \tan 35^\circ = a - 2 \rightarrow a - 2 + 2 = a$$

مثال 14: حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ = \frac{1}{28}$ ، کدام است؟ (سراسری داخل تجربی 94)

(1) $-\frac{16}{9}$ (2) $-\frac{9}{16}$ (3) $\frac{9}{16}$ (4) $\frac{16}{9}$

پاسخ



روابط زوایای متمم :

اگر مجموع دو زاویه 90° یا $\frac{\pi}{2}$ باشد دو زاویه رو متمم می گوئیم و روابط زیر را برای اون ها قائل هستیم
مهمترین رابطه اینه که :

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\alpha) = \cos(\beta) \\ \cos(\alpha) = \sin(\beta) \\ \tan(\alpha) = \cot(\beta) \\ \cot(\alpha) = \tan(\beta) \end{cases} \xrightarrow{\text{نتیج}} \begin{cases} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1 \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1 \\ \tan \alpha \times \tan \beta = 1 \\ \cot \alpha \times \cot \beta = 1 \end{cases}$$

هروقت از زاویه ی متمم استفاده میکنی با تغییر فاز همراهی ولی از تغییر علامت خبری نیست

مثال 15: حاصل $\cos^2 5^\circ + \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \dots + \cos^2 65^\circ + \cos^2 75^\circ + \cos^2 85^\circ$ کدما است؟

(1) 4/5 **پاسخ**

$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\cos^2 5^\circ + \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 55^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 75^\circ + \cos^2 85^\circ = 4/5$

مثال 16: اگر A, B, C زوایای یک مثلث بوده و $\tan(B + 3^\circ) \times \tan(C + 3^\circ) = 1$ باشد، A کدما است؟

(1) 7° (2) 15° (3) 11° (4) 9°

پاسخ در بالا گفتیم که آگه داشته باشیم $\tan \alpha \times \tan \beta = 1$ اون موقع α و β متمم هم هستن. یعنی جمع اونا میشه 90°

$$\tan(B + 3^\circ) \times \tan(C + 3^\circ) = 1 \rightarrow (B + 3^\circ) + (C + 3^\circ) = 90^\circ \rightarrow B + C + 6^\circ = 90^\circ \rightarrow B + C = 84^\circ$$

از طرفی همه میدونیم جمع زوایای داخلی هر مثلث 180° است پس :

$$A + B + C = 180^\circ \xrightarrow{B+C=84^\circ} A + 84^\circ = 180^\circ \rightarrow A = 96^\circ$$

مثال 17: حاصل عبارت $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{4} - \beta) - \cos(\frac{\pi}{6} - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{4} + \beta)$ کدما است؟

(1) $\sin \alpha$ (2) $\cos \alpha$ (3) $\sin \beta$ (4) $\cos \beta$

پاسخ

$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{4} - \beta) - \cos(\frac{\pi}{6} - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{4} + \beta) = \underbrace{\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{6} - \alpha)}_{\text{متمم هستن}} + \underbrace{\cos(\frac{\pi}{4} - \beta) - \sin(\frac{\pi}{4} + \beta)}_{\text{متمم هستن}}$$

در بالا گفتیم که در دو زاویه ی متمم، \sin یک زاویه برابر با \cos زاویه دیگر است. فب آگه دو تا عبارت برابر رو از هم کم کنیم حاصل صفر میشه دیگه!



روابط زوایای مکمل :

اگر مجموع دو زاویه 180° یا π باشد دو زاویه رو مکمل می گوئیم و روابط زیر را برای اون ها قائل هستیم
مهمترین رابطه اینه که :

$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = + \sin \beta \\ \cos \alpha = - \cos \beta \\ \tan \alpha = - \tan \beta \\ \cot \alpha = - \cot \beta \end{cases} \xrightarrow{\text{نتیج}} \begin{cases} \sin \alpha = \sin \beta \\ \cos \alpha + \cos \beta = 0 \\ \tan \alpha + \tan \beta = 0 \\ \cot \alpha + \cot \beta = 0 \end{cases}$$



هر وقت از زاویه ی مکمل استفاده می کنی \sin هیچ واکنشی نشون نمی ده، ولی سایر نسبت های مثلثاتی یک منفی میگیرن!!

مثال 18: حاصل $\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14}$ کدام است؟

1) 1 2) $\frac{1}{2}$ 3) 4 صفر 4) -1

پاسخ در نکته ی بالا دیدیم که در مورد زاویه های مکمل که جمعشون میشه 180° مجموع کسینوس ها ، تانژانت ها و کتانژانت ها همیشه صفر

$$\begin{array}{c} = 0 \\ \begin{array}{c} = 0 \\ \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14} = 0 \\ = 0 \end{array} \end{array}$$

مثال 19: حاصل عبارات زیر را بدست آورید

الف) $\frac{\sin 14^\circ + \sin 4^\circ}{\cos 5^\circ} =$

ب) $\frac{\cos 11^\circ - \cos 7^\circ}{\sin 16^\circ + \sin 2^\circ} =$

کارمند تازه وارد!

مردی به استخدام یک شرکت چند ملیتی درآمد. در اولین روز کار خود، با کافه تریا تماس گرفت و فریاد زد: یک فنجان قهوه برای من

بیاورید. صدایی از آن طرف پاسخ داد: شماره ی داخلی را اشتباه گرفته ای. میدانی تو با کی داری حرف میزنی؟

کارمند تازه وارد گفت: نه.

صدای آن طرف گفت: من مدیر اجرایی شرکت هستم، احمق. مرد تازه وارد، با لحنی حق به جانب گفت: و تو میدانی با کی حرف میزنی، بیچاره

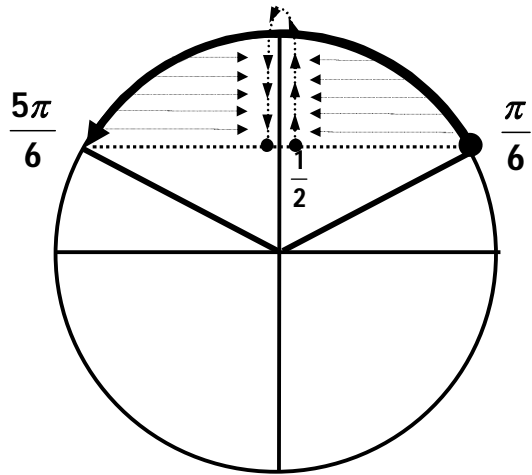
؟مدیر اجرایی گفت: نه.

کارمند تازه وارد گفت: خوبه. و سریع گوشی رو گذاشت



برای بدست آوردن بُرد (حدود y) تابع مثلثاتی در بازه $[a, b]$ علاوه بر کاربرد مشتق و می توان در برخی موارد از طریق زیر عمل کرد:

برای حل ابتدا روی دایره ی مثلثاتی کمائی که در آن حرکت کرده ایم را پُررنگ می کنیم سپس روی محور مثلثاتی که حدود y را از ما خواسته با "چارو" کردن، بیشترین و کمترین مقدار را جدا می کنیم تا حدود y بدست بیاد



مثال 20: برد تابع $y = \sin x$ در بازه $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ را بیابید:

پاسخ برای حل ابتدا از نقطه ی $\frac{\pi}{6}$ حرکت رو شروع می کنیم

و ادامه میدهم تا به ماکسیمم مقدار \sin یعنی عدد 1 میرسیم و در ادامه

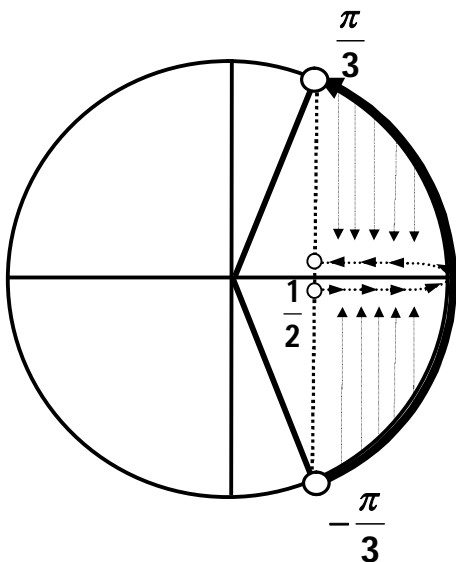
دور میزنیم تا به نقطه ی $\frac{5\pi}{6}$ میرسیم! در این مسیر کمترین مقدار \sin

عدد $\frac{1}{2}$ و بیشترین مقدار آن 1 شد. پس: $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$

مثال 21: اگر $\cos 3x = 3m + 1$ و $x \in (-\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{9})$ آنگاه حدود m کدام است؟

پاسخ چون کمان داده شده $3x$ است، پس اول باید باید بینیم $3x$ در چه فاصله ای است $-\frac{\pi}{3} < 3x < \frac{\pi}{3}$

پس پرفش ما رو دایره ی مثلثاتی از $\frac{\pi}{3}$ تا $-\frac{\pi}{3}$ فوادر بود. و تصویر سازی ("چارو" کردن) بروی محور افقی یعنی محور \cos فوادر بود



در شکل داریم میبینیم که کمترین مقدار \cos برابر $\frac{1}{2}$ و بیشترین مقدار آن 1 است

پس: $\frac{1}{2} < \cos 3x \leq 1$ و از اونجایی که داشتیم $\cos 3x = 3m + 1$

پس: $-\frac{1}{6} < m \leq 0$

نچار پیری بود که می خواست بازنشسته شود. او به کارفرمایش گفت که می خواهد ساختن خانه را رها کند و از زندگی بی دغدغه در کنار همسر و خانواده اش لذت ببرد. کارفرما از اینکه دید کارگر خویش می خواهد کار را ترک کند، ناراحت شد. او از نچار پیر خواست که به عنوان آخرین کار تنها یک خانه دیگر بسازد. نچار پیر قبول کرد. اما کاملاً مشخص بود که دلش به این کار راضی نیست. او برای ساختن این خانه از مصالح بسیار نامرغوبی استفاده کرد و با بی حوصلگی به ساختن خانه ادامه داد. وقتی کار به پایان رسید، کارفرما برای واریسی خانه آمد. او کلید خانه را به نچار داد و گفت: "این خانه متعلق به توست. این هدیه ای است از طرف من برای تو."

می توانیم همیشه بهترین و زیبا ترین و کامل ترین اثر را از خود به جا بگذاریم.

حتی متنی که می نویسیم، حرفی که میزنیم، غذایی که می پزیم و ...





مثال 22: اگر $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ و $Tan 3x = \frac{a+1}{a-2}$ باشد آنگاه مقادیر $2a^2 - 14a$ در کدام بازه قرار دارد؟



- (1) $(-20, +\infty)$ (2) $(-11, +\infty)$ (3) $(-12, 6)$ (4) $(-30, -11)$

پاسخ باز هم مثل بالا بیون کمان فواسته شده $3x$ است پس هرود آن را باید روی دایره مثلثاتی تعیین کنیم و تصویر سازی روی محور قائم

موازی محور سینوس یعنی Tan انجام دهیم

$$-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9} \xrightarrow{\times 3} -\frac{\pi}{3} < 3x < \frac{\pi}{3}$$

پس با شروع از $-\frac{\pi}{3}$ و در اتمام در $\frac{\pi}{3}$ آکه قرار بگیریم روی محور Tan بین مقادیر

$-\sqrt{3}$ تا $\sqrt{3}$ قرار فوایم داشت

$$-\sqrt{3} < Tan 3x < \sqrt{3} \rightarrow |Tan 3x| < \sqrt{3} \quad \text{پس:}$$

$$Tan 3x = \frac{a+1}{a-2} \quad \text{پس داریم:}$$

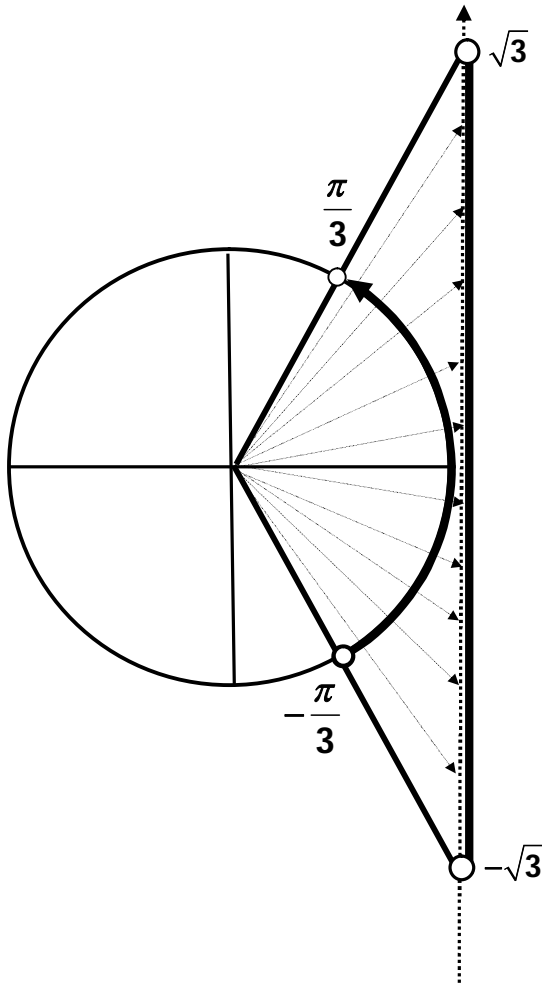
$$\left| \frac{a+1}{a-2} \right| < \sqrt{3} \rightarrow \frac{|a+1|}{|a-2|} < \sqrt{3} \xrightarrow{a \neq 2} |a+1| < \sqrt{3}|a-2|$$

$$\xrightarrow{(\)^2} (a+1)^2 < 3(a-2)^2 \rightarrow a^2 + 2a + 1 < 3a^2 - 12a + 12$$

عبارت های سمت چپ، رویماریم سمت راست

$$2a^2 - 14a + 11 > 0 \rightarrow \boxed{2a^2 - 14a} > -11$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 14a \in (-11, +\infty)$$



داستان درباره ی یک کوهنورد است که می خواست از بلندترین کوه ها بالا برود. او پس از سال ها آماده سازی، ماجراجویی خود را آغاز کرد. ولی از آنجا که افتخار کار را فقط برای خود می خواست تصمیم گرفت به تنهایی از کوه بالا برود. شب، بلندی های کوه را در بر گرفته بود و مرد هیچ چیز را نمی دید. همه چیز سیاه بود اصلا دید نداشت. ابر روی ماه و ستاره ها را پوشانده بود.

همان طور که از کوه بالا می رفت پایش لیز خورد. در حالی که به سرعت سقوط می کرد از کوه پرت شد. در حال سقوط فقط لکه های سیاهی مقابل چشمانش می دید و احساس وحشتناک مگیده شدن به وسیله ی جاذبه، او را در خود می گرفت.

همچنان سقوط می کرد، در آن لحظات تمام رویداد های خوب و بد زندگی به یادش آمد. اکنون فکر می کرد مرگ چقدر به وی نزدیک است. ناگهان احساس کرد طناب دور کمرش محکم شد و در میان آسمان معلق ماند. در این لحظه سکون، چاره ای برایش نماند جز آنکه فریاد بزند خدایا کمک کن!!!! ناگهان صدای پرتی از آسمان شنیده شد:

چه می خواهی؟ ای خدا نجاتم بده! واقعا باور داری که می توانم نجاتت دهم! البته که باور دارم! اگر باور داری طنابی که به دور کمرت بسته است پاره کن! یک لحظه سکوت... و مرد تصمیم گرفت با تمام نیرو طناب را بچسبد. گروه نجات می گویند که روز بعد یک کوهنورد بیخ زده را مرده پیدا کردند. بدنش از طناب آویزان بود و با دست هایش محکم طناب را گرفته بود در حالی که او فقط یک متر از زمین فاصله داشت!

نتیجه: "وقتی ایمان داری، واقعا ایمان داشته باش!"



یادآوری روابط اولیه ی مثلثاتی :

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$



$$1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$1 + \tan^2 x \begin{cases} \nearrow \frac{1}{\sin^2 x} \\ \searrow \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases} \quad \square$$



مثال 23: با فرض $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، حاصل عبارت $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$ کدام است؟

- (1) $\frac{1}{3}$
 (2) $\frac{4}{9}$
 (3) $\frac{1}{2}$
 (4) $\frac{2}{3}$

پاسخ: اول عبارت فواسته شده را تا جایی که ممکنه ساده می کنیم. این ساده کردن خیلی خیلی مهمه است

$$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1 = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$

پس در مسئله $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ داده شده و از ما $\sin^2 \theta$ رو فواسته، این که کاری نداره

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \xrightarrow{\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}} 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

مقصد جایی در انتهای مسیر نیست بلکه لذت بردن از قدم هایی است که بر میداری!



مثال 24: اگر $\frac{\sin^2 x - 2\cos^2 x + 1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x - 1} = 4$ باشد، مقدار $\tan^2 x$ کدام است؟

1 (4 5 (3 2 (2 2 (1

پاسخ فب ظاهرأ مهوریم اول طرفین وسطین کنیم

$$\frac{\sin^2 x - 2\cos^2 x + 1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x - 1} = 4 \rightarrow \sin^2 x - 2\cos^2 x + 1 = 4\sin^2 x + 8\cos^2 x - 4 \rightarrow 3\sin^2 x + 1\cos^2 x = 5$$

حالا باید به کاری کنیم که در عبارت بردست اومده $\tan^2 x$ رو ببینیم چه طوری آفه؟
فب باید بگم همیشه یادت باشه هر وقت رابطه ای پر حسب $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ دیدی برای این که به $\tan^2 x$ تبدیل بشه کافی همه ی قسمت هارو پر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم

$$3\sin^2 x + 1\cos^2 x = 5 \xrightarrow{\div \cos^2 x} \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{1\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{5}{\cos^2 x} \rightarrow 3\tan^2 x + 1 = 5 \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

..... $\rightarrow 1 + \tan^2 x$

$$3\tan^2 x + 1 = 5(1 + \tan^2 x) \rightarrow 3\tan^2 x + 1 = 5 + 5\tan^2 x \rightarrow 2\tan^2 x = 5 \rightarrow \tan^2 x = \frac{5}{2}$$

یه جور دیگه از معادل $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ استفاده کنیم تا $\cos^2 x$ بردست بیار بعرض $\sin^2 x$ رو بردست بیارم و.....

خاطرات مهم

$$a^3 + b^3 = (a + b)(aa - ab + bb)$$

مقالف

$$a^3 - b^3 = (a - b)(aa + ab + bb)$$

مقالف

مثال 25: ساده شده ی کسر $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cdot \cos x}$ کدام است؟

1 ($\sin x + \cos x$ 2 ($\sin x$ 3 ($\cos x$ 4 (1

پاسخ

مثال 26: ساده شده ی کسر $\frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} - \sin x \cdot \cos x$ کدام است؟

1 ($\sin x + \cos x$ 2 ($\sin x$ 3 ($\cos x$ 4 (1



پاسخ عزیزای دل گوش با من باشه فیلی مهم است
آکه توی یک عبارت مثلثاتی، عامل هایی مثل $(1 - \cos x)$ یا $(1 + \cos x)$ یا $(1 - \sin x)$ یا $(1 + \sin x)$ دیدی اون عامل رو در مزدویش ضرب و تقسیم کن معمولاً پایین حرکت قفل اون عبارت مثلثاتی رو شکستی بریم برای حل:

$$\frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} - \sin x \cdot \cos x = \sin x(1 + \cos x) - \sin x \cdot \cos x = \sin x(1 + \cos x - \cos x) = \sin x$$

$$\frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\sin^3 x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \frac{\sin^3 x(1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \sin x(1 + \cos x)$$

مثال 26

ادامه روابط اولیه ی مثلثاتی :

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$



مثال 27: اگر $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\sin^6 x + \cos^6 x$ کدام است؟

- (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) $\frac{3}{7}$

پاسخ

مثال 28: اگر $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، حاصل $\sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

- (1) 1 (2) $-\frac{7}{8}$ (3) $\frac{8}{7}$ (4) $\frac{7}{8}$

پاسخ

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 2(\sin x \cdot \cos x)^2 = 1 - 2\left(\frac{-1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}$$

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{توان 2}} (\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow 1 + 2\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow 2\sin x \cdot \cos x = \frac{-1}{2} \xrightarrow{\div 2} \sin x \cdot \cos x = \frac{-1}{4}$$

مثال 29: حاصل عبارت $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2$ کدام است؟

- (1) -2 (2) 2 (3) -1 (4) 3

پاسخ

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2 = \frac{1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - \left(\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\right)$$

$$= \frac{1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{-2\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = -2$$



نسبت های مثلثاتی $(\alpha \pm \beta)$:

مثل هم

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

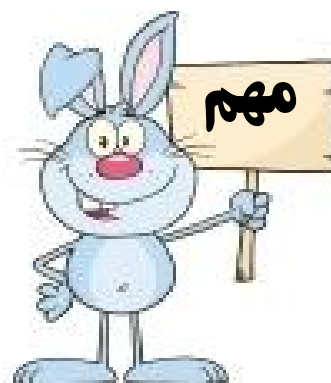
برعکس هم

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

مثل هم

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

برعکس



مثال 30: اگر $A = \sin 75^\circ$ و $B = \tan 105^\circ$ مقدار $4\sqrt{2}A + 2B$ کدام است؟

- (1) -2 (2) 2 (3) -1 (4) 3

پاسخ

$$A = \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$B = \tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \xrightarrow{\text{کویا می کنیم}} \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{-2}$$

حالا بریم سراغ مقاسمه ی $4\sqrt{2}A + 2B$

$$4\sqrt{2}A + 2B = 4\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) + 2 \times \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{-2} = \sqrt{12} + 2 - (\sqrt{3} + 1)^2 = 2\sqrt{3} + 2 - (4 + 2\sqrt{3}) = -2$$

مثال 31: عبارت $\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \sin x \cos x$ به ازاء جمیع مقادیر x برابر است با:

- (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x)$ (4) $\frac{1}{2}(\cos 2x + \sin 2x)$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$$

$$\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \sin x \cos x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)\right)^2 - \sin x \cos x =$$


مثال 32: حاصل $\frac{\cos 2a}{\cos a} - \frac{\sin 2a}{\sin a}$ برابر کدام است؟ $(a \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$

- (1) $\frac{1}{\cos a}$ (2) $-\frac{1}{\cos a}$ (3) $-\frac{1}{\sin a}$ (4) $\frac{1}{\sin a}$

پاسخ

$$\frac{\cos 2a}{\cos a} - \frac{\sin 2a}{\sin a} = \frac{\sin a \cdot \cos 2a - \cos a \cdot \sin 2a}{\sin a \cdot \cos a} = \frac{\sin(a - 2a)}{\sin a \cdot \cos a} = \frac{\sin(-a)}{\sin a \cdot \cos a} = \frac{-\sin a}{\sin a \cdot \cos a} = -\frac{1}{\cos a}$$



مثال 33: حاصل $\frac{\tan^2 37/5^\circ - \tan^2 7/5^\circ}{1 - \tan^2 37/5^\circ \cdot \tan^2 7/5^\circ}$ برابر کدام است؟ 

- (1) $\sqrt{3}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ صورت و مفرج، هر دو تفاضل دو مربع کامل هستند. پس از اتحاد مزدوج شروع می کنیم

$$\frac{\tan^2 37/5^\circ - \tan^2 7/5^\circ}{1 - \tan^2 37/5^\circ \cdot \tan^2 7/5^\circ} = \frac{(\tan 37/5^\circ - \tan 7/5^\circ)(\tan 37/5^\circ + \tan 7/5^\circ)}{(1 - \tan 37/5^\circ \cdot \tan 7/5^\circ)(1 + \tan 37/5^\circ \cdot \tan 7/5^\circ)}$$

$$\frac{(\tan 37/5^\circ - \tan 7/5^\circ)}{(1 + \tan 37/5^\circ \cdot \tan 7/5^\circ)} \times \frac{(\tan 37/5^\circ + \tan 7/5^\circ)}{(1 - \tan 37/5^\circ \cdot \tan 7/5^\circ)} = \tan(37/5^\circ - 7/5^\circ) \times \tan(37/5^\circ + 7/5^\circ)$$

$$= \tan(3^\circ) \times \tan(45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال 34: اگر $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$ باشد آن گاه حاصل $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \cdot \tan \beta$ برابر کدام است؟


- (1) $\sqrt{3}$ (2) -1 (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) 1

پاسخ در این جور تست ها یکی از راه های خوب اینه که از دو طرف \tan بگیریم

$$\alpha + \beta = \frac{5\pi}{4} \xrightarrow{\tan} \tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{5\pi}{4} \rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = 1 \rightarrow \tan \alpha + \tan \beta = 1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta$$

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \cdot \tan \beta = 1$$

چربازی:

مثال 35: اگر $a + b = \frac{\pi}{2} - a$ باشد آن گاه $\tan a + \tan b$ برابر کدام است؟ 

- (1) $\sin b$ (2) $\cos a$ (3) $\frac{1}{\sin a}$ (4) $\frac{1}{\cos b}$

پاسخ این با شاید \tan گرفتن از دو طرف خیلی مناسب نباشه پس:

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-a)}{\cos a \cdot \cos b} = \frac{\cos a}{\cos a \cdot \cos b} = \frac{1}{\cos b}$$


مثال 36: اگر $\tan(x-y) = 2$ و $\tan(x+y) = 1$ ، (y, x) حاده باشند، $\tan 2x$ کدام است؟

- (1) -1 (2) -3 (3) 3 (4) 1

پاسخ

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan(\alpha) = 1 \\ \tan(\beta) = 2 \end{array} \right. \rightarrow \alpha + \beta = (x+y) + (x-y) = 2x \rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{1+2}{1-1 \times 2} = -3$$





مثال 37: اگر $Tan(\alpha + 2^\circ) = \frac{3}{4}$ باشد آن گاه حاصل $Cot(25^\circ - \alpha)$ برابر کدام است؟ 

- 5 (1) 6 (2) 7 (3) ✓ 8 (4)

پاسخ فُت قبلاً برات گفته بودم هر وقت در مثلثات از Cot چیزی پرسیدن اول Tan رو مناسب کن بعد عدد بدست اومده رو برعکس کن!!

پس اول $Tan(25^\circ - \alpha)$ رو حساب کنیم

بین عزیزم کمان داده شده یعنی $(\alpha + 2^\circ)$ و کمان فواسته شده $(25^\circ - \alpha)$ چه رابطه ای با هم دارن؟ 

باریکلا .. جمع شون میشه $\frac{\pi}{4}$  پس زاویه ی فواسته شده یعنی $(25^\circ - \alpha)$ رو می تونیم بنویسیم: $(25^\circ - \alpha) + (\alpha + 2^\circ) = \frac{\pi}{4}$

حالا به جای $x = (25^\circ - \alpha)$ ، میریم $y = (\alpha + 2^\circ)$ رو حساب می کنیم

$$\underbrace{(25^\circ - \alpha)}_x + \underbrace{(\alpha + 2^\circ)}_y = \frac{\pi}{4} \rightarrow x + y = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{از دو طرف Tan می گیریم}} Tan(x + y) = Tan \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{Tan(x) + Tan(y)}{1 + Tan(x) \times Tan(y)} = 1 \xrightarrow{Tan(y) = \frac{3}{4}} \frac{Tan(x) + \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4} \times Tan(x)} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین انجام می دهیم تا Tan(x) بدست بیاد}}$$

$$Tan(x) = \frac{1}{7} \rightarrow Tan(25^\circ - \alpha) = \frac{1}{7} \Rightarrow Cot(25^\circ - \alpha) = 7$$

مثال 38: اگر α زاویه ی منفرجه و $Sin \alpha = \frac{3}{5}$ باشد مقدار $Tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی خارج 85)

- 7 (4) $\frac{1}{7}$ (3) $-\frac{1}{7}$ (2) -7 (1)

$$\frac{1 \pm Tan \alpha}{1 \mp Tan \alpha} = Tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right)$$

پاسخ طبق رابطه ی ربرو $Tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ برای مناسبه احتیاج دارد برانیم $Tan \alpha$ مقدار است پس:

از اطلاعات داده شده یعنی $Sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، مقدار $Tan \alpha$ رو حساب می کنیم

$$Sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{array}{c} 5 \\ \alpha \\ \text{?} = 4 \end{array} \Rightarrow Tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \xrightarrow{\text{تانژانت در ناحیه ی دوم منفی است}} Tan \alpha = -\frac{3}{4}$$

حالا بریم سراغ مناسبه ی $Tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$

$$Tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + Tan \alpha}{1 - Tan \alpha} \xrightarrow{Tan \alpha = -\frac{3}{4}} \frac{1 + (-\frac{3}{4})}{1 - (-\frac{3}{4})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{7}$$

مثال 39: اگر $\alpha + \beta = 135^\circ$ و $Tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$ باشد مقدار کسر $\frac{Cos^2 \alpha \cdot Cos^2 \beta - Sin^2 \alpha \cdot Sin^2 \beta}{Sin^2 \alpha \cdot Cos^2 \beta - Cos^2 \alpha \cdot Sin^2 \beta}$ برابر

کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج 84)

- $-\frac{4}{3}$ (4) $\frac{4}{3}$ (3) $-\frac{3}{4}$ (2) $\frac{3}{4}$ (1)

پاسخ



نسبت های مثلثاتی $2x$:

1 $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ حالت کلی $\sin \bigcirc = 2 \sin \bigtriangle \cdot \cos \bigtriangle$

$$\sin \bigcirc \cdot \cos \bigcirc = \frac{1}{2} \sin 2 \bigcirc$$

تبدیل ی خییلی مهم:



2 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ حالت کلی $\cos \bigcirc = \cos^2 \bigtriangle - \sin^2 \bigtriangle$

$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ حالت کلی $\cos \bigcirc = 2 \cos^2 \bigtriangle - 1$

$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ حالت کلی $\cos \bigcirc = 1 - 2 \sin^2 \bigtriangle$



فرمول های طلایی:

3 $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ حالت کلی $1 + \cos \bigcirc = 2 \cos^2 \bigtriangle$

$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ حالت کلی $1 - \cos \bigcirc = 2 \sin^2 \bigtriangle$

4 $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ حالت کلی $\tan \bigcirc = \frac{2 \tan \bigtriangle}{1 - \tan^2 \bigtriangle}$



کودکی ده ساله که دست چپش در حادثه رانندگی از بازو قطع شده بود، برای تعلیم فنون رزمی جدو به یک استاد سپرده شد. پدر کودک اصرار داشت از فرزندش یک قهرمان جودو بسازد! استاد پذیرفت و به پدر کودک قول داد که یک سال بعد می تواند فرزندش را در مقام قهرمانی کل باشگاه ها ببیند! در طول شش ماه، استاد فقط روی بدن سازی کودک کار می کرد و در عرض این شش ماه حتی یک فن جودو هم به او یاد نداد. بعد از شش ماه خبر رسید که یک ماه بعد مسابقات محلی در شهر برگزار می شود. استاد به کودک ده ساله فقط یک فن آموزش داد و کودک توانست در میان اعجاب همگان، با آن تک فن همه حریفان خود را شکست دهد! سه ماه بعد کودک توانست در مسابقات بین باشگاه ها نیز با استفاده از همان تک فن برنده شود و سال بعد نیز در مسابقات کشوری!

آن کودک یک دست، موفق شد تمام حریفان را زمین بزند و به عنوان قهرمان کشوری برگزیده شود. وقتی مسابقات به پایان رسید، در راه بازگشت به منزل، کودک از استاد راز پیروزیش را پرسید، استاد گفت:

دلیل پیروزی تو این بود که اولاً به همان یک فن به خوبی مسلط بودی، ثانیاً تنها امیدت همان یک فن بود و سوم اینکه تنها را شناخته شده برای مقابله با این فن، گرفتن دست چپ تو بود، که تو چنین دستی نداشتی! یاد بگیر که در زندگی، از نقاط ضعف خود به عنوان نقاط قوت استفاده کنی، راز موفقیت در زندگی داشتن امکانات نیست، بلکه استفاده از بی امکاناتی، به عنوان نقطه قوت است



مثال 40: حاصل عبارت $\sin x \cdot \cos x (1 - 2\sin^2 x)$ به ازای $x = 7/5^\circ$ برابر کدام است؟ 

- (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{8}$ (3) $\frac{3}{8}$ (4) $\frac{3}{16}$

پاسخ


$$\sin x \cdot \cos x (1 - 2\sin^2 x) = \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) (\cos 2x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 4x\right) = \frac{1}{4} \sin 4x \xrightarrow{x=7/5^\circ}$$

$$\frac{1}{4} \sin(4 \times 7/5^\circ) = \frac{1}{4} \sin 3^\circ = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

مثال 41: حاصل $\cos 165^\circ \cdot \cos 15^\circ$ کدام است؟

- (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{2}$

پاسخ


مثال 42: اگر $\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\cos 2x$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی داخل 93) 

- (1) $-\frac{2}{9}$ (2) $-\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{2}{9}$

پاسخ

$$\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3} \rightarrow (\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{3}) + (\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}$$

$$2\cos x \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \rightarrow \cos x = \frac{2}{3}$$

حال که فهمیدیم $\cos x$ چند است، باید $\cos 2x$ رو حساب کنیم. آنگه گفتی کروم فرمول از فرمول های سه گانه ی $\cos 2x$ رو باید بنویسیم؟ 

باریکلا اوننی که $\cos 2x$ رو بر حسب $\cos x$ به ما میداد. یعنی $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \xrightarrow{\cos x = \frac{2}{3}} \cos 2x = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

مثال 43: اگر $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\cos 4\alpha$ مقدار برابر کدام است؟ (سراسری تجربی داخل 94)

- (1) $-\frac{2}{9}$ (2) $-\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{2}{9}$

پاسخ اولاً ساره کردن عبارت $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ از طریق اتحاد مزدج یکی از علاقه مندی های طراح های کنکور است. همیشه هم یادت

باشه ساره شده ی $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ فیلی راحت میشه. فقط برعکس یعنی $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ باید یادت باشه همیشه $-\cos 2\alpha$

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow (\underbrace{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}_{\cos 2\alpha}) (\underbrace{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}_1) = \frac{2}{3} \rightarrow \cos 2\alpha = \frac{2}{3}$$

بقیشم از رابطه ی $\cos \bigcirc = 2\cos^2 \triangle - 1$ فیلی راحت فله دیگه

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$$





مثال 44: اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟ (سراسری داخل تجربی 95)

- 1) $-\frac{3}{4}$ 2) $-\frac{3}{8}$ 3) $\frac{3}{8}$ 4) $\frac{3}{4}$ ✓

3

$$\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha) = -\sin 2\alpha$$

پاسخ: اولاً فواسته ی مسئله یعنی $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ رو آگه ساره کنیم همیشه:

پس باید اول فرمول $\sin 2\alpha$ یادمون بیاریم !! یارته دیکه: $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

پس برای این که $\sin 2\alpha$ بدست بیار ما به ضرب $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ احتیاج داریم. فب حالا چه طوری از تفاضل $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ که در مسئله داده شده بود به ضرب اون می رسیدیم؟؟ باریکلا کافی بود اونو به توان 2 برسونیم

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{به توان 2 برسونیم}} (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha) = \frac{1}{4}$$

$$1 + \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

مثال 45: اگر $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{5}$ باشد، $\tan 2\alpha$ کدام است؟ (سراسری خارج ریاضی 88)

- 1) $1/5$ 2) $1/8$ 3) $2/4$ 4) $2/5$

پاسخ

مثال 46: اگر $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{4}{3}$ و $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \pi$ باشد $\tan \frac{\alpha}{2}$ برابر کدام است؟ (سنجش 94)

- 1) -2 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $-\frac{1}{3}$

پاسخ

$$\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha} = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3} \rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\tan \bigcirc = \frac{2\tan \frac{\bigcirc}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\bigcirc}{2}}$$

حالا که $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ بدست اومر باید رابطه ی بین کل کمان و نصف کمان برای تانژانت رو بنویسیم

که رابطه ی فوق برای زاویه ی α همیشه

$$\tan \alpha = \frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \tan \alpha = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \tan \frac{\alpha}{2} = A \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2A}{1 - A^2} \rightarrow 4 - 4A^2 = 6A \rightarrow$$


$$4A^2 + 6A - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2A^2 + 3A - 2 = 0 \quad \text{از روش دلتا ریشه ها رو بدست میاریم} \quad \Delta = (3)^2 - 4(2)(-2) = 25 \rightarrow A = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{1}{2}, -2$$

پس $\tan \frac{\alpha}{2}$ میتونه -2 و یا $\frac{1}{2}$ باشه. پس باید ببینیم کمان $\frac{\alpha}{2}$ در چه ناحیه ای قرار داره و با توجه به علامت تانژانت در آن ناحیه مقدار قابل قبول رو انتخاب کنیم

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{\div 2} \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} \rightarrow \text{کمان } \frac{\alpha}{2} \text{ در ناحیه ی دوم است و تانژانت در ناحیه ی دوم منفی است}$$

پس $\tan \frac{\alpha}{2} = -2$ قابل قبول است



مثال 47: اگر $Tan\alpha = 2$ و $Tan\beta = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $Tan(2\alpha - \beta)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج 93) 

- (1) -3 (2) -2 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 3

پاسخ: فب تابلو اول باید $Tan(2\alpha - \beta)$ رو باز کنیم

$$Tan(2\alpha - \beta) = \frac{Tan2\alpha - Tan\beta}{1 + (Tan2\alpha \times Tan\beta)}$$

پس برای بدست آوردن $Tan(2\alpha - \beta)$ به $Tan2\alpha$ و $Tan\beta$ احتیاج داریم. $Tan\beta$ رو که فور مسئله به ما داده ولی $Tan2\alpha$ رو باید از روی $Tan\alpha = 2$ بدست بیاریم

$$Tan2\alpha = \frac{2Tan\alpha}{1 - Tan^2\alpha} \xrightarrow{Tan\alpha=2} Tan2\alpha = \frac{2(2)}{1 - (2)^2} = -\frac{4}{3}$$

حالا دیگه بریم برای مناسبه ی $Tan(2\alpha - \beta)$:

$$Tan(2\alpha - \beta) = \frac{Tan2\alpha - Tan\beta}{1 + (Tan2\alpha \times Tan\beta)} \xrightarrow{\begin{matrix} Tan2\alpha = -\frac{4}{3} \\ Tan\beta = \frac{1}{3} \end{matrix}} Tan(2\alpha - \beta) = \frac{(-\frac{4}{3}) - (\frac{1}{3})}{1 + ((-\frac{4}{3}) \times (\frac{1}{3}))} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}} = -3$$

مثال 48: ساده شده ی عبارت $Cos12^\circ \cdot Cos24^\circ \cdot Cos48^\circ$ کدام است؟



- (1) $\frac{1}{16Sin6^\circ}$ (2) $\frac{1}{8Sin6^\circ}$ (3) $\frac{8}{Sin6^\circ}$ (4) $\frac{16}{Sin6^\circ}$

پاسخ: همیشه گفت این سوال فودش به تیپ معروف واسه مبدت مثلثات حساب میشه

برای حلش بهتره صورت و مخرج رو در $Sin12^\circ$ ضرب و تقسیم کنیم تا از طریق فرمول $Sin2\theta = 2Sin\theta \cdot Cos\theta$ مناسبه رو تموم کنیم

مثال 49: اگر $Sinx + Cosx = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $Sin^3x + Cos^3x$ کدام است؟ 

- (1) $\frac{13}{27}$ (2) $\frac{13}{81}$ (3) $\frac{17}{27}$ (4) $\frac{17}{81}$

پاسخ: اتحاد جاق و لاغر رو که یادت هست

$$Sin^3x + Cos^3x = (Sinx + Cosx)(Sin^2x - Sinx \cdot Cosx + Cos^2x) = \frac{1}{3}(1 - Sinx \cdot Cosx)$$

پس برای بدست آوردن جواب نهایی کافی است $Sinx \cdot Cosx$ رو بدویم، حالا سوالی که پیش می آید اینه که پطوری از حاصل جمع $Sinx + Cosx$ به حاصلضرب شون برسیم؟ ... باریکلا، به توان دو می رسونیم

$$Sinx + Cosx = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{به توان دو می رسانیم}} (Sinx + Cosx)^2 = (\frac{1}{3})^2 \rightarrow \underbrace{Sin^2x + Cos^2x}_{1} + 2Sinx \cdot Cosx = \frac{1}{9} \rightarrow$$

$$2Sinx \cdot Cosx = \frac{1}{9} - 1 \rightarrow 2Sinx \cdot Cosx = -\frac{8}{9} \xrightarrow{\div 2} Sinx \cdot Cosx = -\frac{4}{9}$$

پس جواب نهایی عبارت است از:

$$\frac{1}{3}(1 - Sinx \cdot Cosx) \xrightarrow{Sinx \cdot Cosx = -\frac{4}{9}} \frac{1}{3}(1 - (-\frac{4}{9})) = \frac{13}{27}$$



مثال 50: اگر $\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\tan 4x$ کدام است؟

- (1) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ (2) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ (3) $\sqrt{7}$ (4) $\frac{4}{7}$

پاسخ باز هم با به توان دو رساندن داده ی مسئله می توانیم به مقدار $\sin 4x$ برسیم و از اونجا با مثلث می‌تونیم مقدار $\tan 4x$ رو بدست بیاریم

مثال 51: حاصل عبارت $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x - 1} - \frac{\sqrt{2}\cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2}\cos x$ کدام است؟

(1) -1 (2) 1 (3) صفر (4) $2\sqrt{2}\cos x$

پاسخ هر کدوم از کسر هارو جداگانه ساده کنیم. فقط هواسه باشه صورت کسر که $\cos 2x$ داره رو باید طوری معادل گذاری کنیم که با اتمار مزدوج نوشتن با مخرج ساده بشه

$$\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x - 1} = \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sqrt{2}\sin x - 1} = \frac{(1)^2 - (\sqrt{2}\sin x)^2}{\sqrt{2}\sin x - 1} = \frac{(1 - \sqrt{2}\sin x)(1 + \sqrt{2}\sin x)}{-(1 - \sqrt{2}\sin x)} = \boxed{-(1 + \sqrt{2}\sin x)}$$

کسر اول:

$$\frac{\sqrt{2}\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \boxed{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}$$

کسر دوم:

فالا همه رو با هم بنویسیم:

$$-(1 + \sqrt{2}\sin x) - \sqrt{2}(\cos x - \sin x) + \sqrt{2}\cos x = -1 - \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x = -1$$

چربازی: بیا عبارت رو به ازای یک عدد دلخواه بدست بیاریم مثلاً $x = 0$

مثال 52: اگر $\cos 2x + 7\sin x = 4$ باشد، مقدار $\cos x$ کدام است؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $\frac{1}{3}$

پاسخ **نصیحت یغما:** یادت باشه عبارت هایی مثل $\cos 2x + 7\sin x = 4$ که در اون ها یک دونه $\cos 2x$ به همراه $\sin x$ یا $\cos x$ داشته باشیم، یکی از علاقه مندی های طراح معترم کنکور هست

برای ساده سازی این عبارت ها و تبدیل اون ها به معادلات درجه ی دو کافی از یکی از معادل های $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ یا $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ استفاده کنیم

$$1 - 2\sin^2 x + 7\sin x = 4 \rightarrow 1 - 2\sin^2 x + 7\sin x - 3 = 0 \xrightarrow{\text{مرتبه می کنیم}} -2\sin^2 x + 7\sin x - 3 = 0 \xrightarrow{\sin x = A} -2A^2 + 7A - 3 = 0$$

$$\Delta = (7)^2 - 4(-2)(-3) = 25 \rightarrow A = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2(-2)} \rightarrow A_1 = \frac{1}{2}, A_2 = 3$$



مثال 53: حاصل $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ به ازای $\pi < x < 2\pi$ کدام است؟

- (1) $\tan x$ (2) $-\tan x$ (3) $\tan \frac{x}{2}$ (4) $-\tan \frac{x}{2}$


پاسخ: ساره کردن صورت و مخرج از فرمول طلایی های $1 + \cos \bigcirc = 2\sin^2 \bigcirc$ و $1 - \cos \bigcirc = 2\cos^2 \bigcirc$ ساره میشه

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}}} = \sqrt{\frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{1}} = \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

حالا باید بگیریم کمان $\frac{x}{2}$ در کدام ناحیه ی مثلثاتی هست تا در اون ناحیه ببینیم علامت تانژانت چه تا بتونیم با توجه به علامت قدر مطلق رو برداریم

$$\pi < x < 2\pi \xrightarrow{\div 2} \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi$$

پس کمان $\frac{x}{2}$ در ربع دوم ناحیه ی مثلثاتی هست و در این ناحیه تانژانت منفی است پس: $\left| \tan \frac{x}{2} \right| = -\tan \frac{x}{2}$

مثال 54: اگر $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} = 2$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟ 

- (1) $\cot 2x = \frac{5}{4}$ (2) $\cot 2x = \frac{5}{2}$ (3) $\cot 2x = \frac{3}{2}$ (4) $\cot 2x = \frac{3}{4}$

پاسخ

$$\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} = 2 \xrightarrow{\frac{\sin 2\bigcirc = 2\sin \bigcirc \cdot \cos \bigcirc}{1-\cos 2\bigcirc = 2\sin^2 \bigcirc}} \frac{2\sin x \cdot \cos x}{2\sin^2 x} = 2 \rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \rightarrow \cot x = 2$$

پس سریع باید بگی $\tan x = \frac{1}{2}$ است و چون در تمام گزینه ها $\cot 2x$ پرسیده شده. پس ما اول $\tan 2x$ رو بدست می آریم و برعکس اون همیشه گزینه ی مورد نظر!!

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \xrightarrow{\tan x = \frac{1}{2}} \tan 2x = \frac{2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3}$$

پس $\cot 2x$ برابر است با $\frac{3}{4}$

مثال 55: اگر $\frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2})$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج 95)

- (1) -2 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) 2

پاسخ: اولاً طبق معمول ساره شده ی $\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2})$ برابر است با $-\cot \frac{\alpha}{2}$. پس ما دنبال $\cot \frac{\alpha}{2}$ هستیم و قرینه ی اون پاسخ تست

است

$$\frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\frac{\sin 2\bigcirc = 2\sin \bigcirc \cdot \cos \bigcirc}{1+\cos 2\bigcirc = 2\cos^2 \bigcirc}} \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

پس $\cot \frac{\alpha}{2}$ برابر است با 2 و پاسخ تست گزینه ی اول است



رابطه ی کاربردی:

پیدا با هم به اتحاد مربع رو با هم بدست پیاریم: $(\sin x \pm \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x \pm 2\sin x \cdot \cos x = 1 \pm \sin 2x$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$$

$$\sqrt{1 \pm \sin 2x} = \sqrt{(\sin x \pm \cos x)^2} = |\sin x \pm \cos x|$$

نتیجه جش:



مثال 56: اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\frac{\sqrt{1 - \sin 2x}}{\sin x}$ کدام است؟

- 1) $1 - \cot x$ 2) $1 - \tan x$ 3) $-1 + \cot x$ 4) $1 + \tan x$

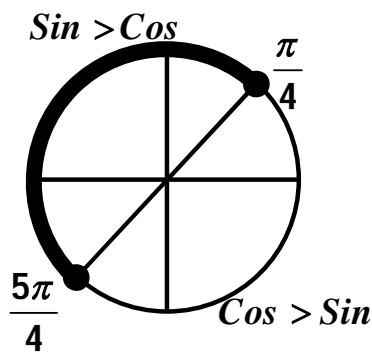
پاسخ: اول عبارت داده شده رو طبق رابطه ی بالا یکم ساده ترش کنیم

$$\frac{\sqrt{1 - \sin 2x}}{\sin x} = \frac{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}}{\sin x} = \frac{|\sin x - \cos x|}{\sin x}$$

صورت کسر قدر مطلق تفاضل سینوس و کسینوس شد پس باید ببینیم این تفاضل مثبت است یا منفی؟؟

فرد مسئله گفته بود $0 < x < \frac{\pi}{4}$ است. پس باید ببینیم سینوس و کسینوس نسبت به هم در دایره ی مثلثاتی چه وضعیتی دارن

یادت باشه در این مواقع دایره به دو نیم دایره ی بالایی (بین $\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{5\pi}{4}$) و پایینی (بین $\frac{5\pi}{4}$ تا $\frac{\pi}{4}$) تقسیم میشه



در نیم دایره ی بالایی که در شکل به صورت پد رنگ نمایش داده شده مقدار سینوس از کسینوس بزرگتر است و در نیم دایره ی پایینی کسینوس از سینوس بزرگتر است

بریم سراغ تست فودمون

طبق در سن نامه ی بالا وقتی در مسئله مطرح شده $0 < x < \frac{\pi}{4}$ است معنی اینه که ما در نیم دایره ی پایینی قرار داریم و مقدار کسینوس از سینوس

بزرگتر است و تفاضل $\sin x - \cos x$ منفی است. بریم ادامه ی حل:

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos x > \sin x \rightarrow \frac{|\sin x - \cos x|}{\sin x} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin x} = \cot x - 1$$

شخص معروفی به نام چرچیل روزی سوار تاکسی شده بود و به دفتر bbc برای مصاحبه می رفت.

هنگامی که به آن جا رسید به راننده گفت آقا لطفاً نیم ساعت صبر کنید تا من برگردم.

راننده گفت: "نه آقا! من می خواهم سریعاً به خانه بروم تا سخنرانی چرچیل را از رادیو گوش دهم."

چرچیل از محبوبیتش و علاقه ی این فرد به خودش خوشحال و ذوقزده شد و یک اسکناس ده پوندی به او داد.

راننده با دیدن اسکناس گفت: "گور پدر چرچیل! اگر بخواهید، تا فردا هم این جا منتظر می مانم!"



روابط فرعی نسبت‌های مثلثاتی $2x$:

$$\boxed{\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}}$$

برست آوردن این روابط شاید برای تست زدن معمم نباشد ولی برای به فاطر سپردن بهتر روابط یک نگاه گذرا داشته باشی فوبه!!

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\boxed{\cot x - \tan x = 2 \cot 2x}$$

برست آوردن این روابط شاید برای تست زدن معمم نباشد ولی برای به فاطر سپردن بهتر روابط یک نگاه گذرا داشته باشی فوبه!!

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 2 \cot 2x$$

حالا به پارازیت از روابط قبلی :

ببین عزیزم در روابط قبلی که به صورت تفاضل بوده باید خوب حفظ باشی که اول کی اومده و دوم کی اومده . چون در کتکور های سال های اخیر شدیداً طراح های تست کتکور سراسری به عوض کردن جای این روابط تفاضلی علاقه مند شدند. ببین و خوب حفظ کن!!



$$\boxed{1} \begin{cases} \cot x - \tan x = + 2 \cot 2x \\ \tan x - \cot x = - 2 \cot 2x \end{cases}$$



$$\boxed{3} \begin{cases} 1 - 2 \sin^2 x = + \cos 2x \\ 2 \sin^2 x - 1 = - \cos 2x \end{cases}$$

$$\boxed{2} \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x = + \cos 2x \\ \sin^2 x - \cos^2 x = - \cos 2x \end{cases}$$

$$\boxed{4} \begin{cases} 2 \cos^2 x - 1 = + \cos 2x \\ 1 - 2 \cos^2 x = - \cos 2x \end{cases}$$

دوتا رابطه رو هم قبلاً پرات گفته بودم حالا قسمت بعدش و ادامهش رو هم حفظ کن

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{2}{4} \sin^2 2x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

مثال 57 : اگر $\tan 2x + \cot 2x = 4$ باشد، $\sin 4x$ کدام است؟



$$2(1) \quad \frac{1}{2}(2) \quad -2(3) \quad -\frac{1}{2}(4)$$

پاسخ



$$\boxed{\tan \ominus + \cot \ominus = \frac{1}{\sin \ominus \cdot \cos \ominus} = \frac{2}{\sin 2\ominus}}$$

$$\frac{2}{\sin 2(2x)}$$

$$\boxed{\tan 2x + \cot 2x} = 4 \rightarrow \frac{2}{\sin 4x} = 4 \rightarrow \frac{\sin 4x}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2}$$



مثال 58: مقدار $Tan195^\circ - Tan105^\circ$ کدام است؟

- 1) 2 2) $2\sqrt{3}$ 3) $\sqrt{3}$ 4) 4

پاسخ: اول اضافات درجات کمان رو بریزیم دور!


$$Tan195^\circ - Tan105^\circ = Tan(\pi + 15^\circ) - Tan(\frac{\pi}{2} + 15^\circ) = Tan(15^\circ) - (-Cot15^\circ) = Tan(15^\circ) + (Cot15^\circ)$$

مثال 59: اگر $Tan \frac{x}{2} - Cot \frac{x}{2} = 1$ باشد مقدار $Tan2x$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج 94)

- 1) $-\frac{3}{2}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{4}{3}$ 4) $\frac{3}{2}$

پاسخ: تو صفحه ی قبلی فوندریم $Cotx - Tanx = 2Cot2x$ پس از اون میتونیم نتایج زیر رو به خاطر بفرستیم

$$\begin{cases} Cot \theta - Tan \theta = 2.Cot2\theta \\ Tan \theta - Cot \theta = -2.Cot2\theta \end{cases}$$

مثال 60: اگر $\frac{Sinx + 2Cosx}{Sinx - 3Cosx} = 2$ باشد، آنگاه $\frac{1}{Sinx Cosx}$ کدام است؟ 

- 1) $-\frac{17}{4}$ 2) $\frac{17}{4}$ 3) $-\frac{65}{8}$ 4) $\frac{65}{8}$

پاسخ: فواسته ی مسئله $\frac{1}{Sinx Cosx}$ است

$$Tanx + Cotx = \frac{1}{SinxCosx} = \frac{2}{Sin2x}$$

که طبق روابط بالا حاصل جمع $Tanx + Cotx$ است پس اول $Tanx$ و سپس برعکس اون یعنی $Cotx$ رو باهم جمع می کنیم

$$\frac{Sinx + 2Cosx}{Sinx - 3Cosx} = 2 \xrightarrow{\div Cosx} \frac{Tanx + 2}{Tanx - 3} = 2 \rightarrow Tanx + 2 = 2Tanx - 6 \Rightarrow Tanx = 8 \Rightarrow Cotx = \frac{1}{8}$$

$$Tanx + Cotx = 8 + \frac{1}{8} = \frac{65}{8}$$

مثال 61: ساده شده ی عبارت $Cos3x - Cotx.Sin3x$ کدام است؟

- 1) $2Cosx$ 2) $2Sinx$ 3) $-2Sinx$ 4) $-2Cosx$

پاسخ: این مسئله یک تیپ مسئله ی بسیار مهم از مبداث مثلثات است. یادرت باشه هر وقت یک سینوس و یک کسینوس هم کمان دیری که در وسط اونا یک تانژانت یا کتانژانت باشه، این تیپ مسئله شکل می گیره. برای حل هم فقط کافی تانژانت یا کتانژانت مویود رو به صورت کسری بنویسیم و مفرج مشترک بگیریم

$$Cos3x - Cotx.Sin3x = Cos3x - \frac{Cosx}{Sinx}.Sin3x = Cos3x - \frac{Cosx.Sin3x}{Sinx} \xrightarrow{\text{مفرج مشترک بگیریم}}$$

$$\frac{Cos3x.Sinx}{Sinx} - \frac{Cosx.Sin3x}{Sinx} = \frac{Cos3x.Sinx - Cosx.Sin3x}{Sinx} = \frac{Cos \theta . Sin \theta - Cos \theta . Sin \theta}{Sin \theta} = \frac{Sin \theta - \theta}{Sin \theta}$$

$$\rightarrow \frac{Sin(x - 3x)}{Sinx} = \frac{-Sin2x}{Sinx} = \frac{-2Sinx.Cosx}{Sinx} = -2Cosx$$

چربازی: مقدار عبارت فواسته شده رو به ازای مثلاً 60° حساب کنیم




دو تا رابطه ی آخر:

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$


$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

عاشق سینوس شدم!!



مثال 62: حاصل $\frac{\tan x(1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2}$ کدام است؟ 

$\frac{1}{4} \sin^2 4x$ (4) $\frac{1}{4} \sin 2x$ (3) $\frac{1}{4} \sin 4x$ (2) $\frac{1}{4} \sin^2 2x$ (1)

پاسخ: به جداسازی کوپولو انجام بدهیم. تمام دیکه! 

$$\frac{\tan x(1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2} = \frac{\tan x}{(1 + \tan^2 x)} \times \frac{(1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)} = \frac{1}{2} \sin 2x \times \cos 2x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 4x \right) = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2 \tan x}{(1 + \tan^2 x)} = \frac{1}{2} \times \sin 2x$$

چتر بازی: مقدار عبارت فواسته شده رو به ازای مثلاً 60° حساب کنیم و باز هم گزینه ای درست است که به ازای 60° همان مقدار قبلی را

برده

مثال 63: اگر $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$ باشد مقدار $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟ (سنجش 93)

$-\frac{\sqrt{2}}{5}$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ (1)

پاسخ: فب اول ببینیم در رابطه ی ساره شده ی $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4})$ چه چیزهایی رو باید بدست بیاریم

$$\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sin 2\alpha \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)$$

پس برای بدست آوردن جواب، ما به $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ احتیاج داریم. با توجه به اینکه داده ی مسئله $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$ است پس از آن برای

رسیدن به فواسته هایمان کمک میکنیم

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \xrightarrow{\tan \alpha = -\frac{1}{2}} \sin 2\alpha = \frac{2(-\frac{1}{2})}{1 + (-\frac{1}{2})^2} \rightarrow \boxed{\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \xrightarrow{\tan \alpha = -\frac{1}{2}} \cos 2\alpha = \frac{1 - (-\frac{1}{2})^2}{1 + (-\frac{1}{2})^2} \rightarrow \boxed{\cos 2\alpha = \frac{3}{5}}$$

حالا دیکه می توئیم مقدار $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4})$ یا ساره شده ی اون که $\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)$ شد و در بالا بدست آوردیم رو حساب کنیم

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) \xrightarrow{\substack{\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ \cos 2\alpha = \frac{3}{5}}} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{5} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$



مثال 64: اگر $Tan\beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ باشند مقدار $Sin2\alpha$ کدام است؟ (سراسری تجربی داخل 94)

- / 45 (1 ○ / 6 (2 ○ / 75 (3 ○ / 8 (4

پاسخ چون فواسته ی مسئله $Sin2\alpha$ هست و دازه ی مسئله بر حسب تانژانت است ، پس اول باید بریم به $Tan\alpha$ برسیم و از

رابطه ی $Sin2\alpha = \frac{2Tan\alpha}{1+Tan^2\alpha}$ به راحتی مسئله تموم میشه

نسبت‌های مثلثاتی $3x$:

$$Sin3x = 3Sinx - 4Sin^3x$$

$$Cos3x = 4Cos^3x - 3Cosx$$



شاید باورتون نشه ولی این مبحث مطالعه آزاد است اگه دوست داشتی درصد ریاضی کنکور 100% باشه این مبحث رو حتماً بخون

مثال 65: حاصل عبارت $\frac{Sin3x}{Sinx} - \frac{Cos3x}{Cosx}$ کدام است؟

- 2 (1 $\frac{1}{2}$ (2 $\frac{1}{Sinx}$ (3 $\frac{1}{Cosx}$ (4

پاسخ

$$\frac{Sin3x}{Sinx} - \frac{Cos3x}{Cosx} = \frac{Sin3xCosx - SinxCos3x}{SinxCosx} = \frac{Sin(3x-x)}{SinxCosx} = \frac{Sin2x}{\frac{1}{2}Sin2x} = 2$$

یه جور دیگه

$$\frac{Sin3x}{Sinx} - \frac{Cos3x}{Cosx} = \frac{3Sinx - 4Sin^3x}{Sinx} - \frac{4Cos^3x - 3Cosx}{Cosx} = (3 - 4Sin^2x) - (4Cos^2x - 3) = 3 - 4Sin^2x - 4Cos^2x + 3 = 6 - 4(Sin^2x + Cos^2x) = 2$$

مثال 66: ساده شده عبارت $Cos4x + Tanx \cdot Sin4x$ کدام است؟

- 4Cos^2x - 3 (1 4Sin^2x + 1 (2 2Sin^2x + 1 (3 2Cos^2x - 3 (4

پاسخ قبلا گفته بودیم که هر وقت تانژانت یا کتژانت رفته بود وسط سینوس و کسینوس برای فودش میبگیریم! باید عبارت تانژانت یا کتژانت رو کسری بنویسی و مخرج مشترک بگیری، مسئله فور به فور حل میشه

$$Cos4x + Tanx \cdot Sin4x = Cos4x + \frac{Sinx}{Cosx} \cdot Sin4x = \frac{Cos4x \cdot Cosx + Sinx \cdot Sin4x}{Cosx} = \frac{Cos(4x-x)}{Cosx} \rightarrow$$

$$\frac{Cos3x}{Cosx} = \frac{4Cos^3x - 3Cosx}{Cosx} = \frac{Cosx(4Cos^2x - 3)}{Cosx} = 4Cos^2x - 3$$

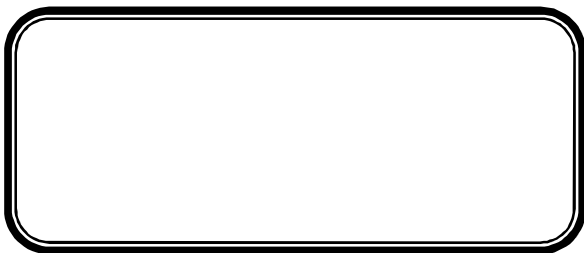


جمع بندی فرمول های مثلثاتی:

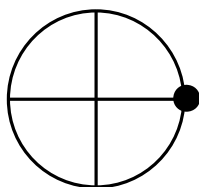
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \end{cases}$	$\left. \begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} \end{aligned} \right\} \rightarrow \tan x \cdot \cot x = 1$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$
$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$	$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$
$\cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$	$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$
$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$	$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$	$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$
$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$	$\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$
$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$	$1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$
$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$	$\cot x - \tan x = 2\cot 2x$
$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$	$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$



آشنایی با دایره و جوابهای عمومی (عقربه های n سر):

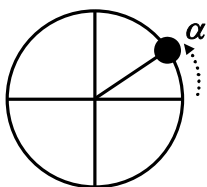


تعریف: به n تا عقربه که روی دایره قرار بگیرند و زاویه های بین هر دو عقربه تا عقربه ی بعدی مقداری ثابت باشد "عقربه های n سر" میگویم



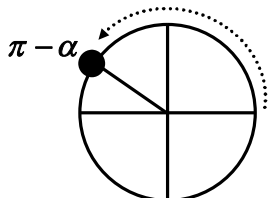
$$x = \frac{2k\pi}{1} + (0)$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi$$



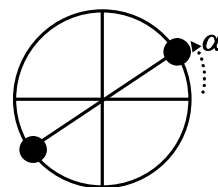
$$x = \frac{2k\pi}{1} + (\alpha)$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + (\alpha)$$



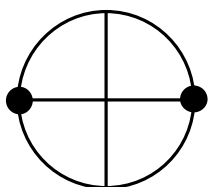
$$x = \frac{2k\pi}{1} + (\pi - \alpha)$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + (\pi - \alpha)$$



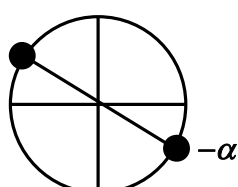
$$x = \frac{2k\pi}{1} + (\alpha)$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + (\alpha)$$



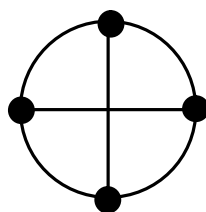
$$x = \frac{2k\pi}{2} + (0)$$

$$\Rightarrow x = k\pi$$



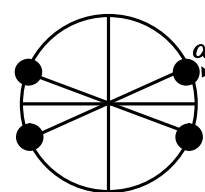
$$x = \frac{2k\pi}{2} + (\alpha)$$

$$\Rightarrow x = k\pi + (\alpha)$$



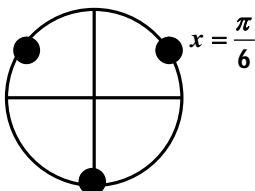
$$x = \frac{2k\pi}{4} + (0)$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$



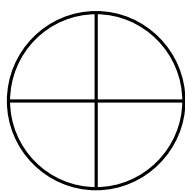
$$x = \frac{2k\pi}{4} + (\alpha)$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + (\alpha)$$

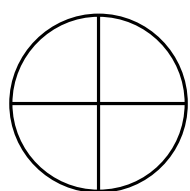


$$x = \frac{2k\pi}{6} + (\frac{\pi}{6})$$

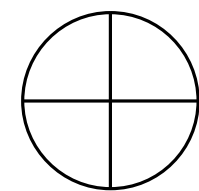
$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$



$$x = \frac{k\pi}{4}$$



$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$



$$x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

یکی از دبیرستان های تهران هنگام برگزاری امتحانات سال چهارم دبیرستان به عنوان موضوع انشا این مطلب داده شد که "شجاعت یعنی چه؟" محصلی در قبال این موضوع فقط نوشته بود:

"شجاعت یعنی این"

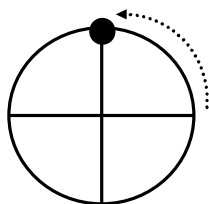
و برگه ی خود را سفید به ممتحن تحویل داده بود و رفته بود! اما برگه ی آن جوان دست به دست دبیران گشته بود و همه به اتفاق و بدون... استثنا به ورقه سفید او نمره 20 دادند فکر میکنید اون دانش آموز چه کسی می تونست باشه؟

دکتر شریعتی



معادلات خاص :

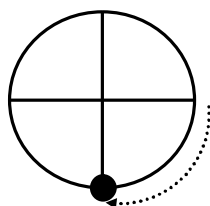
$Sinx = 1$



$x = \frac{2k\pi}{1} + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

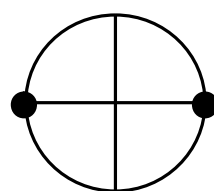
$Sinx = -1$



$x = \frac{2k\pi}{1} - \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

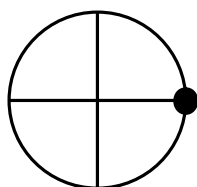
$Sinx = 0$



$x = \frac{2k\pi}{2} + (0)$

$\Rightarrow x = k\pi$

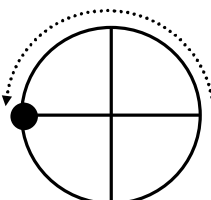
$Cosx = 1$



$x = \frac{2k\pi}{1} + (0)$

$\Rightarrow x = 2k\pi$

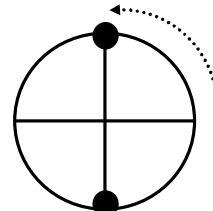
$Cosx = -1$



$x = \frac{2k\pi}{1} + \pi$

$\Rightarrow x = 2k\pi + \pi$

$Cosx = 0$



$x = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

معادلات مثلثاتی :

اول این سه تارو حفظ کن !!!

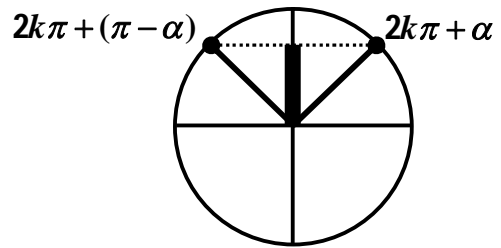
- 1 $Sinx = Sin(\text{sheep}) \Rightarrow \begin{cases} x = \text{sheep} \\ x = \pi - \text{sheep} \end{cases}$
- 2 $Cosx = Cos(\text{sheep}) \Rightarrow x = \pm \text{sheep}$
- 3 $Tanx = Tan(\text{sheep}) \Rightarrow x = \text{sheep}$
- $Cotx = Cot(\text{sheep})$



حل معادلات مثلثاتی:

1

$$\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + (\alpha) \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$



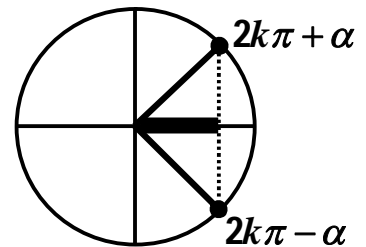
مثال 67: جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $2\sin x = 1$ را بیابید:

پاسخ

$$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + (\frac{\pi}{6}) \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

2

$$\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm (\alpha)$$



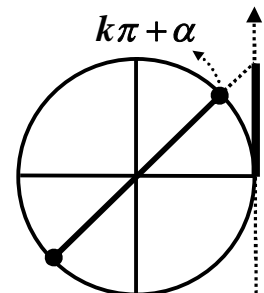
مثال 68: جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ را بیابید:

پاسخ

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \rightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{3}) \rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{7\pi}{24} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{24} \end{cases}$$

3

$$\begin{cases} \tan x = \tan \alpha \\ \cot x = \cot \alpha \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + (\alpha)$$



مثال 69: جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $\tan(x - \frac{\pi}{3}) = 1$ را بیابید:

پاسخ

$$\tan(x - \frac{\pi}{3}) = 1 \rightarrow \tan(x - \frac{\pi}{3}) = \tan \frac{\pi}{4} \rightarrow x - \frac{\pi}{3} = k\pi + (\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12}$$

"کرایسلر" یکی از موسیقی دانان بزرگ، پس از اجرای یک برنامه برجسته تکنوازی، مخاطب یکی از حضار قرار گرفت:

-آقای کرایسلر! حاضر بودم نیمی از زندگیم را بدهم تا بتوانم مثل شما ویولن بزنم. کرایسلر پاسخ داد: "من هم دقیقا همین کار را کردم".





اگر روپروی کمان های مرتبط با نسبت های Tan, Cot, Sin عبارت مثلثاتی هم نام بود و ضریب منفی داشت برای از بین بردن این منفی رو مُخ، منفی را میبریم داخل نسبت (فقط کمان را منفی می کنیم یعنی: $\alpha \rightarrow -\alpha$) ولی برای Cos نمی توانیم این ترفند رو انجام بدیم (چون کسینوس منفی خوراست) پس باید از تبدیل $\alpha \rightarrow \pi - \alpha$ استفاده کنیم



مثال 70: جواب های کلی معادله های مثلثاتی زیر را بیابید:

الف: $Sinx = -\frac{1}{2} \rightarrow Sinx = Sin \frac{-\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{6}) \\ x = 2k\pi + (\pi - (-\frac{\pi}{6})) \end{cases}$

ب: $Cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow Cosx = Cos(\pi - \frac{\pi}{4}) \rightarrow Cosx = Cos(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

ج: $Tanx = -1 \rightarrow Tanx = Tan \frac{-\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

د: $Cotx = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow Cotx = Cot \frac{-\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$

هرگاه در دو طرف تساوی، دو نسبت هم نام که مربع کامل هستند را داشته باشیم بهتر است روابط زیر را بکار ببریم:

$$\left. \begin{aligned} Sin^2 x &= Sin^2 \alpha \\ Cos^2 x &= Cos^2 \alpha \\ Tan^2 x &= Tan^2 \alpha \\ Cot^2 x &= Cot^2 \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$



مثال 71: جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $Tanx = 3Cotx$ را بیابید: (تمرین کتاب درسی صفحه ی 64)

پاسخ

$$Tanx = 3 \frac{1}{Tanx} \xrightarrow{\times Tanx} Tan^2 x = 3 \rightarrow Tan^2 x = (\sqrt{3})^2 \rightarrow Tan^2 x = Tan^2 \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

به جور دیگه

$$Tanx = 3 \frac{1}{Tanx} \xrightarrow{\times Tanx} Tan^2 x = 3 \rightarrow Tan^2 x = 3 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} Tanx = \pm \sqrt{3}$$

یک بار با مثبتش حل می کنیم و یک بار با منفیش

$$\begin{cases} Tanx = +\sqrt{3} \rightarrow Tanx = Tan \frac{\pi}{3} \xrightarrow{Tan(\text{⊗})=Tan\alpha \Rightarrow (\text{⊗})=k\pi+\alpha} x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ Tanx = -\sqrt{3} \rightarrow Tanx = Tan(-\frac{\pi}{3}) \xrightarrow{Tan(\text{⊗})=Tan\alpha \Rightarrow (\text{⊗})=k\pi+\alpha} x = k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

مثلثات



مثال 72: تمام جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $2\sin^2 x - 1 = 0$ کدام است؟

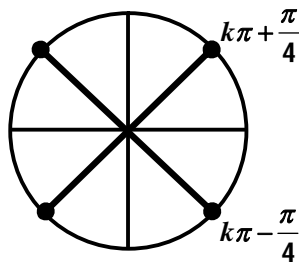
- (1) $\frac{k\pi}{4}$ (2) $(\frac{2k+1}{4})\pi$ (3) $k\pi$ (4) $2k\pi$

$2\sin^2 x - 1 = 0 \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^2 x = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \rightarrow \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

پاسخ

جواب درست اومده در گزینه ها نیست پس اول به مغز ممتزم دستور میدی ببینی $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ رو دایره یه شکلی از عقربه ها رو دایره

تا ببینیم جواب های معادله در یک دور کامل دایره کجاها هستن. سپس جواب بردیری با استفاده از فرمول $x = \frac{2k\pi}{n} + \alpha$ برایش می نویسیم



یه جور دیگه می تونی با معادله $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ حلش کنیم

$2\sin^2 x - 1 = 0 \rightarrow -\cos 2x = 0 \rightarrow$

$\cos 2x = 0 \rightarrow \cos(\text{شماره}) = 0 \Rightarrow (\text{شماره}) = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

مثال 73: جواب کامل معادله ی $\sin 4x \cdot \cos x + \cos 4x \cdot \sin x = 1$ کدام است؟

- (1) $x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$ (2) $x = \frac{k\pi}{3}$ (3) $x = \frac{2k\pi}{5}$ (4) $x = \frac{k\pi}{5}$

پاسخ

$\sin 4x \cdot \cos x + \cos 4x \cdot \sin x = 1 \xrightarrow{\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b = \sin(a+b)} \sin(4x + x) = 1$



$\rightarrow \sin(5x) = 1 \xrightarrow{\sin(\text{شماره}) = 1 \Rightarrow \text{شماره} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}} 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 5} x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$

چند قورباغه از جنگلی عبور می کردند که ناگهان دو تا از آنها به داخل گودال عمیقی لیز خورده و روی دیواره گودال گیر کردند. بقیه قورباغه ها در کنار گودال جمع شدند و وقتی دیدند که گودال چقدر عمیق است، به دو قورباغه دیگر گفتند که دیگر چاره ای نیست، شما به زودی سقوط می کنید و می میرید! دو قورباغه، این حرف ها را نشنیده گرفتند و با تمام توانشان کوشیدند که از گودال بیرون بپرند. اما قورباغه های دیگر، مدام می گفتند که دست از تلاش بردارند، چون نمی توانند از گودال خارج شوند و خیلی زود خواهند مرد. بالاخره یکی از دو قورباغه، تسلیم گفته ی دیگر قورباغه ها شد و دست از تلاش برداشت. سرانجام به داخل گودال پرت شد و مرد. اما قورباغه دیگر با تمام توان برای بیرون آمدن از گودال تلاش می کرد. هر چه بقیه قورباغه ها فریاد زدند که تلاش بیشتر فایده ای ندارند، او مصمم تر می شد!! تا اینکه بالاخره از گودال خارج شد. وقتی بیرون آمد، بقیه قورباغه ها از او پرسیدند: "مگر تو حرف های ما را نمی شنیدی!!؟! معلوم شد که قورباغه ناشناخته! در واقع، او در تمام مدت فکر می کرده که دیگران او را تشویق می کنند!"

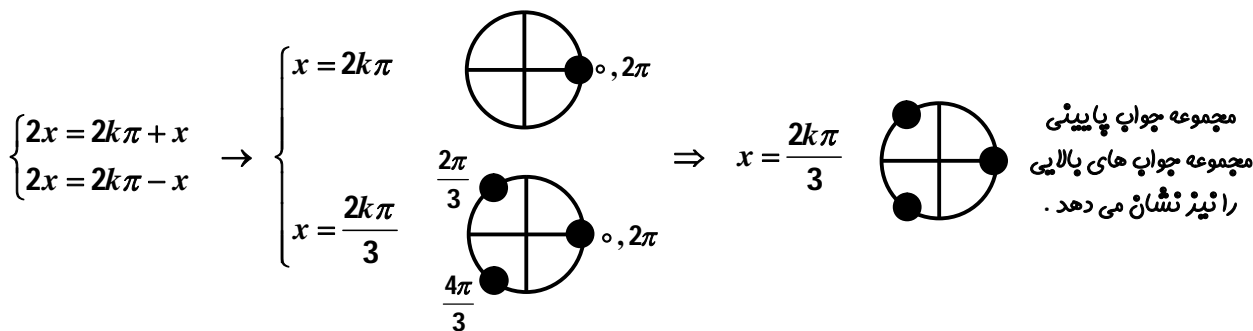


مثال 74: تمام جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $\cos 2x - \cos x = 0$ کدام است؟

- (1) $\frac{2k\pi}{3}$ (2) $(\frac{2k+1}{4})\pi$ (3) $k\pi$ (4) $2k\pi$

پاسخ در معادلات مثلثاتی یادت باشه آله دو طرف تساوی یک نسبت مثلثاتی باشه و ضربی پشت اون ها نباشه کارت فیلی راحت هست فقط کافی یکی رو بگیریم کمان کلی و یکی رو بگیریم α و بعرضم بزرگیری !!

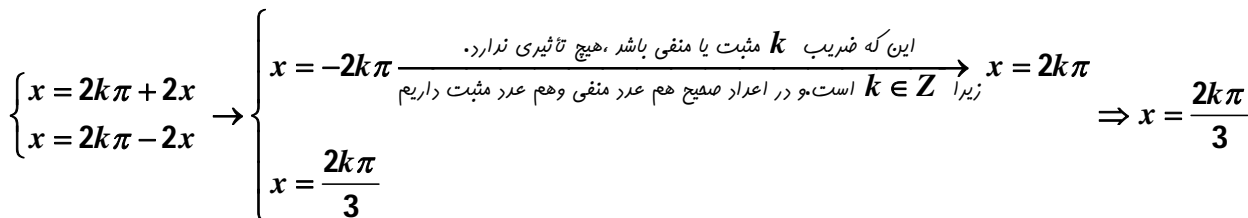
$$\cos 2x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos \underbrace{2x}_{(\otimes)} = \cos \underbrace{x}_{\alpha} \xrightarrow{\cos(\otimes) = \cos \alpha \Rightarrow (\otimes) = 2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm x$$



فالا سوالی که برات تماماً برات پیش میار اینه که آله من برای عبارت معادله α و \otimes رو به صورت $\cos \underbrace{2x}_{\alpha} = \cos \underbrace{x}_{(\otimes)}$ در نظر بگیرم جواب

های دیگه ای بدست میارم؟؟؟ بریم بررسی کنیم

$$\cos 2x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos \underbrace{x}_{(\otimes)} = \cos \underbrace{2x}_{\alpha} \xrightarrow{\cos(\otimes) = \cos \alpha \Rightarrow (\otimes) = 2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm 2x$$



پس یادمون باشه آله در جواب حل معادله $(-k)$ دیدیم میتونیم به جای اون (k) رو جایگذاری کنیم

روزی روزگاری، عابد خداپرستی بود که در عبادتکده ای در دل کوه راز و نیاز خدا میکرد، آتقدر مقام و منزلتش پیش خدا زیاد شده بود که خدا هر شب به فرشتگانش امر میکرد تا از طعام بهشتی، برای او ببرند و او را بدینگونه سیر نمایند... بعد از 70 سال عبادت، روزی خدا به فرشتگانش گفت: امشب برای او طعام نبرید، بگذارید امتحانش کنیم آن شب عابد هر چه منتظر غذا شد، خبری نشد، تا جایی که گرسنگی بر او غالب شد. طاقتش تمام شد و از کوه پایین آمد و به خانه بت پرستی که در دامنه کوه منزل داشت رفت و از او طلب نان کرد، بت پرست 3 قرص نان به او داد و او بسمت عبادتگاه خود حرکت کرد. سگ نگهبان خانه بت پرست به دنبال او راه افتاد، جلوی راه او را گرفت... مرد عابد یک قرص نان را جلوی او انداخت تا برگردد و بگذارد او برایش ادامه دهد، سگ نان را خورد و دوباره راه او را گرفته، مرد قرص دوم نان را نیز جلوی او انداخت و خواست برود اما سگ دست بردار نبود و نمی گذاشت مرد به راهش ادامه دهد. مرد عابد با عصبانیت قرص سوم را نیز جلوی او انداخت و گفت: ای حیوان تو چه بی حیایی! صاحب قرص نانی به من داد اما تو نگذاشتی آنرا ببرم؟ سگ به سخن آمد و گفت: من بی حیا نیستم، من سالهای سال سگ در خانه مردی هستم، شبهایی که به من غذا داد پیشش ماندم، شبهایی هم که غذا نداد باز هم پیشش ماندم، شبهایی که مرا از خانه اش راند، پشت در خانه اش تا صبح نشستم... تو بی حیایی، تو که عمری خدایت هر شب غذای شبت را برایت فرستاد و هر چه خواستی عطایت کرد، یک شب که غذایی نرسید، فراموش کردی و از او بریدی و برای رفع گرسنگی ات به در خانه یک بت پرست آمدی و طلب نان کردی... مرد با شنیدن این سخنان منقلب شد و به عبادتگاه خویش بازگشت و توبه کرد...



در حل معادلات مثلثاتی ابتدا سعی می کنیم طرفین معادله را به یک نسبت مثلثاتی تبدیل نماییم و معادله را حل کنیم، در صورتیکه این روش امکان پذیر نباشد، معادله را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی به یک نسبت مثلثاتی تبدیل کرده و سپس معادله را حل می کنیم.

یکی از بهترین راه های تغییر فاز دادن یک نسبت مثلثاتی اینه که هم زمان با تغییر فاز کمان اون رو از $\frac{\pi}{2}$ کم کنیم

مثال 75: تمام جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $\cos 2x = \sin 3x$ کدام است؟



پاسخ در این معادله اصلاً دو طرف معادله یک نسبت مثلثاتی نداریم فب پی کار کنیم یکیشون تغییر فاز بره !!

$$\cos 2x = \sin 3x \rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \\ 2x = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

متوجه ی داستان شری دیکه !!



حالا باز دانش آموز زرنگ داره با خودش فکر میکنه که فب طرف چپ که \cos بود رو هم میشد با کم کردن از $\frac{\pi}{2}$ و تغییر فاز به \sin تبدیل کنیم؟؟

آیا جواب ها فرق می کنه !!!

$$\cos 2x = \sin 3x \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 3x \rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\ 3x = 2k\pi + \left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

مثال 76: تمام جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $\tan 4x = \cot\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)$ کدام است؟



$$\frac{1}{8}(k\pi + \frac{\pi}{6}) \quad (4) \quad \frac{1}{4}(k\pi + \frac{\pi}{6}) \quad (3) \quad \frac{1}{8}(k\pi + \frac{\pi}{3}) \quad (2) \quad \frac{1}{4}(k\pi + \frac{\pi}{3}) \quad (1)$$

پاسخ

$$\tan 4x = \cot\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right) \xrightarrow[\text{کاتانژانت تبدیل به تانژانت شود}]{\text{کمان سمت راست تساوی را از } \frac{\pi}{2} \text{ کم می کنیم تا}} \tan 4x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)\right) \rightarrow$$

$$\tan \underbrace{4x}_{\text{Ⓢ}} = \tan \underbrace{\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right)}_{\alpha} \xrightarrow{\tan(\text{Ⓢ}) = \tan \alpha \Rightarrow (\text{Ⓢ}) = k\pi + \alpha} 4x = k\pi + \left(\frac{\pi}{6} - 4x\right)$$

$$8x = k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\div 8} x = \frac{1}{8}(k\pi + \frac{\pi}{6})$$

پدر روزنامه می خواند، اما پسر کوچکش مدام مزاحمش می شد حوصله ی پدر سر رفت و صفحه ای از روزنامه را که نقشه ی جهان را نمایش می داد جدا و قطعه قطعه کرد و به پسرش داد. - بیا! کاری برایت دارم، یک نقشه ی دنیا به تو می دهم، ببینم می توانی آن را دقیقاً همان طور که هست بچینی؟ و دوباره سراغ روزنامه اش رفت. می دانست پسرش تمام روز گرفتار این کار است. اما.... یک ربع ساعت بعد پسرک با نقشه ی کامل برگشت. پدر با تعجب پرسید: مادرت به تو جغرافی یاد داده؟ پسر جواب داد: جغرافی دیگر چیست؟ پدر پرسید: پس چگونه توانستی این نقشه ی دنیا را بچینی؟ پسر گفت: اتفاقاً پشت همین صفحه تصویر ی از یک آدم بود، وقتی توانستم آن آدم را دوباره بسازم دنیا را هم دوباره ساختم.

مثلثات

مثال 77: معادله ی مثلثاتی $\sin 4x + \sin 3x = 0$ در فاصله ی $[0, \pi]$ چند ریشه دارد؟ (تمرین کتاب درسی صفحه ی ۶۴)

1 (3 2 4 3 5 4 6

پاسخ:

$$\sin 4x + \sin 3x = 0 \rightarrow \sin 4x = -\sin 3x \xrightarrow{\text{منفی پشت سینوس رو میبیریم داخل کمانش}} \sin 4x = \sin (-3x)$$

$$\sin(\text{⊗}) = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} \text{⊗} = 2k\pi + (\alpha) \\ \text{⊗} = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + (-3x) \\ 4x = 2k\pi + (\pi - (-3x)) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{7} & : (1) \\ x = 2k\pi + \pi & : (2) \end{cases}$$

حالا که در معادله ی (1) و (2) به جای k مقادیر صحیح قرار بریم، می تویم بفهمیم کدوم جواب ها در فاصله ی $[0, \pi]$ وجود دارد

معادله ی (1):

k	-1	0	1	2	3	4
x	$-\frac{2\pi}{7}$	0	$\frac{2\pi}{7}$	$\frac{4\pi}{7}$	$\frac{6\pi}{7}$	$\frac{8\pi}{7}$
		X	✓	✓	✓	✓	X	

معادله ی (2):

k	-1	0	1
x	$-\pi$	π	3π
		X	✓	X	

پس معلوم شد که معادله ی (1) دارای چهار جواب و معادله ی (2) دارای یک جواب در فاصله ی $[0, \pi]$ هستند و چون جواب مشترک بین آن ها

نیست، پس معادله در کل 5 جواب در فاصله ی $[0, \pi]$ دارد

لم یغما:

مثال 78: هر یک از معادلات زیر در فاصله ی داده شده چند جواب دارد؟

تیبصره:

اگر جواب سینوس برابر عدد صفر و یا جواب کسینوس برابر یک شد

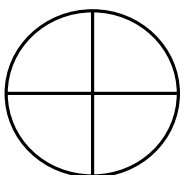
(جواب در ابتدا یا انتهای بازه ی $[0, 2\pi]$ باشد)

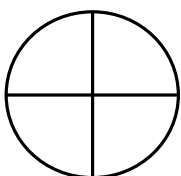
آنگاه از تعداد جواب در فاصله ی $[0, 2\pi]$

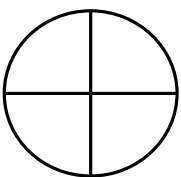
یک واحد کم می کنیم و بعدش

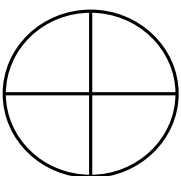
ضرب ها روانجام می دهیم و سپس به جواب

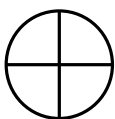
نهایی یک واحد اضافه می کنیم

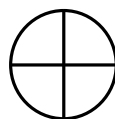
$$\sin x = \frac{1}{4}; [0, 2\pi]$$


$$\cos x = -\frac{1}{3}; [0, 6\pi]$$


$$\sin 2x = \frac{1}{5}; [0, 2\pi]$$


$$\sin 3x = \frac{1}{6}; [0, 8\pi]$$


$$\cos 2x = 1; [0, 6\pi]$$


$$\sin 3x = 0; [0, 4\pi]$$




مثال 79: معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$ در فاصله‌ی $(0, 4\pi)$ چند ریشه دارد؟

3 (1) 4 (2) 6 (3) 4 (4) صفر

پاسخ:

حفظ شود

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

$\sin x = 1$



$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\sin(\text{شماره}) = 1 \rightarrow \text{شماره} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{8}$$

به k مقادیر اعزاز صحیح می دهیم

k	0	1	2	3	4
x	$\frac{\pi}{8}$	$\pi + \frac{\pi}{8}$	$2\pi + \frac{\pi}{8}$	$3\pi + \frac{\pi}{8}$	$4\pi + \frac{\pi}{8}$
		✓	✓	✓	✓	✗	

پاسخ بازی:

$\sin x = 1$



$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1; (0, 4\pi) \xrightarrow{(0, 2\pi)}$$

مثال 80: معادله‌ی مثلثاتی $2\sin^3 x - \sin x = 0$ در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

7 (4) 6 (3) 5 (2) 4 (1)

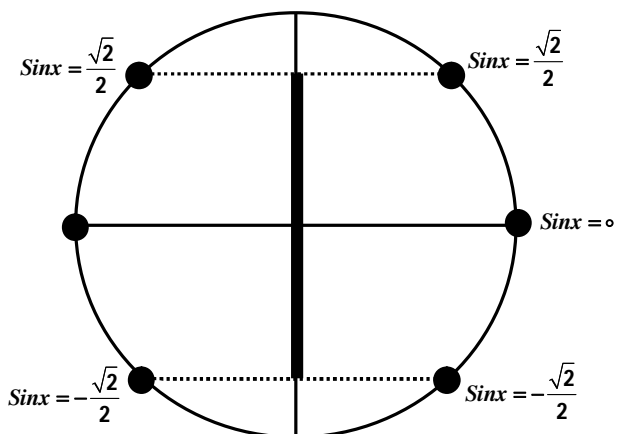
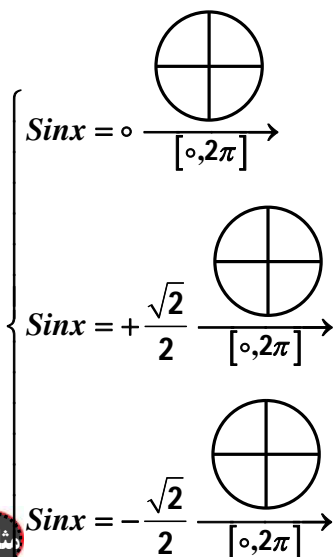
پاسخ:

$$2\sin^3 x - \sin x = 0 \rightarrow \sin x (2\sin^2 x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 2\sin^2 x - 1 = 0 \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

در ادامه برای درست آوردن تعداد جواب در فاصله $[0, 2\pi]$ دو تا راه داریم:

راه دوم: (پاسخ بازی)

راه اول: (با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی)



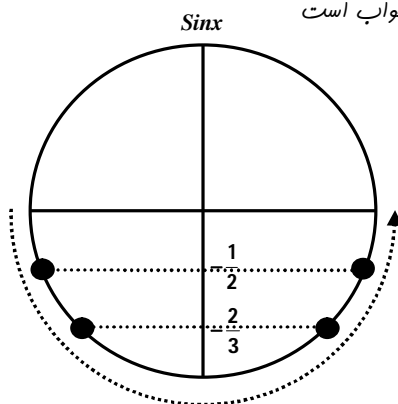
مثال 84: معادله‌ی مثلثاتی $(2\sin x + 1)(3\sin x + 2) = 0$ چند جواب در بازه‌ی $[\pi, 2\pi]$ دارد؟

- 1 (1) 2 (3) 3 (2) 4 (3) 2 (4)

پاسخ: همان طور که در شکل مشاهده می‌کنید، $\sin x$ برابر $-\frac{1}{2}$ در فاصله‌ی $[\pi, 2\pi]$ دو جواب و همچنین $\sin x$ برابر $-\frac{2}{3}$ در فاصله‌ی

$[\pi, 2\pi]$ نیز دارای دو جواب است

$$(2\sin x + 1)(3\sin x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow$$



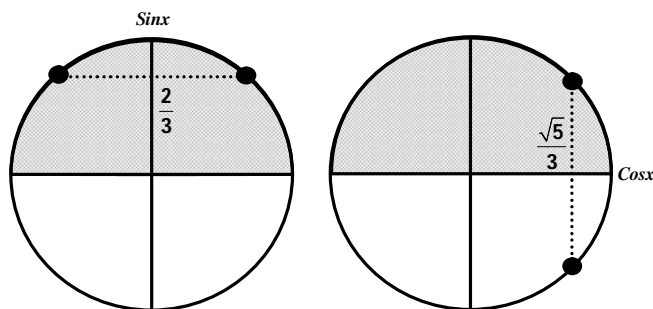
مثال 85: معادله‌ی مثلثاتی $(3\sin x - 2)(3\cos x - \sqrt{5}) = 0$ چند جواب متمایز در بازه‌ی $[0, \pi]$ دارد؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (3) 2 (4)

پاسخ: در این سؤال باید هواسست باشه که ریشه‌ی مشترک بوجود نیومده باشه (در سؤال قبلی چون نقاط در مکان‌های مختلف بودن امکان

نداشت نقطه‌ی مشترک بوجود بیاد) در ضمن بازه‌ی $[0, \pi]$ یعنی ربع اول و دوم

$$(3\sin x - 2)(3\cos x - \sqrt{5}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2}{3} \\ \cos x = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \Rightarrow$$



مثال 86: نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه‌ی $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ، در چند نقطه محور x را قطع می‌کند؟

(سراسری تجربی خارج 91)

- 1 (5) 2 (3) 3 (4) 4 (2) 2 (4)

پاسخ: محل تقاطع محور x ها یعنی $y = 0$

$$\xrightarrow{y=0} y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \rightarrow \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \xrightarrow{\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = k\pi} \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \rightarrow$$


$$2x = \frac{\pi}{4} - k\pi \xrightarrow{\div 2} x = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}$$

به مقادیر اعداد صحیح می‌دهیم

k	-2	-1	0	1	2
x	$\frac{\pi}{8} + \pi$	$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8} - \pi$

✓ ✓ ✓ ✓ ✓



مثال 87: جواب کلی معادله ی مثلثاتی $(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3}$ کدام است؟ 

(سراسری تجربی خارج 90)

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (2)$$


$$k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

پاسخ: اول ساده سازی

$$(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3} \rightarrow (\sin x - \tan x)(\cot x) = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow (\sin x)(\cot x) - \underbrace{(\tan x)(\cot x)}_1 = -\frac{1}{2} \rightarrow (\sin x) \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) - 1 = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

مثال 88: جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$ کدام است؟ 

(سراسری تجربی داخل 85)

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

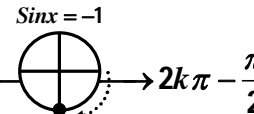
$$2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (2)$$


$$k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

پاسخ: اول ساده سازی

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \rightarrow \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)\right) = 1 + \cos x \rightarrow \cos x - \sin x = 1 + \cos x$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)$$

$$\sin x = -1 \rightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$


مثال 89: معادله ی $3 \tan x - \cot x = 2$ در فاصله ی $[0, 2\pi]$ ، چند ریشه دارد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی صفحه ی 64) 

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

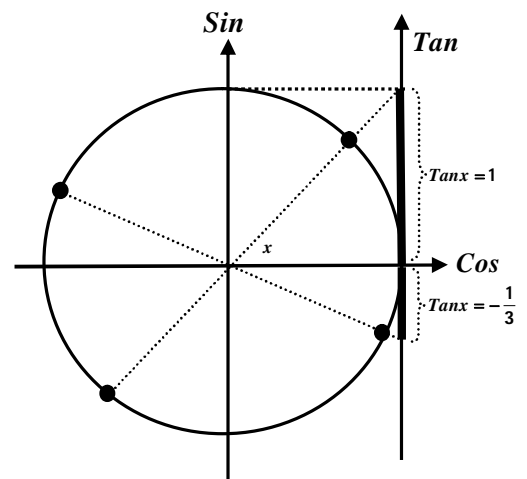
$$2 \quad (1)$$

پاسخ: یادت باشه در معادلات مثلثاتی که \tan و \cot با هم هستن با تبدیل $\tan = \frac{1}{\cot}$ مسئله حل میشه

$$3 \tan x - \cot x = 2 \rightarrow 3 \tan x - \frac{1}{\tan x} = 2 \xrightarrow{\tan x = A}$$

$$3A - \frac{1}{A} = 2 \xrightarrow{\times A} 3A^2 - 2A - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} \begin{cases} A = 1 \xrightarrow{A = \tan x} \tan x = 1 & \text{2 تا ریشه} \\ A = \frac{-1}{3} \xrightarrow{A = \tan x} \tan x = \frac{-1}{3} & \text{2 تا ریشه} \end{cases}$$



مثال 90: جواب کامل معادله $\frac{\tan^2 x - 1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = 0$ کدام است؟

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (4) $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ (3) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (2) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (1)

پاسخ: وارد مرحله ی بریدنی از معادله شدیم، میدونی برای پی؟ چون اینجا مفرج داریم و ریشه های مفرج رو باید بعد از حل معادله از جواب های بدست اومده خارج کنیم. فب کسری مساوی صفر است که صورت آن برابر صفر شود

$\frac{\tan^2 x - 1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = 0 \rightarrow \tan^2 x - 1 = 0 \rightarrow \tan^2 x = 1 \rightarrow$

$\tan^2 x = \tan^2 \frac{\pi}{4} \rightarrow \tan^2 x = \tan^2 \alpha \rightarrow x = k\pi \pm \alpha \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \checkmark \\ x = k\pi - \frac{\pi}{4} \times \text{ریشه های مفرج} \end{cases}$

از جواب های بدست اومده باید ریشه های مفرج رو کنار بزاریم $\sin x = 0 \rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \rightarrow \sin(\text{شماره}) = 0 \rightarrow (\text{شماره}) = k\pi \rightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

مثال 91: جواب کامل معادله $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی خارج 93)

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (4) $x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (3) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (2) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (1)

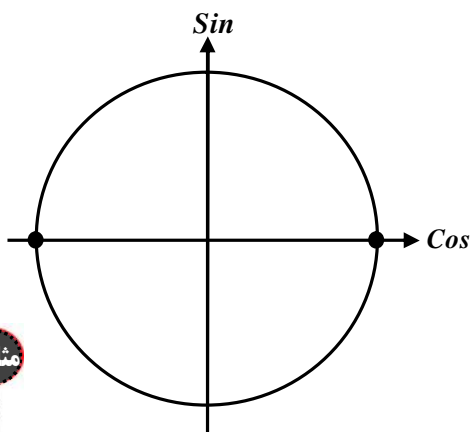
پاسخ:

$\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1 \rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \rightarrow \sin \underbrace{3x}_{(\text{شماره})} = \sin \underbrace{x}_{\alpha} \rightarrow \begin{cases} (\text{شماره}) = 2k\pi + \alpha \\ (\text{شماره}) = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$

$\begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi + (\pi - x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \xrightarrow{\div 2} \\ 4x = 2k\pi + \pi \xrightarrow{\div 4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = k\pi \times \text{ریشه های مفرج} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \checkmark \end{cases}$

ریشه های مفرج $\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$

قرار بود ریشه های مفرج رو کنار بگذاریم یارته دیگه!!



مثال 92: معادله $\frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} = 0$ در فاصله $[0, 4\pi]$ چند جواب دارد؟

4 (4) 3 (3) 2 (2) 1 (1)

پاسخ:

چون تعداد جواب رو فواسته، سریعتره که از روی دایره تعداد جواب رو بگیریم البته با رعایت کنار گذاشتن ریشه های مفرج!

مثال 93: جواب کامل معادله $\sin 2x = 2\cos x$ به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی خارج 93)

$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (1) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (2) $x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (3) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (4)

پاسخ:

$$2\sin x \cos x = 2\cos x \xrightarrow{\cos x = 0} 2\sin x = 2 \rightarrow \sin x = 1$$

$$\begin{cases} \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$



مثال 94: جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

(سراسری تجربی داخل 89)

$k\pi + \frac{\pi}{3}$ (4) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (3) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (1)

پاسخ: رابطه ی $\tan(x \pm \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan x \pm 1}{1 \mp \tan x}$ ، رو که یادت هست

$$\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{3} \rightarrow \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} + \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} = 2\sqrt{3} \rightarrow \frac{(\tan x + 1)^2 - (\tan x - 1)^2}{(1 - \tan x)(1 + \tan x)} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{(\tan^2 x + 2\tan x + 1) - (\tan^2 x - 2\tan x + 1)}{(1 - \tan^2 x)} = 2\sqrt{3} \rightarrow \frac{4\tan x}{1 - \tan^2 x} = 2\sqrt{3} \rightarrow 2\left(\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}\right) = 2\sqrt{3}$$

..... $\rightarrow \tan 2x$

$$2\tan 2x = 2\sqrt{3} \rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} \rightarrow \tan 2x = \tan \frac{\pi}{3} \rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

مثال 95: جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

(سراسری تجربی داخل 94)

$x = k\pi + \frac{\pi}{8}$ (4) $x = k\pi - \frac{\pi}{8}$ (3) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (2) $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (1)

پاسخ:

$$2\cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 1 \rightarrow (2\cos^2 x - 1) + (2\sin x \cdot \cos x) = 0 \rightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0 \rightarrow$$

$$\sin 2x = -\cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 2x = -1 \rightarrow \tan 2x = \tan(-\frac{\pi}{4}) \xrightarrow{\tan(\text{shaded}) = \tan \alpha \Rightarrow (\text{shaded}) = k\pi + \alpha}$$

$$2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

وقتی ناراحتی از اینکه به چیزی که میخواستی نرسیدی ناراحت نباش چون خدا در فکر چیز دیگه ای برای توست.



مثال 96: جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$ به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی خارج 94)

$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ (4)
 $x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$ (3)
 $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$ (2)
 $x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$ (1)

پاسخ: بازهم رابطه ی $\tan(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$ با به تغییر کوچک بنویسی دیکه فله!!

$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x \rightarrow \tan 3x = \tan(\frac{\pi}{4} - x) \rightarrow \tan(\text{شکل}) = \tan \alpha \Rightarrow (\text{شکل}) = k\pi + \alpha \rightarrow 3x = k\pi + (\frac{\pi}{4} - x)$
 $4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 4} x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$

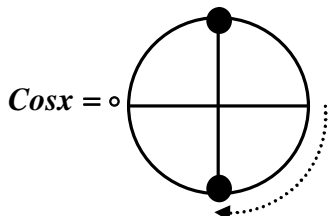
مثال 97: جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی خارج 94)

$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (4)
 $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ (3)
 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (2)
 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (1)

پاسخ:

$\cos 3x + \cos x = 0 \rightarrow \cos 3x = -\cos x \rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x) \rightarrow \cos(\text{شکل}) = \cos \alpha \Rightarrow (\text{شکل}) = 2k\pi \pm \alpha$

$3x = 2k\pi \pm (\pi - x) \rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + (\pi - x) \\ 3x = 2k\pi - (\pi - x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi \\ 2x = 2k\pi - \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \checkmark \\ x = k\pi - \frac{\pi}{2} \times \end{cases}$



جدی باش مهم: جواب $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ طبق ش کل

جایی است که کسینوس صفر میشه در صورتی که در مسئله مطرح شده بود $\cos x \neq 0$ باشه

مثال 98: معادله $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin x \cdot \cos x} = 2\sqrt{3}$ در فاصله $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

4 (4)
 3 (3)
 2 (2)
 1 (1)

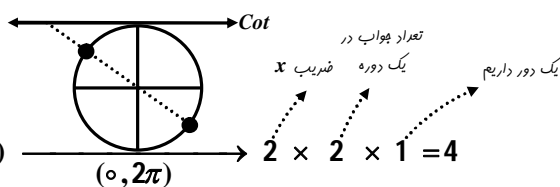
پاسخ: اول صورت کسر رو یکم ساده تر بنویسیم

$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x$
 (Note: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$!! دیکه 10 بار باهم مفظیریم

پس تا ایجا ساده شده ی کسر مورد نظر رو اینطوری داریم

$\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin x \cdot \cos x} = 2\sqrt{3} \rightarrow \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 2\sqrt{3} \rightarrow -2 \cot 2x = 2\sqrt{3} \xrightarrow{\div -2} \cot 2x = -\sqrt{3}$



چون در تست تعداد جواب رو خواسته کافی از لیم بازی بریم

$\cot 2x = -\sqrt{3}; (0, 2\pi)$





مثال 99: مجموع تمام جواب های معادله ی مثلثاتی $\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$ در بازه ی $[0, \pi]$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی داخل 95)

- (1) $\frac{7\pi}{4}$ (2) $\frac{9\pi}{4}$ (3) $\frac{5\pi}{2}$ (4) $\frac{11\pi}{3}$

پاسخ: ساره شده ی $\sin^4 x - \cos^4 x$ روکه در تست قبلی دیدی میشه $-\cos 2x$ پس بریم برای حل

$$\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x \rightarrow \sin 4x = -\cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 4x = -1 \rightarrow \tan 4x = \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\tan(\text{شکل}) = \tan \alpha \Rightarrow (\text{شکل}) = k\pi + \alpha \rightarrow 4x = k\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\div 4} x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$$

چون مجموع ریشه ها رو فواسته بود باید مثل بقیه ی آرم بعد حل معادله به آن اعداد صحیح را بدهیم تا جواب های در فاصله ی $[0, \pi]$ را ببینیم

$x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16} \Rightarrow$	k	0	1	2	3	4	5
	x	$-\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$	$\frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$	$\frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$
			X	✓	✓	✓	✓	X	

$$\Rightarrow \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16}\right) + \left(\frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{16}\right) + \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{16}\right) + \left(\frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{16}\right) = \frac{\pi + 2\pi + 3\pi + 4\pi}{4} - \frac{4\pi}{16} = \frac{10\pi}{4} - \frac{4\pi}{16} = \frac{40\pi}{16} - \frac{4\pi}{16} = \frac{36\pi}{16} = \frac{9\pi}{4}$$

مثال 100: در معادله ی مثلثاتی $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$ ، مجموع تمام جواب ها در بازه ی $[0, \pi]$ کدام است؟ (سراسری تجربی داخل 93)

- (1) $\frac{3\pi}{4}$ (2) $\frac{5\pi}{4}$ (3) $\frac{3\pi}{2}$ (4) $\frac{7\pi}{4}$

پاسخ:

$$\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x) \rightarrow \sin 2x \cdot \sin x + \sin 2x \cdot \cos x = \cos 2x \cdot \cos x - \cos 2x \cdot \sin x$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos 2x \cdot \sin x + \sin 2x \cdot \cos x = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x \rightarrow \sin(2x + x) = \cos(2x + x)$$

$$\rightarrow \sin(3x) = \cos(3x) \xrightarrow{\div \cos(3x)} \tan 3x = 1 \rightarrow \tan 3x = \tan \frac{\pi}{4} \quad \tan(\text{شکل}) = \tan \alpha \Rightarrow (\text{شکل}) = k\pi + \alpha$$

$$3x = k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 3} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

حالا به k مقادیر اعداد صحیح می دهیم و جواب های در فاصله ی $[0, \pi]$ رو می یابیم

$x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$	k	0	1	2	3
	x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$
			✓	✓	✓	X	

$$\Rightarrow \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$$




تست در منزل : (خیلی مهم !)

شامل سؤالات آزمون های قلم چی ، گاج و سنجش

مثال 1: مقدار عبارت $\sin 2x \times \cos 2x + \tan^2 2x$ به ازاء $x = \frac{3\pi}{8}$ کدام است؟

- (1) $-\frac{3}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{-3}{2}$ (4) $\frac{1}{2}$

پاسخ :

$$\sin 2x \times \cos 2x + \tan^2 2x \xrightarrow{x = \frac{3\pi}{8}} \sin \frac{3\pi}{4} \times \cos \frac{3\pi}{4} + \tan^2 \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{-\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

مثال 2: ساده شده عبارت $\sqrt{\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}}$ که در آن $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ می باشد کدام است؟

- (1) $-\cos x$ (2) $\cos x$ (3) $-\sin x$ (4) $\sin x$

پاسخ :

$$\sqrt{\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}} \rightarrow \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| \xrightarrow{\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi} -\sin x$$

ناهیه ی چهارم سینوس منفی است

مثال 3: عبارت $\cos(x + \frac{\pi}{4}) + \sin(x + \frac{\pi}{4})$ به ازاء جمیع مقادیر برابر x است با:

- (1) $\sqrt{2}\cos x$ (2) $-\sqrt{2}\cos x$ (3) $-\sqrt{2}\sin x$ (4) $\sqrt{2}\sin x$

پاسخ :

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \cos x \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \sin x \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \cancel{\sin x} + \cancel{\sin x} + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (2\cos x) = \sqrt{2}\cos x$$

مثال 4: ساده شده عبارت $\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4})$ کدام است:

- (1) $\frac{\tan x}{1 - \tan^2 x}$ (2) $\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$ (3) $\frac{4\tan x}{1 - \tan^2 x}$ (4) $\frac{4\tan x}{1 + \tan^2 x}$

پاسخ :

$$\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \times \tan \frac{\pi}{4}} + \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \times \tan \frac{\pi}{4}} \xrightarrow{\tan \frac{\pi}{4} = 1} \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} + \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$$

$$\frac{-(\tan x - 1)}{(1 - \tan x)^2} = \frac{-(\tan x - 1)}{(1 - \tan x)^2} = \frac{(\tan x + 1)^2 - (\tan x - 1)^2}{1 - \tan^2 x} \xrightarrow{(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab} \frac{4\tan x}{1 - \tan^2 x}$$



مهندسی یغما کلاتریان

مثلثات

مثال 5: اگر $\tan \frac{2\pi}{3} \cdot \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟ (سراسری تجربی داخل 88)

$$\tan \frac{2\pi}{3} \cdot \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$$
پاسخ: (1) $-\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

$$(-\sqrt{3}) \times (-\cos x) = 1 \rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \cos 2x = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

مثال 6: حاصل $\cos 2x + \frac{-1}{1+\tan^2 x} + \frac{2}{1+\cot^2 x}$ کدام است؟

$$\cos^2 x$$
 (4) 1 (3) $\sin^2 x$ (2) -1 (1)
 پاسخ: (2)

$$\cos 2x + \frac{-1}{1+\tan^2 x} + \frac{2}{1+\cot^2 x} = \cos 2x - \cos^2 x + 2\sin^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos 2x} - \cos^2 x + 2\sin^2 x = \sin^2 x$$

مثال 7: برای اینکه رابطه $\frac{\cos a}{\sqrt{1+\tan^2 a}} + \frac{\sin a}{\sqrt{1+\cot^2 a}} = \cos 2a$ برقرار شود، انتهای کمان a باید در کدام ربع باشد؟

پاسخ: (1) ربع اول (2) ربع دوم (3) ربع سوم (4) ربع چهارم

$$\frac{\cos a}{\sqrt{1+\tan^2 a}} + \frac{\sin a}{\sqrt{1+\cot^2 a}} = \frac{\cos a}{1} + \frac{\sin a}{1} = \cos 2a$$

مفراج کسرها و می‌تایم بالا (دور در دور، نزدیک در نزدیک)

$\Rightarrow |\cos a| \cos a + |\sin a| \sin a = \cos 2a$

فب رابطه ی بالا رو با رابطه ی $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$ یا همون رابطه ی $\cos a \times \cos a - \sin a \times \sin a = \cos 2a$ مقایسه کن چه نتیجه ای می گیری؟

آخرین از داخل اولین قدر مطلق $\cos a$ باید خودش بیاد بیرون یعنی باید مثبت بیاد بیرون و از داخل دومین قدر مطلق $\sin a$ باید قرینه بیاد بیرون که منفی وسط اتفاد ایباد شه! پس باید $\sin a$ منفی باشه

فب ته داستان باید بگی در کدوم ناحیه \cos مثبت و \sin منفی هست؟ (🙄) بله دیگه ربع چهارم

دو چیز هیچ وقت از یاد آدمانمیره

-دوست های خوب -روزهای خوب

یه چیز هم هیچ وقت از دل آدم نمیره روزهای خوبی که با دوست های خوب گذشت



مثال 8: اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $8\cos a \cdot \cos b \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - a) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - b)$ کدام است؟

- (1) $\sin 4a$ (2) $\cos 4a$ (3) $\sin^2 2a$ (4) $\cos^2 2a$

پاسخ:

$$8\cos a \cdot \cos b \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - a) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - b) = 8\cos a \cdot \cos b \cdot \sin a \cdot \sin b = 8 \boxed{\sin a \cdot \cos a} \boxed{\sin b \cdot \cos b}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$\frac{1}{2} \sin 2a \qquad \qquad \qquad \frac{1}{2} \sin 2b$$

$$8 \times \frac{1}{2} \sin 2a \times \frac{1}{2} \sin 2b = 2 \sin 2a \cdot \sin 2b$$

از اینجا به بعد با توجه به گزینه ها که بر حسب زاویه a آمده است باید با توجه به رابطه $a + b = \frac{\pi}{4}$ ، b رو بر حسب a بنویسیم و جایگزاری کنیم

$$2 \sin 2a \cdot \sin 2b \xrightarrow{b = \frac{\pi}{4} - a} 2 \sin 2a \cdot \sin 2(\frac{\pi}{4} - a) = 2 \sin 2a \cdot \boxed{\sin(\frac{\pi}{2} - 2a)} = 2 \sin 2a \cdot \boxed{\cos 2a} = \sin 4a$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$\cos 2a \qquad \qquad \qquad \frac{1}{2} \sin 4a$$

مثال 9: اگر $\sin 2x = \frac{3}{5}$ و $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\cos x \cdot \cos 3x \cdot (\tan x + \tan 3x)$ کدام است؟

- (1) $\frac{12}{25}$ (2) $-\frac{12}{25}$ (3) $\frac{24}{25}$ (4) $-\frac{24}{25}$

پاسخ: اول بیا عبارت $\cos x \cdot \cos 3x \cdot (\tan x + \tan 3x)$ رو ساده تر کنیم تا فواسته ی مسئله واضح تر بشه

$$\cos x \cdot \cos 3x \cdot (\tan x + \tan 3x) = \cos x \cdot \cos 3x \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \right) = \cos x \cdot \cos 3x \left(\frac{\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x}{\cos x \cdot \cos 3x} \right)$$

$$\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x = \sin(x + 3x) = \sin 4x$$

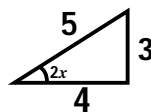
فب پس فهمیدیم منظور سؤال از حاصل $\cos x \cdot \cos 3x \cdot (\tan x + \tan 3x)$ همون $\sin 4x$ بوده، یعنی به زیور ساده، طرح مقرر

$$\sin 2x = \frac{3}{5} \text{ رو داده و از ما } \sin 4x \text{ رو فواسته}$$

فب حالا باید برای حل سؤال از فودمون بیپرسیم $\sin 4x$ چه فرمولی داره؟؟

پس برای جواب نهایی فقط کافی از روی $\sin 2x = \frac{3}{5}$ بتونیم $\cos 2x$ رو حساب کنیم که اون هم با استفاده از مثلث فیثاغورث 2 ثانیه طول میکشه

$$\sin 2x = \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{میاور و تر}} \cos 2x = \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{در ربع اول کسینوس مثبت است}} \cos 2x = +\frac{4}{5}$$


 $0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 2x < \frac{\pi}{2}$

حالا که فهمیدیم $\sin 2x = \frac{3}{5}$ و $\cos 2x = +\frac{4}{5}$ است با استفاده از رابطه $\sin 4x = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x$ ، مقدار $\sin 4x$ رو حساب

می کنیم

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

زندگی اتقدر ابدی نیست که هر روز بتوان مهربان بودن را به فردا انداخت



مثال 10: اگر $\frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x - 3\cos x} = 2$ باشد، آنگاه $\tan 2x$ کدام است؟

- (1) $-\frac{16}{63}$ (2) $\frac{16}{63}$ (3) 16 (4) $\frac{1}{16}$

پاسخ: اول باید $\tan x$ بدست بیاد دیگه

$$\frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x - 3\cos x} = 2 \xrightarrow{\div \cos x} \frac{\tan x + 2}{\tan x - 3} = 2 \rightarrow \tan x + 2 = 2\tan x - 6 \Rightarrow \boxed{\tan x = 8}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \times 8}{1 - 64} = -\frac{16}{63}$$

مثال 11: اگر $\sin \beta = \frac{4}{5}$ و $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ و β منفرجه و α حاده باشد، مقدار $\cos(2\alpha + \beta)$ کدام است؟

- (1) $\frac{4}{5}$ (2) $-\frac{3}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $-\frac{4}{5}$

پاسخ: اول بیا اتفاد $\cos(2\alpha + \beta) = \cos 2\alpha \times \cos \beta - \sin 2\alpha \times \sin \beta$ رو بنویسیم

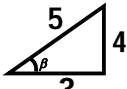
این اتفاد برای بدست اومدن به چهار چیز نیاز داره!! که دونه دونه اونارو بدست می آریم

اول $\cos 2\alpha$ رو بدست بیاریم. فُتَب چه طوری؟؟ معلوم دیگه از داده ی $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. فُتَب از چه فرمولی؟ معلوم دیگه فوایشاً فودرت بگو.. آخرین

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = \frac{18}{25} - 1 = -\frac{7}{25} \rightarrow \boxed{\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}}$$

دومین چیزی که میفوییم $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$. پس بریم سراغ مناسبه

دومین چیزی که میفوییم $\cos \beta$ هست که از روی $\sin \beta = \frac{4}{5}$ باید بدست بیاد دیگه.. از کباشم که معلوم دیگه از مثلث قیثاغورث



$$\sin \beta = \frac{4}{5} \rightarrow \cos \beta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{3}{5} \xrightarrow{\beta \text{ منفرجه است}} \boxed{\cos \beta = -\frac{3}{5}}$$

سومین چیزی که میفوییم $\sin 2\alpha$ است که باید از روی $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ باید بدست بیاد از کباشم که معلوم بفرا!!

از روی فرمول $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \sin 2\alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \rightarrow \boxed{\sin 2\alpha = \frac{24}{25}}$$

چهارمین چیزی ام که میفوییم $\sin \beta$ که فود مسئله دیگه اینو داده!!

حالا بریم برای جایگزاری در رابطه ی $\cos(2\alpha + \beta) = \cos 2\alpha \times \cos \beta - \sin 2\alpha \times \sin \beta$

$$\cos(2\alpha + \beta) = \boxed{\cos 2\alpha} \times \boxed{\cos \beta} - \boxed{\sin 2\alpha} \times \boxed{\sin \beta} = \frac{21}{125} - \frac{96}{125} = \frac{-75}{125} = -\frac{3}{5}$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 $-\frac{7}{25}$ $-\frac{3}{5}$ $\frac{24}{25}$ $\frac{4}{5}$



مثال 12: جوابهای کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است. مجموعه مقادیر i

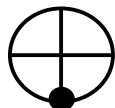
کدام است؟

- (1) {7, 9} (2) {1, 4, 7} (3) {1, 3, 5} (4) {1, 5, 9}

پاسخ:

$$\cos 2x = \sin x \xrightarrow{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x} 1 - 2\sin^2 x = \sin x \rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{9\pi}{6} \Rightarrow i = 9 \\ \sin x = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow i = 1 \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow i = 5 \end{cases} \end{array} \right\}$$



$a + c = b$

در معادله ی درجه ی دوم
برست آمده جمع ضریب
اولی و آخری برابر وسطی
است

$$\sin x = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6}$$

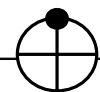
$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow i = 1$$

$$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow i = 5$$

مثال 13: جوابهای کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x + 3\sin x = 2$ را بدست آورید

پاسخ:

$$\underbrace{\cos 2x}_{1 - 2\sin^2 x} + 3\sin x = 2 \rightarrow -2\sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \left\{ \begin{array}{l} \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{array} \right.$$



مثال 14: جواب کامل معادله $\sin^2(x + \frac{\pi}{8}) + 2\cos(x + \frac{5\pi}{8}) = 3$ کدام است؟

- (1) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{8}$ (2) $x = 2k\pi - \frac{\pi}{8}$ (3) $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{8}$ (4) $x = 2k\pi - \frac{5\pi}{8}$

پاسخ: در عبارت داده شده هم سینوس داریم هم کسینوس. پس برای قسمت کسینوسی کمان رو از $\frac{\pi}{2}$ کم می کنیم و همزمان اون رو به صورت سینوس می نویسیم

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha \rightarrow \sin^2(x + \frac{\pi}{8}) + 2\sin(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{5\pi}{8})) = 3 \rightarrow \sin^2(x + \frac{\pi}{8}) + 2\sin(\frac{\pi}{2} - x - \frac{5\pi}{8}) = 3$$

$$\sin^2(x + \frac{\pi}{8}) - 2\sin(x + \frac{\pi}{8}) - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \left\{ \begin{array}{l} \sin(x + \frac{\pi}{8}) = -1 \rightarrow x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{5\pi}{8} \\ \sin(x + \frac{\pi}{8}) = \frac{-c}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3 \text{ نشدنی} \end{array} \right.$$

خوشبختی پروانه ای هست که اگر او را دنبال کنید از شما میگریزد ولی اگر آرام بنشینید روی سر شما خواهد نشست.



مثال 15 : مجموع جواب های معادله $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟
(سراسری ریاضی خارج 95)

(1) $\frac{3\pi}{4}$ (2) $\frac{5\pi}{4}$ (3) $\frac{3\pi}{2}$ (4) $\frac{7\pi}{4}$

پاسخ: در عبارت داده شده هم سینوس داریم هم کسینوس. پس برای قسمت کسینوسی کمان رو از $\frac{\pi}{2}$ کم می کنیم و همزمان اون رو به صورت سینوس می نویسیم

$$\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1 \xrightarrow{\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} \sin(x + \frac{\pi}{8}) + \sin(\frac{\pi}{2} - (x - \frac{3\pi}{8})) = 1$$

$$\frac{\pi}{2} - x + \frac{3\pi}{8} = \frac{7\pi}{8} - x$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \sin(\frac{7\pi}{8} - x) = 1$$

در ادامه برای این که دو تا کمان یکی بشن کافی $\frac{7\pi}{8}$ رو $\frac{\pi}{8}$ بدویم تا از ساده کردن کمان بتونیم دو تا کمان رو یکی ببینیم

$$\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \sin(\frac{7\pi}{8} - x) = 1 \rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{8}) + \sin(\pi - \frac{\pi}{8} - x) = 1 \rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{8}) + \sin(\pi - (\frac{\pi}{8} + x)) = 1$$

$$\sin(\pi - (\frac{\pi}{8} + x)) = \sin(\frac{\pi}{8} + x)$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \sin(\frac{\pi}{8} + x) = 1 \rightarrow 2\sin(\frac{\pi}{8} + x) = 1 \xrightarrow{\div 2} \sin(\frac{\pi}{8} + x) = \frac{1}{2} \rightarrow \sin(\frac{\pi}{8} + x) = \sin(\frac{\pi}{6})$$

$$\sin(\frac{\pi}{8} + x) = \sin(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} (\frac{\pi}{8} + x) = 2k\pi + \alpha \\ (\frac{\pi}{8} + x) = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (\frac{\pi}{8} + x) = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ (\frac{\pi}{8} + x) = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \\ x = 2k\pi + (\frac{5\pi}{6}) - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

ریشه ی مورد قبول از معادله ی اول با قرار دادن $k = 0$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ برابر $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}$ است

و ریشه ی مورد قبول از معادله ی دوم با قرار دادن $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ برابر $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{8}$ فوادر بود

که مجموع این ها برابر است

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{8} = \frac{6\pi}{6} - \frac{2\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

روزگاری حاکمی اعلام کرد به هنرمندی که بتواند آرامش را در یک تابلو نقاشی بیاورد، جایزه ای نفیس خواهد داد. بسیاری از هنرمندان سعی کردند و حاکم همه تابلو های نقاشی را نگاه کرد و از میان آنها دو تابلو پسندید و تصمیم گرفت یکی از آنها را انتخاب کند.

اولی نقاشی یک دریاچه آرام بود؛ دریاچه مانند آینه ای تصویر کوههای اطرافش را نمایان میساخته، بالای دریاچه آسمانی آبی با ابرهای زیبا و سفید بود، هر کس این نقاشی را میدید حتما آرامش را در آن می یافت. در دومی کوههایی بودناهموار و پر صخره؛ آسمان پر از ابرهای تیره، باران میبارید و رعد و برق میزد، از کنار کوه آبشاری به پایین میریخت، در این نقاشی اصلا آرامش دیده نمیشد.

اما حاکم با دقت نگاه کرد و پشت آبشار بوته ای کوچک دید که در شکاف سنگی روییده بود. در آن بوته پرندۀ ای لانه کرده بود و در کنار آن آبشار خروشان و عصبانی، پرندۀ ای در لانه ای با آرامش نشسته بود. حاکم نقاشی دوم را انتخاب کرد و گفت: "آرامش به معنای آن نیست که صدایی نباشد، مشکلی وجود نداشته باشد، یا کار سختی پیش رونباشد، آرامش یعنی در میان صدها مشکل و کار سخت، دلی آرام وجود داشته باشد...."



مثال 16: اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل $\cos 4x$ کدام است؟ (قلم چی 94)

پاسخ: (1) $\frac{625}{527}$ (2) $-\frac{625}{527}$ (3) $-\frac{527}{625}$ (4) $\frac{527}{625}$

مثال همیشه هر وقت تفاضل و یا مجموع سینوس و کسینوس رو دیدی فقط کافی با به توان دو رسوندن دو طرف به $\sin 2x$ برسیم. چون
که تماماً یادت هست $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ بود ریگه !!

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{توان دو}} (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{25} \rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - \underbrace{2\sin x \cdot \cos x}_{\sin 2x} = \frac{1}{25}$$

$$1 - \sin 2x = \frac{1}{25} \rightarrow -\sin 2x = \frac{1}{25} - 1 \rightarrow \sin 2x = \frac{24}{25}$$

در آخر از رابطه ی $\cos \bigcirc = 1 - 2\sin^2 \bigcirc$ میتوینم به راحتی $\cos 4x$ رو بدست بیاریم

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x \xrightarrow{\sin 2x = \frac{24}{25}} \cos 4x = 1 - 2\left(\frac{24}{25}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{576}{625}\right) = 1 - \left(\frac{1152}{625}\right) = -\frac{527}{625}$$

مثال 17: نقطه ی $A(0, 1)$ روی دایره ی مثلثاتی به اندازه ی $\frac{13\pi}{4}$ رادیان در خلاف جهت عقربه های ساعت دوران می کند تا

به نقطه ی A' برسد. مجموع طول و عرض نقطه ی A' کدام است؟ (قلم چی 94)

پاسخ: (1) $-\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) -1 (4) $\sqrt{3}$

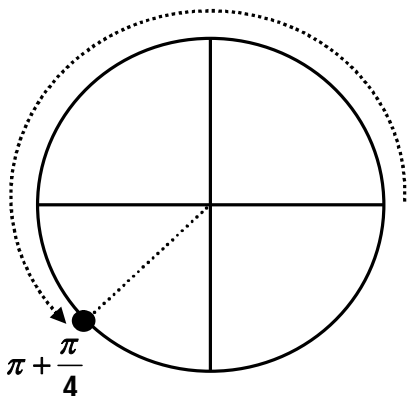
$$\frac{13\pi}{4} = \frac{12\pi + \pi}{4} = 3\pi + \frac{\pi}{4} \text{ یعنی } \frac{13\pi}{4} \text{ هواسه باشه دوران}$$

در ضمن در خلاف جهت عقربه های ساعت یعنی در جهت مثبت دایره ی مثلثاتی

پس طبق شکل باید سینوس و کسینوس زاویه ی $\frac{\pi}{4}$ رو در ربع سوم که

هر دوی این ها منفی هستن رو حساب کنیم

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$



بحث در مورد بُرد توابع مثلثاتی:

توضیح این که وقتی حدود (بُرد) مجموع یا تفاضل سینوس و کسینوس مورد سوال باشه کافی به این نکته توجه کنی

که مینیمم این مجموع برابر جذر، مجموع توان دوم های ضرایب سینوس و کسینوس است

مثلاً برای $\sin x + \cos x$ ضرایب سینوس و کسینوس عدد 1 است پس می تونیم بگیم

$$-\sqrt{1^2 + 1^2} \leq \sin x \pm \cos x \leq \sqrt{1^2 + 1^2} \rightarrow -\sqrt{2} \leq \sin x \pm \cos x \leq \sqrt{2}$$

و در حالت کلی تر عبارت زیر رو حفظ کن

$$-\sqrt{a^2 + b^2} + c \leq a\sin x + b\cos x + c \leq \sqrt{a^2 + b^2} + c$$

مثال 18: بیشترین مقدار تابع $3\sin x + 4\cos x - 5$ کدام است؟

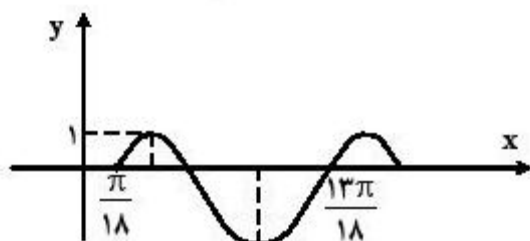
پاسخ: (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) -5

پاسخ:

$$-\sqrt{3^2 + 4^2} - 5 \leq 3\sin x + 4\cos x - 5 \leq \sqrt{3^2 + 4^2} - 5 \rightarrow -\sqrt{25} - 5 \leq 3\sin x + 4\cos x - 5 \leq \sqrt{25} - 5$$



۱۰۴- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ است. کدام $a + b$ است؟



ریاضد

$\frac{1}{2}$ (۱)

۱ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۲ (۴)

ی داخل ۹۵

سؤال ۱۰۴ خارج ریاضی رو هم بیار

