

# دنباله فور

دنباله های حسابی و هندسی

نویسنده:

حسین ایزن



# دنباله فور

(دنباله های حسابی و هندسی)

حسین ایزن

ویرایش اول: بهمن ۹۵

## فهرست

صفحه	عنوان
۱	بخش اول: دنباله های حسابی
۴۲	بخش دوم: دنباله های هندسی
به زودی	بخش سوم: موشکافی تست های کنکور سراسری (۹۵-۹۰)
به زودی	بخش چهارم: مسائل خفن

## مقدمه

به لطف خدا کار تایپ و صفحه بندی کتاب سوم من هم به اتمام رسید در این کتاب که اسمش رو **دنباله فور** گذاشتم به بحث در مورد دنباله های حسابی و هندسی پرداخته می شود مطالب این کتاب برای بچه های دبیرستانی و کسانی که قصد شرکت در کنگور سراسری رو دارن نوشته شده. طبق روال دو کتاب قبلیم این کتاب هم به زبان ساده و آمیخته به طنز نوشته شده و مطالب به صورتی بیان شده که دانش آموزان با پایه ضعیف و متوسط و کسانی که به معلم دسترسی ندارن بتونن از کتاب استفاده کنن. مطالب این کتاب شامل چهار بخش هست. در بخش اول دنباله حسابی به همراه مسائل و تستهای متنوع مطرح شده است و بخش دوم به دنباله هندسی اختصاص داده. دو بخش دیگر کتاب یعنی موشکافی کنگورهای سراسری چند سال اخیر (در این قسمت با دید جدید و جالبی سوالات کنگور بررسی شده) و همچنین مسائل ففن (دشوار) از دنباله ها رو نوشتنم و در صورتی که فیدبک خوبی از ویرایش اول کتاب بگیرم متما در ویرایش بعدی اونها رو هم اضافه می کنم (راستش تایپشون خیلی در دسر داره). مثل همیشه سعی کردم که حاصل کار کتابی کم اشتباه و با ظاهری با کیفیت از آب در بیاد امیدوارم این تلاش مورد قبول دانش آموزان سرزمینم و دبیران عزیز قرار بگیره. مشتاقانه پذیرای نظرات ارزشمند همه عزیزان هستم.

در آفر لازمه تشکر ویژه ای داشته باشم از مدیران مقرر سایت های **پی سی دانلود** ، **کنکور** (<http://konkur.in>)، **پارس بوک** ([www.parsbook.org](http://www.parsbook.org))، **کتابناک** (<http://ketabnak.com>) و ... که زحمت انتشار کتابهای قبلی من رو بر عهده گرفتن. و اما روشهای ارتباط:

وبلاگ انتگرال فور: [integralkhor.blogfa.com](http://integralkhor.blogfa.com)

کانال تلگرام انتگرال فور [@integralkhor](https://t.me/integralkhor)

ایمیل انتگرال فور: [integralkhor@gmail.com](mailto:integralkhor@gmail.com)

SMS: 0938 572 5274

حسین ایزن

۷ بهمن ۱۳۹۵

پون دوستان زيادی از من در مورد کتابها سوال می کنند فرمتمون بگم که فعلا این دو کتاب از من چاپ شده که در زیر عکسشون رو ملاحظه می کنید و برای تهیه این کتابها کافیه به کتابفروشی های معتبر شهر خودتون مراجعه کنید !! پون هر دو شون به صورت رایگان در اینترنت در دسترس همه هستن. (بگذریم که عده ای این کتابها رو به اسم خود شون به ملت می خروشن!!)

	<p>اولین کتابم انتگرال فور (جلد اول) هستش که حدود پنج سال پیش منتشر شده و در مورد انتگرال نامعین هست و بیشتر به کار دانش پوها میفوره البته دانش آموزای زرنگ و علاقمند هم چیزهای جالبی توی این کتاب پیدا می کنند. این کتاب علاوه بر ایران در افغانستان هم طرفدارای زیادی داره!</p>
	<p>روشنای عدم موفقیت در کنکور اسم دومین کتاب من هست که چند ماهیه منتشر شده و البته به معروفیت انتگرال فور نیست. این کتاب در اصل برای دانش آموزای دبیرستانی که قصد شرکت در کنکور سراسری رو دارن نوشته شده و حاصل تجربیات من در زمینه کنکور هست. این کتاب به زبان طنز نوشته شده و میتونه واسه دانش پوهایی که میخوان کنکور ارشد بدن و کلا واسه کسانی که دنبال شیوه های مناسب مطالعه هستن مفید باشه.</p>

## دنباله حسابی

فب بریم سراغ اولین مبثمون یعنی دنباله ها:

اصولا به چند تا عدد که پشت سر هم قرار گرفتند می گیم دنباله مثلا

$$2, 5, 12, 17, \dots$$

دقت کنید که بین عددها هیچ علامتی نیست! به هر کدام از این عددها می گیم جمله دنباله

بنابراین ۲ همیشه جمله اول، ۵ همیشه جمله دوم، ۱۲ همیشه جمله سوم و...

معمولا جملات یه دنباله رو با حروف اندیس دار نشون میدیم مثلا  $a_1$  همیشه جمله اول،  $a_2$  همیشه جمله دوم و...  
بنابراین در دنباله بالا داریم:

$$a_1 = 2 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = 12 \quad a_4 = 17, \dots$$

اکثر اوقات جملات یه دنباله از نظم خاصی پیروی می کنند مثلا دنباله زیر رو در نظر بگیرین:

$$2, 4, 8, 16, \dots$$

فب بگو بینم ارتباط بین جملات بالا چیه؟

آقا اجازه: جملات دنباله بالا توانهای ۲ هستند یعنی جمله اول همیشه  $2^1$  جمله دوم همیشه  $2^2$  جمله سوم  $2^3$  ...



استاد: اصنت معمولا به جای نوشتن همه جملات فرمولی که این جملات از روی اون ساخته شده رو می نویسیم و

بوش می گیم جمله عمومی و اون رو با  $a_n$  نشون می دیم. (چیرا مد شده جمله عمومی رو با هم  $t_n$  نشون میرن!)  
که البته هیچ فرقی نمی کنه

واضه که در اینجا جمله عمومی میشه:  $a_n = 2^n$

با داشتن جمله عمومی می توانیم تمام جملات دنباله رو بنویسیم کافیه  $n=1$  قرار بدیم تا جمله اول بدست بیاد و  $n=2$  قرار بدیم تا جمله دوم و...

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 2^1 = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^2 = 4$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 2^3 = 8$$

خواستون باشه که  $n$  یعنی اندیس جملات باید هتما اعداد طبیعی باشه بنابراین  $a_{3/2}$  و  $a_0$  و ... قابل قبول نیستند.

حالا بریم چندتا سوال آسون با هم حل کنیم (سفتاش رو می دم خودتون حل کنین!)

مثال: اگر  $a_n = 3n - 2$  جمله عمومی یک دنباله باشه چند جمله اول دنباله را نوشته و بگویند چه ارتباطی بین جملات وجود دارد؟

آقا اجازه: به جای  $n$  عدد  $1$  رو قرار می دیم تا جمله اول بدست بیاد عدد  $2$  رو قرار می دیم تا جمله دوم بدست بیاد...



جمله اول  $n=1 \rightarrow a_1 = 3(1) - 2 = 1$

جمله دوم  $n=2 \rightarrow a_2 = 3(2) - 2 = 4$

جمله سوم  $n=3 \rightarrow a_3 = 3(3) - 2 = 7$

پس دنباله مورد نظر اینطوری میشه

**1, 4, 7, 10, ...**

استاد: فب فوبه حالا بگو ارتباط بین جملات چیه؟



آقا اجازه : به هر جمله ۳ تا اضافه میشه تا جمله بعدی درست بیاد

استاد : اعسنت به این نوع دنباله میگن دنباله حسابی یا عددی به همین راحتی!

بنابراین :

در دنباله حسابی هر جمله (به جز جمله اول یعنی  $a_1$ ) از اضافه کردن یک مقدار ثابت به جمله قبلی درست میاد به این مقدار میگیم قدر نسبت که اون رو با  $d$  نشون می دیم.

البته دقت کنید که جمله اول دنباله و قدر نسبت باید مشخص باشن تا ما بتونیم تمام جملات دنباله رو بنویسیم.

مثال ۲: چند جمله از دنباله های عددی با جمله اول و قدر نسبت داده شده را بنویسید.

(الف)  $a_1 = 5$  و  $d=3$

خب این که خیلی آسونه! جمله اول میشه ۵ و به جملات بعدی سه تا سه تا اضافه میشه (قدر نسبت برابر سه هست) یعنی:

**5, 8, 11, 14, ...**

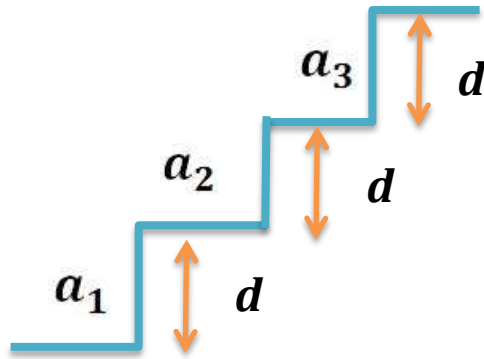
(ب)  $a_1 = 1$  و  $d = \frac{1}{2}$

این هم مثل بالایی هستش

**1,  $\frac{3}{2}$ , 2,  $\frac{5}{2}$**

تذکر مهم: در واقع دنباله حسابی رو میتونیم مثل یه پله در نظر بگیریم که روی هر پله یک جمله از دنباله قرار میگیره واضحه که فاصله بین دو پله همیشه همون قدر نسبت  $d$ .





مثال ۳: در دنباله عددی  $2, 7, 12, 17, \dots$  مقادیر  $a_3$  و  $d$  و  $a_{100}$  را بیابید.

جواب:  $a_1$  که همیشه همون جمله اول یعنی 2

$d$  یعنی قدر نسبت هم همیشه 5

اما برای  $a_{100}$  قاعدتا انتظار ندارین که ۱۰۰ جمله دنباله رو بنویسیم! اما نگران نباشین یه کاریش می‌کنیم...

بیاید یه نگاه دیگه به جملات دنباله بالا بندازیم:

جمله اول = 2

$7 = 2 + 5 \rightarrow$  جمله اول + جمله دوم =  $2 + d$

$12 = 2 + 10 = 2 + 2 * 5 \rightarrow$  جمله اول + جمله سوم =  $2 + 2d$

$17 = 2 + 15 = 2 + 3 * 5 \rightarrow$  جمله اول + جمله چهارم =  $2 + 3d$

بنابراین می‌تونیم بگوییم که:

$$99d + \text{جمله اول} = \text{جمله صدم}$$

با توجه به پله‌ها هم این موضوع واضح هست!

$$a_{100} = a_1 + 99d \rightarrow a_{100} = 2 + 99(5) = 497$$

با توجه به این مثال حالت کلی یک دنباله حسابی رو می‌تونیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\underbrace{a_1}_{a_1}, \quad \underbrace{a_1 + d}_{a_2}, \quad \underbrace{a_1 + 2d}_{a_3}, \quad \underbrace{a_1 + 3d}_{a_4} \dots, \quad \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n}$$

بنابراین جمله  $n$  ام (همون جمله عمومی) یک دنباله حسابی در حالت کلی از رابطه زیر بدست می آید:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

فب دیکه قضیه فیلی آسون شد پس آکه مثلا به ما گفتن  $a_{150}$  سریع مینویسیم  $a_{150} = a_1 + 149d$

یا  $a_{231}$  همیشه  $a_{231} = a_1 + 230d$

به بیان خودمونی

$$\text{قدر نسبت} (n - 1) + \text{جمله اول} = \text{جمله } n \text{ ام تصاعد حسابی}$$

بازم تاکید می کنم که:

برای نوشتن جمله عمومی دنباله حسابی به جمله اول و قدر نسبت نیاز داریم.

مثال ۴: در دنباله حسابی زیر جمله عمومی و جملات هفتم و سیزدهم را بنویسید.

$$3, 7, 11, 15, \dots$$

فب! موارد مورد نیاز برای نوشتن جمله عمومی عبارتند از:

(۱) جمله اول  $a_1$  (۲) قدر نسبت  $d$

$$a_1 = 3, d = 4$$

بنابراین جمله عمومی همیشه:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow a_n = 3 + (n - 1)(4) \rightarrow a_n = 4n - 1$$

آقا اجازه: پس  $n$  چند میشه؟



استاد: باز تو شوت بازی در آوردی!

توی جمله عمومی (یا همون جمله  $n$  ام) پارامتر  $n$  همینطور می موند اما اگر به شما شماره جمله رو دادن مثلاً گفتن جمله پنجم اونوقت در جمله عمومی به جای  $n$  عدد ۵ رو قرار می دی.

حالا می ریم سراغ جملات هفتم و سیزدهم:

$$a_7 = 4(7) - 1 = 27$$

$$a_{13} = 4(13) - 1 = 51$$

البته توجه داشته باشید که بدون نوشتن جمله عمومی هم می تونیم  $a_7$  و  $a_{13}$  رو بنویسیم:

$$a_7 = a_1 + 6d = 27$$

$$a_{13} = a_1 + 12d = 51$$

مثال ۵: اگر  $a_1$  و  $d$  به ترتیب جمله اول و قدر نسبت یک دنباله حسابی باشند عبارت های زیر را بر حسب  $a_1$  و  $d$  بنویسید.

الف)  $a_4 + a_5$

ب)  $2a_5 - a_9 + a_{11}$

ج)  $a_{10} - a_3$

د)  $a_{25} - a_{12}$

فب این یه مسئله ساده پارامتری هست. برای حل این مسئله کافیست توجه داشته باشیم که فرمول جمله عمومی تصاعد حسابی به صورت زیر است :

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

بنا براین:

$$\text{الف) } a_4 + a_5 = (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 7d$$

$$\text{ب) } 2a_5 - a_9 + a_{11} = 2(a_1 + 4d) - (a_1 + 8d) + (a_1 + 10d)$$

$$= 2a_1 + 8d - a_1 - 8d + a_1 + 10d = 2a_1 + 10d$$

$$\text{ج) } a_{10} - a_3 = (a_1 + 9d) - (a_1 + 2d) = a_1 + 9d - a_1 - 2d = 7d$$

$$\text{د) } a_{25} - a_{12} = (a_1 + 24d) - (a_1 + 11d) = a_1 + 24d - a_1 - 11d = 24d - 11d = 13d$$

حالا یه بار دیکه به جواب قسمت (ج) و (د) نگاه کنید.

$$ج) a_{10} - a_3 = 7d$$

$$د) a_{25} - a_{12} = 13d$$

به نظرتون چه ارتباطی اینها وجود داره؟

آقا اجازه: می تونیم اینطوری بنویسیم:



$$a_{10} - a_3 = (10 - 3)d = 7d$$

$$a_{25} - a_{12} = (25 - 12)d = 13d$$

استاد: اصننت دارم بعوت امیدوار می شم! البته یه جور دیگه هم میشه به مسئله نگاه کرد:

در واقع وقتی میگیریم  $a_{10} - a_3$  یعنی: (جمله سوم - جمله دهم)

ملا اگر مثل قبل دنباله مسابی رو شبیه یه پله در نظر بگیریم جمله دهم روی پله دهم قرار میگیره و جمله سوم روی پله سوم پس:  $a_{10} - a_3$  یعنی افتلاف بین پله دهم و پله سوم که میشه ۷ پله

به طور کلی می تونیم بگیم:

$$a_m - a_n = (m - n)d$$

بنابراین همیشه یادتون باشه که با داشتن ۲ جمله می تونیم قدرنسبت رو در بیاریم

یه حالت خاص ولی مهم زمانی هست که دو جمله متوالی رو از هم کم کنیم: مثلا

$$a_7 - a_6 = (7 - 6)d = d$$

$$a_{12} - a_{11} = (12 - 11)d = d$$

همانطور که میبینید اختلاف دو جمله متوالی دنباله حسابی همیشه قدر نسبت اون دنباله (البته آکه به پله ها هم نگاه کنید این مطلب واضمه).

**توجه:** دقت داشته باشد این تمرین که با هم حل کردیم در عین سادگی خیلی مهم و کاربردی و در زمان حل تست ها زیار به کارمون میار بنابراین به منظور افزایش سرعت سعی کنید حتی الامکان این عبارات رو به صورت ذهنی بنویسید و اسه تمرین بیشتر چند عبارت زیر رو ذهنی حل کنید.

تمرین ۱: عبارات های زیر را بر حسب  $a_1$  و  $d$  بنویسید. (ذهنی)

- A)  $a_{10} - a_9$   
 B)  $a_9 - a_2$   
 C)  $a_7 + a_3$   
 D)  $a_1 + a_6 + a_9$   
 E)  $a_{10} - a_2 + a_5$   
 F)  $2a_6 - a_3$

جواب تمرین ۱:

A)  $d$  , B)  $7d$  , C)  $2a_1 + 8d$  , D)  $3a_1 + 13d$  , E)  $a_1 + 12d$  , F)  $a_1 + 8d$

تمرین ۲: اگر  $a_n$  جمله  $n$  ام یک دنباله حسابی باشد  $a_{20} - a_5$  برابر است با:

- 1)  $a_{25} - a_{10}$       2)  $a_{30} - a_{10}$       3)  $a_{35} - a_{10}$       4)  $a_{40} - a_{10}$

جواب تمرین ۲: گزینه یک

## چند نکته در مورد جمله عمومی تصاعد عددی

همونطور که دیدید جمله عمومی یک تصاعد حسابی به صورت زیر هست :

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

نکته اول اینکته: جمله عمومی نسبت به  $n$  از درجه اول هست یعنی اگر شما به جای  $a_1$  و  $d$  عدد بزارید به یک چند

جمله ای درجه اول نسبت به  $n$  می رسید مثلاً:

$$a_1 = 2, d = 5 \rightarrow a_n = 2 + (n - 1)(5) = 5n - 3$$

نتیجه گیری مهم اینکته عباراتی به صورت زیر نمیتونن جمله عمومی به دنباله حسابی باشند :

$$a_n = n^2 - 2n + 1 \quad , \quad a_n = \frac{2+n}{n^2} \quad , \quad a_n = \sin(3n - 5)$$

نکته دوم اینکته: ضریب  $n$  توی جمله عمومی همیشه قدر نسبت تصاعد حسابی

مثلاً:

$$a_n = 3n - 7 \rightarrow d = 3$$

$$a_n = 5 - n \rightarrow d = -1$$

$$a_n = \frac{3n - 9}{2} \rightarrow a_n = \frac{3n}{2} - \frac{9}{2} \rightarrow d = \frac{3}{2}$$

نکته سوم اینکته: برای بدست آوردن جمله اول از جمله عمومی کافیست  $n=1$  قرار بدیم (البته این مطلب واضحه ولی...)

مثلاً :

$$a_n = 7 - 2n \rightarrow n = 1 \rightarrow a_1 = 7 - 2(1) = 5$$

$$a_n = \frac{3n - 9}{2} \rightarrow n = 1 \rightarrow a_1 = \frac{3(1) - 9}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

مثال ۶: در دنباله حسابی با جمله عمومی  $a_n = \frac{5+3n}{2}$  جمله هفتم چه قدر از جمله سوم بیشتر است؟

۲(۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۱۰ (۱)

خب اول ببینیم مسئله اصلا چی میفواد .

جمله هفتم چه قدر از جمله سوم بیشتر است یعنی  $a_7 - a_3 = ?$

از طرفی یادمون هست که  $a_7 - a_3 = (7 - 3)d = 4d$  بنابراین کافیه  $d$  رو داشته باشیم یعنی مسئله قدر

نسبت رو می فواد (خب از همون اول مته بپه آدم میگفت  $d$  رو میفوام!) حالا میریم سراغ یافتن  $d$

آقا اجازه: نلتش چی بود؟



استاد: ضریب  $n$  میشه  $d$

آقا اجازه: یادمون اومد پس داریم:



$$d = \frac{3}{2} \rightarrow a_7 - a_3 = 4 \left( \frac{3}{2} \right) = 6$$

استاد: حالا سر جلسه امتحان یا کنکور که من نیستم می فوای چکار کنی؟ آکه یه نکته ای یادت رفخت چی؟

آقا اجازه: راستش نمیدونم تا حالا بوش فکر نکردم!



استاد: ببین پسر فوب! وقتی من میگم نکته منظورم این نیست که سریع بری ففطش کنی بلکه میفوام توجه تو رو به اون قسمت از درس جلب کنم و اهمیت اون مطلب رو نشون بدم بنابراین وقتی توی یه کتاب یا جزوه نکته ای میبینی باید سعی کنی فوب بفهمیش نه اینکه فقط ففطش کنی. علاوه بر این همیشه باید این احتمال رو بری



که سر جلسه امتحان ممکنه یه نکته ای فراموشت بشه پس باید بلد باشی که بدون اون نکته هم کارت رو راه بندازی مثلا فرض کن یادت رفت که ضریب  $n$  میشه قدر نسبت اونوقت کافیه یه بار  $n=1$  قرار بدی تا  $a_1$  در بیاد و یه بار  $n=2$  قرار بدی تا  $a_2$  در بیاد اونوقت  $a_2 - a_1$  میشه قدر نسبت. (توی کتاب "روشهای عدد موفقییت در کنکور" رابع به این موضوع مفصل صحبت کردم).

$$a_n = \frac{5 + 3n}{2} \rightarrow a_1 = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

$$a_2 = \frac{5 + 6}{2} = \frac{11}{2} \rightarrow a_2 - a_1 = \frac{11}{2} - \frac{8}{2} = \frac{3}{2} = d$$

البته توی این مسئله می تونستید از همون اول  $a_7$  و  $a_3$  رو حساب کرده و از هم کم کنید.

$$n = 7 \Rightarrow a_7 = \frac{5+3(7)}{2} = 13 \quad n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{5+3(3)}{2} = 7$$

$$\Rightarrow a_7 - a_3 = 13 - 7 = 6$$

مثال ۷: چندمین جمله از دنباله حسابی  $3, 7, 11, \dots$  برابر 175 می شود؟

۴۴ (۴)

۴۳ (۳)

۴۲ (۲)

۴۱ (۱)

حل:

وقتی در صورت مسئله میکه چندمین جمله یعنی  $n$  رو می خواد پس کافیه با داشتن  $a_1$  و  $d$  جمله عمومی رو بنویسیم

$$\rightarrow a_1 = 3, \quad d = 4 \rightarrow a_n = 3 + (n - 1)(4) = 4n - 1$$

ملا کافیه  $a_n = 175$  قرار بدیم تا  $n$  بدست بیاد (یعنی برعکس دفعه های قبل)

$$a_n = 175 \rightarrow 4n - 1 = 175 \rightarrow 4n = 176 \rightarrow n = \frac{176}{4} = 44$$

مثال ۸: پنجمین جمله از دنباله  $5, 8, 11, \dots$  بزرگتر از 200 می شود؟

$$a_n > 200 \rightarrow n = ? \rightarrow a_1 = 5 \quad d = 3$$

$$\rightarrow a_n = 5 + (n - 1)(3) = 3n + 2 > 200$$

$$3n + 2 \rightarrow 3n > 198 \rightarrow n > \frac{198}{3} \rightarrow n > 66 \rightarrow n = 67$$

مثال ۹: در مثال قبل مقدار اولین جمله بزرگتر از ۳۰۰ چقدر است؟

خب اینجا یکم دقت نیاز داره!

اول باید ببینیم کدوم جمله بزرگتر از ۳۰۰ میشه (یعنی  $n$  رو بدست بیاریم) بعد با جایگذاری  $n$  بدست آمده در جمله عمومی می توئیم جواب رو بدست بیاریم. (دقت کنید که جمله عمومی رو از مثال قبل داریم)

$$a_n > 300 \quad 3n + 2 > 300 \quad 3n > 298 \quad n > \frac{298}{3}$$

$$n \geq 99.3 \rightarrow n = 100 \rightarrow a_{100} = 3(100) + 2 = 302$$

تمرین ۳: مقدار اولین جمله سه رقمی دنباله حسابی  $3, 10, 17, \dots$  چقدر است؟

جواب تمرین ۳: ۱۰۱

تمرین ۴: بزرگترین جمله سه رقمی دنباله حسابی بالا کرام است؟

جواب تمرین ۴:  $a_{143}$

مثال ۱۰: چند عدد سه رقمی مضرب ۱۵ وجود دارد؟

خب اعداد مضرب ۱۵ چی هستند؟  $15, 30, 45 \dots$

یعنی یہ تصاعد عددی با  $a_1 = 15$  و  $d=15$  پس:

$$a_n = 15 + (n - 1)(15) = 15n$$

البته خیلی راحت می توانستیم این مطلب رو ذهنی بگیریم پس دقت کنید وقتی گفتن مضرب 15 یعنی  $15n$  گفتن مضرب 7 همیشه  $7n$  حالا گفته اعداد سه رقمی (یعنی اعداد بین 100 تا 999) پس:

$$100 \leq 15n \leq 999 \Rightarrow \frac{100}{15} \leq n \leq \frac{999}{15}$$

$$6.6 \leq n \leq 66.6 \rightarrow n=7,8,..66 \rightarrow \text{میشه ۶۰ عدد}$$

آقا اجازه: 66-7 که میشه 59 تا ؟



استاد: دقت کن پسر جان فاصله رو که نفواستیم، تعداد اعداد رو نفواستیم مثلا تعداد اعداد  $3,4,..7$

میشه

5 عدد  $\rightarrow 3,4,5,6,7$

برای مناسبه یاد بگیریم  $7-3+1=5$  توی این مثال هم مینویسیم  $66-7+1=60$

تمرین ۵: چند عدد چهار رقمی مضرب 501 وجود دارد؟

جواب تمرین ۵: ۱۸ عدد

تمرین ۶: چند درصد از اعداد سه رقمی مضرب ۱۵ هستند؟

جواب تمرین ۶: ۶.۶ درصد

مثال ۱۱: اگر به قدر نسبت یک دنباله حسابی ۲ واحد اضافه کنیم به جمله پنجم دنباله حاصل چند واحد اضافه می شود؟

روش اول: (روش پارامتری) جمله عمومی دنباله هندسی همیشه  $a_n = a_1 + (n - 1)d$  حالا که ۲ واحد به قدر نسبت اضافه کنیم داریم:

$$a'_n = a_1 + (n - 1)(d + 2)$$

در حالت اول جمله پنجم همیشه:

$$a_5 = a_1 + 4d$$

در حالت دوم جمله پنجم همیشه:

$$a'_5 = a_1 + 4(d + 2) = a_1 + 4d + 8$$

بنابراین:

$$a'_5 - a_5 = 8$$

روش دوم: چون در صورت سوال نگفته که جمله اول و قدر نسبت تصاعد حسابی چند هست فوومون برایش  $a_1 = 1$  و  $d = 2$  در نظر میگیریم اونوقت دنباله ما میشه:

$$1, 3, 5, 7, 9 \rightarrow a_5 = 9$$

حالا که ۲ واحد به قدر نسبت اضافه کنیم داریم  $a_1 = 1$  و  $d = 4$ .

و دنباله ما میشه:

$$1, 5, 9, 13, 17 \rightarrow a'_5 = 17$$

بنابراین:

$$a'_5 - a_5 = 8$$

مثال ۱۲: در دنباله حسابی  $125, x, 35, y$  عدد  $y$  کدram است؟ (انسانی ۱۰)

$$(1) -10 \quad (2) -5 \quad (3) 0 \quad (4) 5$$

یه تست جالب!، در این تست جمله اول و سوم به ما داده شده و جمله چهارم رو از ما میخوان

$$a_1 = 125 \quad a_3 = 35 \quad a_4 = y = ?$$

گفتیم که با داشتن 2 جمله می تونیم قدر نسبت رو دربیاریم (یادتون که نرفته!)

$$a_3 - a_1 = 2d \rightarrow 35 - 125 = 2d \Rightarrow d = -45$$

$$\rightarrow y = a_4 = a_1 + 3d = 125 + 3(-45) = -10$$

به جمله دوم یعنی  $x$  هم کاری نداریم!!

مثال ۱۳: دنباله حسابی  $1, 5, 9, \dots, 209$  چند جمله دارد؟

فب کافیه ببینیم 209 جمله پنجم هست؟

$$a_1 = 1 \quad d = 4 \quad \rightarrow a_n = 1 + (n - 1)(4) = 209$$

$$1 + 4(n - 1) = 209 \rightarrow 4(n - 1) = 208$$

$$n - 1 = \frac{208}{4} \rightarrow n - 1 = 52 \rightarrow n = 53$$

پس دنباله داده شده 53 جمله دارد. به عنوان تمرین خودتون حساب کنید که این دنباله چند جمله سه رقمی داره.

مثال ۱۴: در یک دنباله حسابی  $a_2 + a_5 + a_8 = 12$  جمله پنجم دنباله کدram است؟

فیلی سریع عبارت  $a_2 + a_5 + a_8$  رو بر حسب  $a$  و  $d$  می نویسیم:

$$a_2 + a_5 + a_8 = (a + d) + (a + 4d) + (a + 7d) = 3a + 12d \rightarrow$$

$$3a + 12d = 12$$

مسئله از ما چی میفواد؟ جمله پنجم یعنی  $a+4d$  فب کافیه عبارت بالا رو بر ۳ تقسیم کنیم

$$\frac{3a + 12}{3} = \frac{12}{3} \rightarrow a + 4d = 4 \rightarrow a_5 = 4$$

تمرین ۷: در مثال بالا  $a_3 + a_7$  حاصل بقدر است؟

جواب تمرین ۷: ۸

تمرین ۸: در یک دنباله حسابی جمله اول برابر ۱۰ و مجموع جملات پنجم و ششم برابر ۱۱ است جمله چهارم کرام است؟

۹ (۴)

۱ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

جواب تمرین ۸: گزینه ۲

مثال ۵: در یک دنباله حسابی مجموع دو جمله اول برابر ۷.۵ و مجموع جملات سوم و چهارم برابر ۵.۵ است قدر

نسبت آن بقدر است؟

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 2a + d = 7.5 \\ a_3 + a_4 = 2a + 5d = 5.5 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو معادله دو مجهول}} \begin{cases} -(2a + d) = 7.5 \\ 2a + 5d = 5.5 \end{cases} \rightarrow 4d = -2 \rightarrow d = \frac{-1}{2}$$

**توجه:** توی میث دنباله ها به دستگاه دو معادله دو مجهول (بر حسب  $a, d$ ) زیار بر می فوریم خوب یادش بگیرید.

تمرین ۹: جمله هفتم یک تصاعد حسابی برابر ۷- و مجموع جمله اول و چهارم برابر ۴ است جمله نهم کرام است؟

(انسانی ۷۷)

-۱۳ (۴)

-۱۲ (۳)

-۱۱ (۲)

-۱۰ (۱)

جواب تمرین ۹: گزینه ۲

تمرین ۰: در یک تصاعد حسابی  $a_1 + a_2 + a_7 + a_8 = 20$  اگر  $a_4 = 3$  باشد  $a_5$  برابر است با؟  
(ریاضی ۶۷)

۱ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

جواب تمرین ۰: گزینه ۳

سه جمله متوالی یک دنباله حسابی

دنباله عددی زیر رو در نظر بگیرید

$2, 5, 8, 11, 14, \dots$

سه جمله متوالی از این دنباله رو در نظر بگیرید مثلا  $5, 8, 11$  حالا بگو بینم ارتباط بین دو جمله کناری یعنی  $5, 11$  با جمله وسط یعنی  $8$  چیه؟

آقا اجازه: جمعشون همیشه دو برابر جمله وسط یعنی:



$$5+11=2 \times 8$$

استاد: احسنت! این خاصیت واسه هر سه جمله متوالی دنباله حسابی برقراره یعنی اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی دنباله حسابی باشند داریم:

$$a + c = 2b \rightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

به عبارت ساده تر می تونیم بگیم جمله وسط میانگین (واسطه عددی) دو جمله کناریه.

آقا اجازه: اگر مثال پله رو در نظر بگیریم این مطلبی که گفتین واضحه چون پله دوم وسط پله های اول و سومه.



استاد: اصنت این رو فوب اومدی! البته این قضیه رو همیشه واسه وقتی که سه جمله متوالی نباشند تعمیم دار اما اول بزار چند مثال با هم حل کنیم.

مثال ۱۶: اعداد  $5p-1$  و  $3p+4$  و  $2p+3$  سه جمله متوالی یک دنباله عددی هستند قدر نسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

یه تست فیلی آبلگی! (فقط یادتون باشه برای در آوردن  $d$  باید دو جمله متوالی رو از هم کم کنیم.)

$$(2p + 3) + (5p - 1) = 2(3p + 4) \rightarrow 7p + 2 = 6p + 8 \rightarrow p = 6$$

با معلوم شدن  $p$  می تویم مقدار عددی سه جمله رو بدست بیاریم

$$p=6 \rightarrow \underbrace{2P + 3 = 15}_{a_1}, \underbrace{3P + 4 = 22}_{a_2}$$

$$a_2 - a_1 = d \rightarrow d = 22 - 15 = 7$$

مثال ۱۷: اولین جمله و قدر نسبت یک تصاعد حسابی به ترتیب به صورت دو عدد متوالی و جمله سوم آن برابر ۴ بوده قدر نسبت تصاعد پقدر بوده است؟ (آزاد انسانی ۸۲)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

یه تست جالبناک! فوب دقت کنید

فرض کنید اولین جمله برابر  $x$  باشه اونوقت قدر نسبت همیشه  $x + 1$  پس جمله دوم همیشه

$$a_2 = a + d = x + x + 1 = 2x + 1$$

پس سه جمله تصاعد حسابی همیشه

$$x, \quad 2x + 1, \quad 14$$



$$\begin{aligned} \rightarrow x + 14 &= 2(2x + 1) \rightarrow x + 14 = 4x + 2 \\ \rightarrow 12 &= 3x \rightarrow x = 4 \rightarrow 2x + 1 = 9 \rightarrow d = 5 \end{aligned}$$

مثال ۱۸: واسطه عددی بین دو عدد  $1 + \sqrt{3}$  و  $\frac{2}{1 - \sqrt{3}}$  کدرا م است؟

(۱) 0      (۲)  $\sqrt{3}$       (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴) 1

تدریسید! واسطه عددی همون میانگینه.

$$\frac{\frac{2}{1 - \sqrt{3}} + \frac{1 + \sqrt{3}}{1}}{2} = \frac{2 + 1 - 3}{1 - \sqrt{3}} = \frac{0}{2} = 0$$

تمرین ۱۱: واسطه عددی بین  $\frac{2}{\sqrt{3} - 1}$  و  $\sqrt{3} + 1$  پقدر است؟

جواب تمرین ۱۱:  $\sqrt{3} + 1$

تمرین ۱۲: به ازای کدرا م مقدار  $a$  اعداد  $a + 4, 4a + 1, 9a - 3$  بملات متوالی یک تصاعد عددی هستند؟

(۱) ۵      (۲) ۱      (۳) ۱.۵      (۴) ۲

جواب تمرین ۱۲: گزینه یک

مثال ۱۹: زوایای یک مثلث قائم الزاویه سه جمله متوالی یک تصاعد عددی هستند کوچکترین زاویه مثلث کدرا م است؟

به مسئله ساره ولی بآلب!

فرض کنید سه زاویه مثلث به صورت  $a, b, c$  باشد طبق فرض مسئله این سه زاویه سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی هستند پس داریم :

$$a + c = 2b$$

از طرفی می دانیم جمع زوایای یک مثلث برابر  $180^\circ$  است پس :

$$a + b + c = 180^\circ \rightarrow 2b + b = 180 \rightarrow b = 60^\circ$$

اما در مورد دو زاویه دیگر! دقت کنید که در صورت مسئله گفته مثلث قائم الزاویه پس زاویه بزرگ مثلث یعنی  $c$  همیشه  $90^\circ$  درجه

بنابراین زاویه کوچک مثلث یعنی  $a$  همیشه  $30^\circ$  درجه (  $180 - 90 - 60 = 30$  )

$$30^\circ, \quad 60^\circ, \quad 90^\circ \quad \text{زوایای مثلث}$$

خب حالا بریم سراغ تعمیم قضیه قبل (رابطه بین سه جمله متوالی) دوباره همون پله معروف رو در نظر بگیرید

واضحه که پله سوم وسط پله های اول و پنجم است بنابراین می تونیم بنویسیم :

$$a_3 = \frac{a_1 + a_5}{2} \Rightarrow a_1 + a_5 = 2a_3$$

اثبات ریاضی رابطه بالا هم خیلی ساده است :

$$a_1 + a_5 = a_1 + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 4d = 2(a_1 + 2d) = 2a_3$$

به طور کلی بین هر سه جمله تصاعد حسابی که هم فاصله باشند رابطه بالا برقراره مثلا:

$$a_2 \quad \longleftrightarrow \quad a_5 \quad \longleftrightarrow \quad a_8 \quad \Rightarrow \quad a_2 + a_8 = 2a_5$$

3 فاصله      3 فاصله

به همین صورت:

$$a_5 + a_9 = 2a_7$$

$$a_{10} + a_{16} = 2a_{13}$$

به طور کلی اگر جمله وسط را  $a_m$  بنامیم و جملات کناری را  $a_{m-k}$  و  $a_{m+k}$  اونوقت می تونیم بنویسیم:

$$a_{m-k} \xleftrightarrow{k \text{ فاصله}} a_m \xleftrightarrow{k \text{ فاصله}} a_{m+k} \Rightarrow a_{m-k} + a_{m+k} = 2a_m$$

مثال ۲۰: اگر در یک تصاعد حسابی  $a_7 = 11, a_3 = 7$  باشد جمله پنجم این تصاعد کرام است؟

روشن اول: با استفاده از نکته بالا سه جمله ی  $a_3, a_5, a_7$  هم فاصله هستند پس داریم:

$$a_3 + a_7 = 2a_5 \rightarrow 7 + 11 = 2a_5 \rightarrow a_5 = 9$$

روشن دوم: دستگاه دو معادله دو مجهول:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 7 \\ a_7 = a_1 + 6d = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \times (a_1 + 2d = 7) \\ a_1 + 6d = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a_1 - 2d = -7 \\ a_1 + 6d = 11 \end{cases}$$

$$\text{با جمع دو معادله داریم} \rightarrow d = 1 \rightarrow a_1 + 2(1) = 7 \rightarrow a_1 = 5$$

$$a_5 = a_1 + 4d = 5 + 4(1) = 9$$

تمرین ۱۳: در یک دنباله حسابی  $a_1 + a_7 + a_{13} = 39$  اگر  $a_5 = 5$  باشد قدرنسبت تصاعد چقدر

است؟

$$-4 \quad (\varepsilon)$$

$$4 \quad (\text{س})$$

$$\frac{-1}{4} \quad (\text{پ})$$

$$\frac{1}{4} \quad (\text{ا})$$

جواب تمرین ۱۳: گزینه ۳

تمرین ۴: در یک تصاعد حسابی  $a_1 = 1, a_2 = \frac{5}{3}$  حاصل عبارت  $\frac{a_{15}+a_{17}+a_{19}}{a_{33}+a_{35}+a_{37}}$  کرام است؟

$$\frac{21}{17} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{17} \quad (۳)$$

$$\frac{105}{71} \quad (۲)$$

$$\frac{35}{71} \quad (۱)$$

جواب تمرین ۴: گزینه ۱

### درج واسطه حسابی

یه سوال ساده: فرض کن دو تا درخت داریم که ۱۲ متر از هم فاصله دارن اگر بفواهییم بین این ۲ تا درخت ۳ تا درخت دیگه با فاصله یکسان بکاریم بین هر درخت پقدر فاصله می افته؟

آقا اجازه: اونوقت روی هم رفته ۵ تا درخت داریم که بینشون ۴ تا فاصله هست پس فاصله بین دو

$$\text{درخت همیشه } 3 = \frac{12}{4}.$$



بین ۵ درخت ۴ فاصله هست!

استاد: اصنت! به این میگویم درج (قرار دادن) واسطه حسابی بین دو عدد (البته در اینجا واسطه درختی!) حالا ما همین

کار رو با اعداد انجام می دیم.

مثال ۲۱: بین اعداد ۲۱ و ۵ سه واسطه عددی درج کردیم قدر نسبت تصاعد حاصل چقدر است؟

$$۳ \text{ واسطه عددی } ۲ + \text{ عدد اصلی } ۵ = \text{ عدد } ۴ \leftarrow \text{ فاصله}$$

طبق شکل بالا با قرار دادن سه واسطه داریم:

$$4d = 21 - 5 \Rightarrow d = \frac{21 - 5}{4} \Rightarrow d = 4$$

اینطوری هم همیشه گفت که اگر ۵ و ۲۱ جمله اول فرض کنیم ۲۱ همیشه جمله پنجم یعنی:

$$\underbrace{5}_{a_1}, a_2, a_3, a_4, \underbrace{21}_{a_5}$$

بنا بر این:

$$a_5 - a_1 = (5 - 1)d \Rightarrow 21 - 5 = 4d \Rightarrow d = 4$$

به طور کلی اگر  $n$  واسطه حسابی بین دو عدد  $a, b$  درج کنیم  $a$  همیشه جمله اول و  $b$  همیشه جمله  $n+2$  بنا بر این:

$$a_{n+2} - a_1 = b - a = (n + 1)d$$

$$\Rightarrow d = \frac{b - a}{n + 1}$$

فرمول بالا را حفظ نکنید بلکه بفهمینش!

مثال ۲۲: بین دو عدد ۲ و ۱۲ سه عدد قرار داده ایم که با این دو عدد تشکیل یک تصاعد حسابی صعودی ( $d > 0$ ) را

بدهند جمله هفتم این تصاعد کدام است؟

$$a_1 = 2 \quad a_5 = 12 \quad \Rightarrow \quad a_5 - a_1 = 4d = 12 - 2 = 10 \quad d = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 2 + 6(2.5) = 17$$

دیدید که هیچ نیازی هم به فرمول نبود!

مثال ۲۳: بین دو عدد  $\sqrt{3} - 5$  و  $\sqrt{3} + 5$  چند عدد میتوان قرار داد که رشته حاصل تشکیل تصاعد حسابی با قدرنسبت یک بردهد.

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

این تست جالبه خوب دقت کنید!

فرض کنید  $n$  عدد بین دو عدد داده شده درج کردیم بنابراین داریم:

$$\underbrace{\sqrt{3} - 5}_{a_1}, \quad \text{عدد } n, \quad \underbrace{\sqrt{3} + 5}_{a_{n+2}}$$

$$a_1 = \sqrt{3} - 5, \quad a_{n+2} = \sqrt{3} + 5$$

$$a_{n+2} - a_1 = (n + 1)d = (\sqrt{3} + 5) - (\sqrt{3} - 5) = 10$$

$$(n + 1)d = 10 \stackrel{d=1}{\Rightarrow} (n + 1) = 10 \Rightarrow n = 9$$

تمرین ۵: یازده واسطه حسابی بین دو عدد  $-11, 19$  درج کرده ایم قدرنسبت این تصاعد کدام است؟

 $\frac{4}{3}$  (۴) $\frac{3}{2}$  (۳)

-۲.۵ (۲)

-۳ (۱)

جواب تمرین ۵: گزینه ۲

تمرین ۶: بین دو عدد ۳ و ۱۹ چند واسطه حسابی با قدرنسبت ۴ میتوان درج کرد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

جواب تمرین ۶: گزینه ۱

## مجموع جملات یک دنباله حسابی

دنباله زیر رو در نظر بگیرید

$$5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots$$

فرض کنید حاصل جمع ۶ جمله اول این دنباله از ما خواسته شده باشد. یک روش برای مناسبه این حاصل جمع اینه که همینطور مته کلاس اولی ها جملات رو با هم جمع کنیم و بریم جلو! اما ما میتوایم در اینجا از یک روش ابتکاری استفاده کنیم پس خوب دقت کنید.

اگر جمله اول رو با آخر جمع کنیم همیشه:

$$5 + 20 = 25$$

اگر جمله دوم رو با ماقبل آخر جمع کنیم همیشه

$$8 + 17 = 25$$

به همین صورت جمله سوم با...

$$11 + 14 = 25$$

پس ۳ دسته ۲۵ تایی داریم که میشه ۷۵ تا

$$5+8+11+14+17+20=75$$

حالا اگر تعداد جملات زیاد بود چی میشه؟

هیچ کاری نداره! کافیه جملات اول و آخر رو باهم جمع کنیم تا حاصل یک دسته بدست بیاد سپس این عدد رو در تعداد دسته ها ضرب می کنیم واضحه که تعداد دسته ها همیشه تعداد جملات تقسیم بر دو. پس به طور کلی جمع جملات تصاعد

حسابی میشه :

$$\text{تعداد جملات} \times \frac{(\text{جمله اول} + \text{جمله آخر})}{2} = \text{جمع جملات دنباله حسابی}$$

به بیان ریاضی مطلب بالا رو همیشه به صورت زیر نوشت:

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$S_n$ : جمع جملات      جمله آخر:  $a_n$       جمله اول:  $a_1$       تعداد جملات:  $n$

مثال ۲۴: مجموع ۱۰ جمله اول از تصاعد حسابی زیر را بیابید.

$$3, 7, 11, \dots$$

برای مناسبه مجموع  $n$  جمله به سه پارامتر نیاز داریم جمله اول، جمله آخر و تعداد جملات

در اینجا جمله اول که مشخصه  $a_1 = 3$  تعداد جملات هم که مسئله خودش داده  $n = 10$  اما جمله آخر چند میشه؟

خب توجه کنید که

$$a_{10} = a_1 + 9d$$

بنابراین با داشتن  $d, a_1$  میتونیم  $a_{10}$  رو بنویسیم:

$$d = 7 - 3 = 4 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9(4) = 39$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} [3 + 39] = 5[42] = 210$$

دیدید که برای مناسبه  $a_{10}$  در مثال بالا یکم اذیت شدیم! به همین دلیل برای مسائلی که جمله آخر یعنی  $a_n$  مشخص

نیست می تونیم به فرمول دیگه واسه  $S_n$  در بیاریم. کافیه در فرمول  $S_n$  به جای  $a_n$  بنویسیم:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

بنابراین  $S_n$  به صورت زیر درمیار:



$$\Rightarrow S_n = \left(\frac{n}{2}\right)[a_1 + a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

ماسبه مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی با داشتن  $a_1$  و  $d$  و  $n$

$\Rightarrow$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

علا مثال قبل رو با این فرمول حل میکنیم:

$$n = 10, \quad a_1 = 3, \quad d = 4 \Rightarrow S_n = \left(\frac{10}{2}\right)[2(3) + 9(4)]$$

$$S_n = (5)[6 + 36] = 5[42] = 210$$

چند نکته در مورد مساسبه  $S_n$

- دقت کنید برای مساسبه  $S_n$  کافیه  $a_1, d, n$  رو داشته باشیم یا  $a_1, a_n, n$
- اما در بسیاری از مسائل به جای اینکه این پارامترها رو مستقیماً بدن یکم می پیچونش! پس فوب به صورت مسائل توجه کنید.
- در کنگورها اغلب مسائل مطرح شده از بخش دنباله ها در مورد مساسبه  $S_n$  هست پس باید به اندازه کافی مسئله و تست در این مورد حل کنید.
- دقت کنید که  $S_n$  حاصل جمع جملات اول تا  $n$  ام هست بنابراین اگر در مسئله ای جمع فواسته شده از جمله اول شروع نشده بود به شکل زیر عمل می کنیم  
مثلا فرض کنید حاصل جمع جملات ششم تا دهم یک دنباله حسابی فواسته شده بود کافیه بنویسیم:

$$S_{6-10} = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

$$\Rightarrow S_{6-10} = S_{10} - S_5$$

به بیان ساده تر :

مجموع پنج جمله اول - مجموع جملات اول تا دهم = مجموع جملات ششم تا دهم

مثال ۲۵: در یک دنباله حسابی جمله  $n$  ام به صورت  $a_n = \frac{3}{2}n - 5$  است مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله کرام است؟

یه سوال ساده اما جالب!

دقت کنید وقتی  $a_n$  به ما داده شده خیلی راحت میتونیم  $a_1, d$  رو بدست بیاریم یادتون هست که ضریب  $n$  در جمله عمومی همیشه قدر نسبت پس داریم:

$$d = \frac{3}{2}$$

اگر هم این مورد یادتون نبود  $n = 2$  قرار بدید تا  $a_2$  بدست بیاید بعرض  $a_2 - a_1 = d$  به همین راحتی!

حالا با داشتن  $a_1, n, d$  می تونیم  $S_n$  رو در بیاریم.

روش دوم اینکه که  $S_n$  رو با داشتن  $a_1, a_n, n$  حساب کنیم:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}(1) - 5 = \frac{45}{2} - 5 = \frac{35}{2}$$

$$n = 15 \Rightarrow a_{15} = \frac{3}{2}(15) - 5 = \frac{45}{2} - 5 = \frac{35}{2}$$

$$S_{16} = \frac{15}{2} \left[ \frac{-7}{2} + \frac{35}{2} \right] = \frac{15}{2} [14] = 105$$

مثال ۲۶: مجموع اعداد دو رقمی مضرب ۹ بقدر است؟

اعداد دو رقمی مضرب ۹ میشن:

$$18, 27, 36, \dots, 99$$

در اینجا  $a_1, a_n$  رو داریم ولی فور  $n$  مشخص نیست شب مسئله در اینجا مثل مثال ۷ میشه در واقع سؤال اینه که چندمین جمله از دنباله بالا برابر ۹۹ میشه؟

کافیه با داشتن  $a_1, d$  جمله عمومی رو بنویسیم:

$$\Rightarrow a_1 = 18, d = 9 \Rightarrow a_n = 18 + (n - 1)(9) = 99$$

$$\Rightarrow (n - 1)(9) = 99 - 18 \Rightarrow 9(n - 1) = 81$$

$$n - 1 = \frac{81}{9} = 9 \Rightarrow n = 10$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(18 + 99) = 585$$

حالا خودتون مثال بالا رو برای مضارب ۳ رقمی ۹ حل کنید.

مثال ۲۷: مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا  $n$  را بدست آورید.

یه سوال ساده اما بسیار مهم

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = ?$$

واضحه که در اینجا  $n$  عدد داریم:

$$a_1 = 1, d = 1, a_n = n \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}[1 + n] = \frac{n(n + 1)}{2}$$

این رابطه توی ذهنتون باشه ضرر نمی کنیدا

مجموع اعداد طبیعی از یک تا  $n$ 

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال ۲۸: مجموع اعداد طبیعی فرد از  $1$  تا  $2n - 1$  را بدست آورید.

$$1 + 3 + \dots + 2n - 1 = ?$$

$$a_1 = 1, d = 2, \quad a_n = 2n - 1, \quad n = n$$

$$S_n = \frac{n}{2} [1 + 2n - 1] = \frac{n}{2} [2n] = n^2$$

مثال ۲۹: مجموع اعداد طبیعی زوج از  $1$  تا  $2n$  را بدست آورید.

$$2 + 4 + \dots + 2n = ?$$

$$S_n = 2 + 4 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2 \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) = n(n+1)$$

توجه: مثالهای ۲۷ تا ۲۹ فیلی موم هستند هواستون باشه!

مثال ۳۰: در یک دنباله عددی  $a_2 + a_8 = 0$  و  $a_7 = 4$  مجموع هشت جمله اول این دنباله چقدر است؟

در اینجا  $n = 8$  داده شده اما  $a_1, d$  نامشخص هستند اما با توجه به داده های مسئله داریم:

$$a_2 + a_8 = 0 \Rightarrow (a_1 + d) + (a_1 + 7d) = 0$$

$$a_7 = 4 \Rightarrow a_1 + 6d = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 8d = 0 \\ a_1 + 6d = 4 \end{cases}$$

باز هم دستگاه دو معادله دومجهول! این رو دیکه خودتون حل کنید جوابش میشه:

$$a_1 = -8 \quad , \quad d = 2$$

بنابراین  $S_8$  به صورت زیر بدست میاد:

$$S_8 = \frac{8}{2} [2(-8) + 7(2)] = 4[-16 + 14] = -8$$

توصیه مهم: هر وقت به بن بست خوددیر جملات دنباله رو برهسب  $a_1$ ,  $d$  بنویسید. (تجزیه کنید!)

مثال ۳۱: در یک دنباله حسابی  $a_7 + a_{17} = 42$  می باشد مجموع بیست و سه جمله نخست این دنباله چقدر است؟

تجزیه  $a_7$  ,  $a_{17}$ :

$$a_7 + a_{17} = a_1 + 6d + a_1 + 16d = 2a_1 + 22d = 42$$

$$2a_1 + 22d = 42$$

یک معادله و دومجهول، ظاهراً یک معادله کمه!

اما اگر خواسته مسئله رو بنویسیم قضیه خود به خود حل میشه:

$$S_{23} = \frac{23}{2} [2a_1 + 22d] = \frac{23}{2} [42] = 23(21) = 483$$

دقت کنید:

$$23 \times 21 = 23(20 + 1) = 460 + 23 = 483$$

تمرین ۱۷: در یک تصاعد حسابی جمله دهم برابر ۵ است. مجموع ۱۹ جمله اول این تصاعد چقدر است؟

- (۱) ۹۵      (۲) ۸۵      (۳) ۱۰۰      (۴) ۹۰

جواب تمرین ۱۷: گزینه یک

تمرین ۱۸: مجموع اعداد زوج از ۲ تا ۵۰۰ کدام است؟

- (۱) ۶۲۶۵۰      (۲) ۶۲۷۰۰      (۳) ۶۲۷۵۰      (۴) ۶۲۸۰۰

جواب تمرین ۱۸: گزینه سه

تمرین ۱۹: در یک تصاعد عددی که دارای ۱۷ جمله است. جمله نهم برابر ۸ است مجموع جملات این تصاعد چقدر است؟

- (۱) ۱۳۶      (۲) ۱۲۸      (۳) ۱۲۰      (۴) ۱۵۳

جواب تمرین ۱۹: گزینه یک

تمرین ۲۰: در یک دنباله حسابی مجموع ۱۲ جمله اول آن ۱۳۸ و جمله ششم آن برابر ۱۰ است جمله اول این دنباله چقدر است؟

جواب تمرین ۲۰:  $a_1 = -5$

چند نکته در مورد مجموع جملات یک دنباله حسابی

$S_n$  نسبت به  $n$  از درجه دوم است ( $a_n$  نسبت به  $n$  از درجه اول بود یادتونه !!)

با کمی مرتب سازی می توانیم رابطه  $S_n$  رو به صورت زیر بنویسیم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = na_1 + \frac{n}{2}(n-1)d = na_1 + \frac{n^2}{2}d - \frac{n}{2}d$$

$$= \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n \Rightarrow S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n$$

بنابراین ضریب  $n^2$  همیشه  $\frac{d}{2}$  و ضریب  $n$  همیشه  $\left(a - \frac{d}{2}\right)$

در رابطه  $a_n$  ضریب  $n$  برابر  $d$  است

در رابطه  $S_n$  ضریب  $n^2$  برابر  $\frac{d}{2}$  است

مثال ۳۲: مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله عددی برابر  $S_n = \frac{n^2}{3}$  است جمله یازدهم این تصاعد کدام است؟ (ریاضی ۱)

۹ (ع)

۱ (س)

۷ (پ)

۶ (ا)

روش اول: با توجه به این نکته ای که گفتیم ضریب  $n^2$  همیشه  $\frac{d}{2}$ :

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow d = \frac{2}{3}$$

از طرفی اگر در فرمول  $S_n$  قرار بدهیم  $n=1$  در واقع  $a_1$  رو بدست آوردیم (حاصل جمع یک جمله اول همیشه  $a_1$  دیکه!!!)

$$S_1 = a_1 = \frac{1^2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

حالا با داشتن  $a_1$  و  $d$  می توانیم هر جمله ای رو بدست بیاریم:

$$a_{11} = a_1 + 10d = \frac{1}{3} + 10\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{21}{3} = 7$$

روش دوم: فرض کنیم که نکته بالا رو بلد نباشیم

$$s_1 = \frac{1^2}{3} = a_1 \quad \text{اول } n = 1 \text{ قرار میدیم:}$$

$$s_2 = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3} = a_1 + a_2 \quad \text{بعدش } n = 2 \text{ قرار میدیم:}$$

بنابراین داریم:

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = s_2 - s_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

$$\Rightarrow d = a_2 - a_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

حالا با داشتن  $a_1$  و  $d$  می‌تونیم  $a_{11}$  رو مثل روش اول بدست بیاریم.

روش سوم: اگر  $n = 10$  قرار بدیم  $s_{10}$  (مجموع ده جمله اول) بدست میاد.

$$s_{10} = \frac{10^2}{3} = \frac{100}{3}$$

اگر  $n = 11$  قرار بدیم  $s_{11}$  بدست میاد.

$$s_{11} = \frac{11^2}{3} = \frac{121}{3}$$

$$s_{11} - s_{10} = a_{11} \quad \text{حالا قبول دارید که}$$

(اصلا روتون میشه قبول نداشته باشید!!)

بنابراین فیلی راحت مینویسیم:

$$s_{11} - s_{10} = \frac{121}{3} - \frac{100}{3} = \frac{21}{3} = 7$$





آقا اجازه: روش سوم از همه آسونتر بود همیشه فقط همون رو یاد بگیریم؟

استاد: بین عزیز دل برادر! درسته که توی این مسئله روش سوم از همه ساده تر بود ولی ممکنه توی امتحان یا کنکور صورت مسئله رو طوری تغییر بدن که دیگه این روش چندان کارگشا نباشه بنابراین شما باید روشهای دیگه رو هم فوب یاد بگیرید. علاوه بر این، حل یک مسئله از چند روش باعث میشه که شما از زوایای مختلفی به مسئله نگاه کنی و خود این باعث افزایش عمق یادگیری شما میشه.

مثال ۳۳: در یک دنباله عددی جمله پنجم برابر ۳ است و هر جمله از جمله ما قبل خود به اندازه  $\frac{1}{2}$  کوچکتر است مجموع ۱۰ جمله اول آن چقدر است؟

هر جمله از جمله ما قبل خود به اندازه  $\frac{1}{2}$  کمتر است یعنی چه؟

یعنی قدر نسبت برابر  $\frac{-1}{2}$  است!

میکنی نه به مثال عددی می زنیم!

5. 1 1.5 2

حالا در مسئله گفته  $a_5 = 3$  بنابراین داریم:

$$a_5 = a_1 + 4d = 3 \Rightarrow a_1 + 4\left(\frac{-1}{2}\right) = 3 \Rightarrow a_1 = 5$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} \left[ 2(5) + 9\left(\frac{-1}{2}\right) \right] \Rightarrow$$

$$S_{10} = 5 \left( \frac{11}{2} \right) = \frac{55}{2} = 27.5$$

مثال ۳۴: مجموع چند جمله از دنباله حسابی  $a, 2, 5a-2, \dots$  برابر 55 است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

یه تست ترکیبی فیلی زیبا!

توی صورت تست گفته چند جمله یعنی  $n$  مجهوله از طرفی جواب  $S_n$  را برابر 55 داده همپنین جمله اول و قدر نسبت هم مجهوله!

از طرفی گفته دنباله به صورت  $a, 2, 5a - 2, \dots$  هست یعنی سه جمله اول دنباله حسابی رو داده پس طبق فاصیبت سه جمله متوالی دنباله حسابی داریم:

$$a + 5a - 2 = 2(2) = 4 \Rightarrow 6a - 2 = 4 \Rightarrow a_1 = a = 1$$

$$a_2 = 2 \Rightarrow a_2 - a_1 = d = 1$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2(1) + (n-1)(1)] = 55 \Rightarrow \frac{n}{2} [n+1] = 55$$

$$n(n+1) = 2 \times 55 = 110 \Rightarrow n(n+1) = 110 = 10 \times 11 \Rightarrow n = 10$$

مثال ۳۵: اگر مجموع هشت جمله از دنباله حسابی  $a_1 = 1 + 2p$  و  $a_2 = p - 1$  برابر ۶۰ باشد قدر نسبت دنباله پقدر است؟

یه سؤال جالب!

$n = 8$  داده شده از طرفی  $a_1$  مجهوله  $d$  هم مستقیما داده نشده ولی با داشتن  $a_1$  و  $a_2$  میتوانیم  $d$  را بر حسب  $p$  بدست آوریم:

$$a_2 - a_1 = d \Rightarrow (p - 1) - (1 + 2p) = -p - 2 = d$$

$$S_n = \frac{8}{2} [2a_1 + 7d] = 60 \Rightarrow 4[2(1 + 2p) + 7(-p - 2)] = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [2(1 + 2p) + 7(-p - 2)] = 15 \Rightarrow 2 + 4p - 7p - 14 = 15$$

$$\Rightarrow -3p = 27 \Rightarrow p = \frac{27}{-3} = -9 \Rightarrow d = -p - 2 = 9 - 2 = 7$$

مثال ۳۶: مجموع تمام اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است؟

**دقت کنید** اعداد بخش پذیر بر ۶ همون مضارب ۶ میشن دیگه یعنی  $6n$  حالا مسئله رو از دو روش براتون حل میکنم.

**روش اول: روش سنتی!** مثل مثال ۲۶ عمل کرده و مضارب ۶ بین ۱۰۰ و ۲۰۰ رو مینویسیم:

102, 108, ..... , 198

**آقا اجازه:** از کجا سریع فهمیدین که اولین و آخرین عدد میشه ۱۰۲ و ۱۹۸؟



**استاد:** فب باید زرتک باشی! ببین ۹۰ بر ۶ بخش پذیره پس از ۹۰ شروع کن بنویس (من ذهنی انجام دادم)

90, 96, 102, ..... , 192, 198, 204

پس اولین عدد ۱۰۲ و آخرین عدد ۱۹۸ است فب عدد اول و آخر مشفصه فقط می مونه تعداد جملات بازم مته مثال  
۲۶ عمل میکنیم:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow 198 = 102 + (n - 1)(6) \Rightarrow 96 = 6(n - 1)$$

$$n = 17 \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2} [102 + 198] = \frac{17}{2} [300] = 17[150] = 2550$$

**روش دوم: روش با کلاس!** اعداد بخش پذیر بر ۶ رو به صورت  $6n$  فرض می کنیم:

$$100 \leq 6n \leq 200 \Rightarrow \frac{100}{6} < n < \frac{200}{6}$$

$$16.66 < n < 33.33 \Rightarrow n = 17, \dots, 33$$

اگر  $n = 17$  قرار بدیم اولین جمله و اگر  $n = 33$  قرار بدیم آخرین جمله دنباله بدست میاد.

$$n = 17 \Rightarrow 6n = 6(17) = 102$$

$$n = 33 \Rightarrow 6n = 6(33) = 198$$

تعداد جملات هم میشه:

$$n = 33 - 17 + 1 = 17$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{17}{2} [102 + 198] = 17[150] = 2550$$

این روش رو خوب یاد بگیرید به کارتون میاد!

مثال ۳۷: در یک تصاعد عددی با جمله اول  $a$  اگر یک واحد به قدر نسبت افزوده شود آن گاه به مجموع ۲۰ جمله اول آن چه قدر افزوده خواهد شد؟

۱۹۰ (۴)

۱۸۰ (۳)

۱۷۰ (۲)

۱۶۰ (۱)

روش اول: روش پارامتری جمع ۲۰ جمله اول میشه:

$$S_{20} = 10[2a + 19d]$$

حالا فرض می کنیم یک واحد به قدر نسبت اضافه شده:

$$d' = d + 1$$

$$S'_{20} = 10[2a + 19d'] = 10[2a + 19d + 19]$$

$$S'_{20} - S_{20} = 10[(2a + 19d + 19) - (2a + 19d)] = 10(19) = 190$$

روش دوم: حالا فرض کنید  $a = 1, d = 2$  باشند (دلمون فواست اینطوری فرض کنیم!)

اونوقت داریم:

$$S_{20} = 10[2 + 19(2)] = 10(40) = 400$$

در حالت دوم  $a = 1, d' = 3$  میشه

$$S'_{20} = 10[2 + 19(3)] = 10[59] = 590$$

$$\Rightarrow S'_{20} - S_{20} = 590 - 400 = 190$$

تمرین ۲۱: مجموع پنجاهم از تصاعد حسابی ..... و ۷ و ۳ و ۵ برابر ۲۸۸ می شود؟

- (۱) ۱۵      (۲) ۱۶      (۳) ۱۷      (۴) ۱۸

جواب تمرین ۲۱: گزینه دو

تمرین ۲۲: مجموع  $n$  جمله یک تصاعد حسابی از رابطه  $S_n = n^2 + 2n$  بدست می آید مجموع جملات هفتم و

هشتم و نهم چقدر است؟

- (۱) ۷۴      (۲) ۵۱      (۳) ۳۶      (۴) ۷۶

جواب تمرین ۲۲: گزینه دو

تمرین ۲۳: در یک تصاعد حسابی مجموع  $n$  جمله اول  $S_n = n(2n + 1)$  است جمله  $n$  ام آن کدام است؟

- (۱)  $2n + 1$       (۲)  $2n + 3$       (۳)  $4n - 1$       (۴)  $4n - 3$

جواب تمرین ۲۳: گزینه ۳

تمرین ۲۴: بین ۱ و ۸۱ چه تعداد جمله درج شود تا مجموع جمله های تصاعد حسابی حاصل برابر ۲۴۶ گردد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

جواب تمرین ۲۴: گزینه دو

## دنباله هندسی

فب! به امید فرا بریم سراغ مبث بعدی یعنی دنباله هندسی. انشالا که دنباله مسایی رو خوب یاد گرفته باشید و بوش مسلط شده باشید



آقا اجازه: ما فول شدیم!!!

استاد: **full** شدن خیلی فوبه مواظب باش **fool** نشی!!!

بگذریم....

هتما یادتون هست که در دنباله مسایی به جمله اول (همون پله اول) عدد ثابتی به نام قدر نسب (**d**) اضافه میشه تا جمله بعدی بدست بیاد مثلا:

.... و ۱۸ و ۱۳ و ۸ و ۳

و جمله عمومی دنباله مسایی میشه:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

اما در دنباله هندسی به جای اینکه به هر جمله یک عدد ثابت اضافه کنیم هر جمله رو در یک عدد ثابت (همون قدر نسبت) ضرب می کنیم تا جمله بعدی بدست بیاد مثلا:

... و ۵۰ و ۱۰ و ۲

همینطور که می بینید جمله اول در اینجا برابر ۲ و قدر نسبت که اون رو با **q** نشون میدیم برابر ۵ است اگر دقت کنید در دنباله بالا داریم:

$$a_1 = 2 \text{ , } a_2 = a_1 q = 2(5) \text{ , } a_3 = a_1 q^2 = 2(5^2) \dots$$

$$a_{10} = a_1 q^9 \text{ جمله دهم همیشه}$$

و به همین صورت جمله پانزدهم همیشه:  $a_{15} = a_1 q^{14}$

بنابراین می توانیم جمله عمومی (یا جمله  $n$ ام) یک دنباله هندسی رو به صورت زیر بنویسیم:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

مثال ۳۸: با توجه به جمله عمومی داده شده مقادیر  $\frac{a_5}{a_3}$ ,  $q$ ,  $a_1$  را مناسبه کنید.

$$\text{الف) } a_n = 5(2^{n-1})$$

حل:

با مقایسه با فرمول جمله عمومی تصاعد هندسی یعنی  $a_1 q^{n-1}$  مشخصه که  $a_1 = 5$  و  $q = 2$  همیشه

اما روش مطمئن تر اینست که  $n = 1$  بزاریم تا  $a_1$  بدست بیاد بعرض  $n = 2$  قرار بدیم تا  $a_2 = a_1 q$  بدست بیاد و از تقسیم دو رابطه  $q$  رو بدست بیاریم.

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 5(2^0) = 5(1) = 5$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 5(2^1) = 10 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{aq}{a_1} = \frac{10}{5} = 2$$

برای مناسبه  $\frac{a_5}{a_3}$  می نویسیم:

$$\frac{a_5}{a_3} = \frac{a_1 q^4}{a_1 q^2} = q^2 = 4$$

دقت کنید که توی دنباله حسابی قدر نسبت  $d$  از تفریق دو جمله متوالی بدست میومد اما در دنباله هندسی قدر نسبت از تقسیم دو جمله متوالی بدست میاید به بیان ریاضی:



در تصاعد حسابی

$$a_{n+1} - a_n = d$$

در تصاعد هندسی

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

همچنین در تصاعد حسابی داشتنیم (حالت کلی بالا)

$$a_m - a_n = (m - n)d$$

مثلا:

$$a_5 - a_2 = (5 - 2)d = 3d$$

این رابطه در دنباله هندسی به صورت زیر در میاد:

$$\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$$

مثلا:

$$\frac{a_5}{a_3} = q^{5-3} = q^2$$

حالا بریم سراغ ادامه مثال ۳۱

ب)  $a_n = 5(3^{n+1})$

حل:



آقا اجازه: این هم فیلی آسونه  $a_1$  میشه ۵ و  $q$  هم میشه ۳.

استاره: دقیقاً... غلطه !!

حالا من از روش استاندارد میرم خوب نگاه کن:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 5(3^2) = 5 \times 9$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 5(3^3) = 5 \times 27$$

$$\Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{5 \times 27}{5 \times 9} = 3$$

$$\frac{a_5}{a_3} = q^{5-3} = q^2 = 3^2 = 9$$

دقت کنید که ظاهر جمله عمومی دنباله هندسی فیلی ساده است اما برخی اوقات اونقدر میپیچونش که دیگه بایه نگاه همیشه  $a$  و  $q$  رو تشخیص داد پس بهتره از همون روش استاندارد استفاده کنید!

$$ج) a_n = \frac{4}{3^{2-3n}}$$

حل:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{4}{3^{2-3}} = \frac{4}{3^{-1}} = 4 \times 3 = 12$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{3^{2-6}} = \frac{4}{3^{-4}} = 4 \times 3^4$$

$$\Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4 \times 3^4}{4 \times 3} = 3^3 = 27$$

$$\frac{a_5}{a_3} = q^{5-3} = q^2 = 27^2$$

مثال ۳۹: در یک دنباله هندسی  $a_2 a_4 = 2a_5$  جمله اول دنباله کدام است؟ (آزاد ۷۲)

$$2\sqrt{2} \quad (\varepsilon) \qquad \varepsilon \quad (3) \qquad 2 \quad (2) \qquad \sqrt{2} \quad (1)$$

حل: یادتون هست که توی دنباله حسابی توی اکثر مسائل نیاز بود که جملات رو تفزیه کنیم مثلا اگر  $a_6$  داده بود سریع می نوشتیم  $a_6 = a_1 + 5d$  در دنباله هندسی هم دقیقا همین کار رو انجام می دیم مثلا  $a_6 = a_1 q^5$  بنابراین:

$$a_2 a_4 = 2a_5 \Rightarrow aq \cdot aq^3 = 2aq^4 \Rightarrow a^2 q^4 = 2aq^4 \Rightarrow a^2 = 2a \Rightarrow a = 2$$

پس تفزیه یادتون نره دیگه تکرار نمی کنم ها !!

مثال ۴۰: در یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ حاصل  $\frac{a_1 a_7}{a_2^2}$  مقدار است؟

$$\frac{a_1 a_7}{a_2^2} = \frac{a_1 \cdot a_1 q^6}{(a_1 q)^2} = \frac{a_1^2 q^6}{a_1^2 q^2} = q^4 = 2^4 = 16$$

یه سوال ساده از ریاضیات پایه !

مثال ۴۱: جمله های اول و سوم یک دنباله هندسی به ترتیب  $\sqrt{2} - 1$  و  $\sqrt{2} + 1$  می باشند قدرنسبت این دنباله برابر است با :

$$a_4 \quad (\varepsilon) \qquad a_3 \quad (3) \qquad a_2 \quad (2) \qquad a_1 \quad (1)$$

حل:

چون دو جمله از تصاعد هندسی یعنی  $a_3$  و  $a_1$  رو داریم با یه تقسیم ساده می تونیم قدر نسبت  $q$  رو پیدا کنیم:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = q^{3-1} = q^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{2 - 1}$$

$$\Rightarrow q^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow q = \sqrt{2} + 1 = a_3$$

گویا کردن مخرج کسر که یادتون نرفته !!

تمرین ۲۵: جمله نهم یک دنباله هندسی پنج برابر جمله ششم است نسبت جمله یازدهم به جمله پنجم برابر است با:

۵(۴)                      ۱۵ (۳)                      ۲۵ (۲)                      ۱۲۵ (۱)

جواب تمرین ۲۵: گزینه دو

تمرین ۲۶: در یک تصاعد هندسی با جمله عمومی  $\frac{2}{3^n}$  جمله چهارم چند برابر جمله ششم است؟

۲(۱)                      ۳ (۲)                      ۴(۳)                      ۹(۴)

جواب تمرین ۲۶: گزینه ۴

تمرین ۲۷: در یک تصاعد هندسی جمله سوم مساوی است با جمله دوم بعلاوه دو برابر جمله اول کدام دو عدد می

توانند قدر نسبت این تصاعد باشند؟

(۱) -۱ و -۲                      (۲) -۱ و ۲                      (۳) ۲ و ۱                      (۴) ۲ و -۲

جواب تمرین ۲۷: گزینه دو

مثال ۴۲: در یک دنباله هندسی  $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 8$  است حاصل  $a_1 \cdot a_5$  کدام است؟

(۱) ۴                      (۲) ۸                      (۳) ۲                      (۴) ۱۶

حل: خیلی سریع میریم سراغ تفریح جملات:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot a_1 q^3 = a_1^3 q^3 = 8 \Rightarrow a_1 q^2 = 2$$

حالا مسئله از ما چی میفواد؟

$$a_1 a_5 = a_1 \cdot a_1 q^4 = a_1^2 q^4 = (a_1 q^2)^2 = (2)^2 = 4$$

سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی

اگه یادتون باشه (که مطمئنا یادتون نیست!) توی دنباله حسابی برای سه جمله متوالی (یا متساوی الفاصله) رابطه زیر برقرار بود:

$$a, b, c \Rightarrow a + c = 2b \Rightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

که به  $b$  می گفتیم واسطه حسابی (عددی) یا همون میانگین  $a, c$  به همین صورت برای سه جمله متوالی تصاعد هندسی داریم:

$$a, b, c \Rightarrow ac = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{ac}$$

در اینجا به  $b$  می گیم واسطه هندسی یا میانگین هندسی  $a, c$

مثلا:

$$2, 6, 18 \Rightarrow (2)(18) = (6)^2 \Rightarrow 6 = \sqrt{(18)(2)}$$

آقا اجازه: همیشه این فاصییت رو اثبات کرد؟



استاد: چرا همیشه، اتفاقا اثباتش هم فیلی سادست فرض کن  $a$  ,  $b$  ,  $c$  جملات اول، دوم و سوم

یه تصاعد هندسی باشد در این صورت می تونیم بنویسیم:

$$a = a_1 \quad b = a_1 q \quad c = a_1 q^2$$

$$\Rightarrow a \cdot c = a_1 \cdot a_1 q^2 = (a_1 q)^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot c}$$

مثال ۴۳: واسطه هندسی دو عدد  $\sqrt{3}$  و  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  کدام عدد است؟

$$\frac{3}{4} \quad (۴) \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۳) \quad \frac{3}{2} \quad (۲) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

واسطه هندسی دو عدد  $a$  ,  $c$  همیشه بنابراین:

$$a \cdot c = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{ac} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تست از این کلایی تر دیده بودید!

مثال ۴۴: به ازای کدام مقدار  $x$  دنباله  $x + 4$  ,  $x - 2$  ,  $x - 4$  هندسی است؟

$$۱۵ \quad (۴) \quad ۱۰ \quad (۳) \quad ۵ \quad (۲) \quad ۱ \quad (۱)$$

$$(x - 4) \cdot (x + 4) = (x - 2)^2 \Rightarrow x^2 - 16 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 4x = 20 \\ \Rightarrow x = 5$$

مثال ۴۵: واسطه هندسی بین دو عدد  $\sqrt{240}$  و  $\sqrt{15}$  کدام است؟

$$2\sqrt{15} \quad (۴) \quad 3\sqrt{15} \quad (۳) \quad 2\sqrt{13} \quad (۲) \quad 3\sqrt{13} \quad (۱)$$

تست بالیه فوب دقت کنیدا

$$b = \sqrt{ac} \Rightarrow a \cdot c = \sqrt{240} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{(240)(15)}$$

اول باید اعداد زیر را یکال رو به صورت حاصل ضرب عوامل اول بنویسیم:

$$240 = (2)^4(3)(5) \quad \text{و} \quad 15 = (3)(5)$$

$$a \cdot c = \sqrt{(240)(15)} = \sqrt{(2)^4(3)^2(5)^2} = (2)^2(3)(5)$$

تازه باید به را یکال دیگه بگیریم:

$$b = \sqrt{ac} = \sqrt{(2)^2(3)(5)} = 2\sqrt{15}$$

مثال ۴۶: اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه های معادله  $x^2 + 3x + (\sqrt{7} - \sqrt{2}) = 0$  باشند به ازای چه مقدار

$m$  عدد 5 واسطه هندسی  $x_1$  و  $x_2$  است؟ (یه تست فیلی مهم!)

$$(1) \quad (\sqrt{7} - \sqrt{2}) \quad (2) \quad 5(\sqrt{7} - \sqrt{2}) \quad (3) \quad (\sqrt{7} + \sqrt{2}) \quad (4) \quad 5(\sqrt{7} + \sqrt{2})$$

حل:

اگر 5 واسطه هندسی بین  $x_1$  و  $x_2$  باشه داریم:

$$x_1 \cdot x_2 = 5^2 = 25$$

از بحث معادلات درجه دوم قتما فاطرتون هست که حاصلضرب دو ریشه معادله برابر  $\frac{c}{a}$  است پس:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} &= \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{2})m}{1} = 25 \Rightarrow m = \frac{25}{(\sqrt{7} - \sqrt{2})} \\ &= \frac{25}{(\sqrt{7} - \sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{(\sqrt{7} + \sqrt{2})} = \frac{25(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{7 - 2} = 5(\sqrt{7} + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

**توجه:** دقت کنید که خاصیت  $ac = b^2$  بین هر سه جمله غیر متوالی دنباله هندسی هم برقرار است (مشابه دنباله حسابی) البته به شرطی که  $b$  وسط  $a, c$  باشد مثلاً:

$$a_3, a_6, a_9 \Rightarrow a_3 \cdot a_9 = (a_6)^2$$

مثال ۴۷: در یک تصاعد هندسی حاصلضرب جمله چهارم و هشتم برابر ۸ است جمله ششم این تصاعد کدام است؟

$$(1) \sqrt{2} \quad (2) 2 \quad (3) 2\sqrt{2} \quad (4) 3\sqrt{2}$$

روش اول: رابطه بین جملات چهارم و ششم و هشتم و نهم!

$$a_4, a_6, a_8 \Rightarrow a_4 \cdot a_8 = (a_6)^2 \Rightarrow 8 = (a_6)^2 \Rightarrow a_6 = 2\sqrt{2}$$

روش دوم: می‌تونیم از همون روش سنتی هم استفاده کنیم:

$$a_4 a_8 = a_1 \cdot q^3 a_1 q^7 = a_1^2 q^{10} = (a_1 q^5)^2 = 8 \Rightarrow a_6 = 2\sqrt{2}$$

تمرین ۲۸: واسطه هندسی بین دو عدد  $(2)^3(5)(7)^2$  و  $(2)(5)^3(11)^2$  کدام است؟

$$(1) 7700 \quad (2) 7800 \quad (3) 8500 \quad (4) 8700$$

جواب تمرین ۲۸: گزینه یک

تمرین ۲۹: اگر در معادله  $x^2 - (b-a)(b+c)x + (a+b)(c-b) = 0$  حاصلضرب ریشه های

معادله مساری با مجموع ریشه های آن باشد آنگاه

(1)  $b$  واسطه عددی بین  $a$  و  $c$  است.

(2)  $c$  واسطه عددی بین  $a$  و  $b$  است.



(۳)  $C$  واسطه هندسی بین  $a$  و  $b$  است.

(۴)  $b$  واسطه هندسی بین  $a$  و  $c$  است.

جواب تمرین ۲۹: گزینه ۴

تمرین ۳۰: فرض کنید سه عدد مثبت  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$  به ترتیب سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی باشند در مورد  $\log a, \log b, \log c$  چه میتوان گفت؟

(۱) سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی است

(۲) سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی است.

(۳)  $\log a$  واسطه حسابی بین  $\log b, \log c$  است.

(۴)  $\log a$  واسطه هندسی بین  $\log b, \log c$  است.

جواب تمرین ۳۰: گزینه یک

تمرین ۳۱: پنج عدد  $\frac{5}{12}, c, b, a, \frac{5}{3}$  به ترتیب جمله های متوالی یک تصاعد هندسی هستند  $b$  کدام است؟

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{5}{6}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

جواب تمرین ۳۱: گزینه دو

### درج واسطه هندسی

آکه یادتون باشه وقتی می فواستیم  $n$  عدد بین دو جمله  $a, b$  قرار بدیم به صورتی که همه جملات تشکیل یک تصاعد حسابی بدن قدرنسبت دنباله از رابطه زیر بدست میومد:

$$b - a = (n + 1)d \Rightarrow d = \frac{b - a}{n + 1}$$

به همین صورت اگر بین دو جمله  $a, b$  بفواهییم  $n$  عدد قرار بدیم به صورتی که همه اعداد با هم تشکیل یک تصاعد هندسی را بدهند قدرنسبت دنباله از رابطه زیر بدست میاد:

$$\frac{b}{a} = q^{n+1}$$

مثال ۴۸: بین دو عدد ۳ و ۲۴ دو واسطه هندسی درج کرده ایم نسبت دو واسطه هندسی چقدر است؟

حل: نیازی به فرمول نیست! فقط یکم دقت لازمه!

$$3, a_2, a_3, 24 \Rightarrow \frac{24}{3} = \frac{a_4}{a_1} = q^3 = 8 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} = q = 2$$

مثال ۴۹: بین اعداد ۸ و  $\frac{81}{2}$  سه واسطه هندسی درج کرده ایم قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

$$8, a_2, a_3, a_4, \frac{81}{2} \Rightarrow \frac{\frac{81}{2}}{8} = \frac{a_5}{a_1} = q^4 = \frac{81}{16} = \frac{3^4}{2^4} \Rightarrow q = \pm \frac{3}{2}$$

اگر قدرنسبت مثبت باشه دنباله هندسی ما صعودی میشه:

$$8, 12, 18, 27, \frac{81}{2}$$

اما اگر قدرنسبت منفی باشه دنباله نوسانی میشه (نه صعودی و نه نزولی)

$$8, -12, 18, -27, \frac{81}{2}$$

به مثال بعدی فوب توجه کنیدا

مثال ۵۰: بین دو عدد  $3$  و  $192$  پنج واسطه هندسی درج کرده ایم مجموع این واسطه ها برابر است با:

$$(1) \quad -55 \quad (2) \quad -66 \quad (3) \quad -77 \quad (4) \quad -88$$

حل:

اگر  $3$ ،  $1$  جمله اول دنباله در نظر بگیریم  $192$  جمله هفتم دنباله می شود (چرا؟) بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\frac{a_7}{a_1} = q^6 = \frac{192}{3} \Rightarrow q^6 = 64 = 2^6 \Rightarrow q = \pm 2$$

اگر قدر نسبت مثبت باشد دنباله هندسی به صورت زیر در میاد:

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192$$

که در این حالت مجموع پنج جمله واسطه برابر  $186$  می شود که با توجه به گزینه ها این حالت مد نظر نیست!

اگر قدر نسبت منفی باشد دنباله به صورت زیر همیشه:

$$3, -6, 12, -24, 48, -96, 192$$

و در این حالت مجموع پنج جمله واسطه همیشه  $-66$

### مجموع جملات یک دنباله هندسی

مشابه دنباله حسابی رابطه حاصل جمع جملات یک دنباله هندسی فیلی راحت بدست میاد.

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

از طرفی از ریاضیات پایه میرونییم:

$$x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$$

بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

غب بریم سراغ ادامه اثبات:

$$S_n = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = a_1 \left( \frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

بنابراین رابطه مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی به صورت زیر هست:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

دقت کنید که توی دنباله حسابی برای مناسبه نیاز به جمله اول، قدر نسبت و تعداد جملات بود در اینجا هم دقیقاً همینطوره!

مثال ۱: در دنباله هندسی مثبت **5, b, 45** مجموع چهار جمله اول چقدر می شود؟

حل: در اینجا جمله اول و سوم دنباله هندسی داده شده بنابراین با داشتن دو جمله می توانیم قدر نسبت رو هم در بیاریم پس قضیه حل!

$$\frac{a_3}{a_1} = q^2 = \frac{45}{5} = 9 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow S_4 = \frac{5(3^4 - 1)}{3 - 1} = 200$$

مثال ۵۲: در یک دنباله هندسی با قدر نسبت  $\sqrt{2}$  مجموع هشت جمله اول چند برابر مجموع چهار جمله اول است؟

۱۵ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۱۷ (۱)

حل: در اینجا جمله اول داده نشده اما نگران نباشید چون توی مسئله نسبت رو میخواند:

$$S_8 = \frac{a(q^8 - 1)}{q - 1} \quad S_4 = \frac{a(q^4 - 1)}{q - 1} \Rightarrow$$

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{(q^8 - 1)}{(q^4 - 1)} = \frac{(q^4 - 1)(q^4 + 1)}{(q^4 - 1)} = (q^4 + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{S_8}{S_4} = q^4 + 1 = (\sqrt{2})^4 - 1 = 4 - 1 = 3$$

نکته: نسبت  $S$ ها زیاده توی تست ها دیده میشه به خصوص نسبت  $\frac{S_{2n}}{S_n}$  مثلا  $\frac{S_{10}}{S_5}$  یا  $\frac{S_6}{S_3}$  بنابراین خوب یادتون باشه که:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = q^n + 1$$

مثال ۵۳: حاصل مجموع  $1 + x + x^2 + \dots + x^{12}$  به ازای  $x = \sqrt{2}$  کدوم است؟

$$127 + 63\sqrt{2} \quad (۴) \quad 128 + 63\sqrt{2} \quad (۳) \quad 127 + 64\sqrt{2} \quad (۲) \quad 128 + 64\sqrt{2} \quad (۱)$$

حل: این تست جالبیه خوب گوش کنید!

در اینجا به تصاعد هندسی داریم با جمله اول برابر ۱ و قدر نسبت  $x$  تعداد جملات هم ۱۳ تا هست (قبول ندارم بشمارا!)

$$S_{13} = \frac{(1)((q)^{13} - 1)}{(q - 1)} = \frac{((\sqrt{2})^{13} - 1)}{(\sqrt{2} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + 1)} = \frac{(\sqrt{2}^{14} + \sqrt{2}^{13} - \sqrt{2} - 1)}{2 - 1}$$

سفت شر نه؟!

تترسید فقط دقت کنید که:

$$\sqrt{2}^{14} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{14} = 2^7 = 128 \quad , \quad \sqrt{2}^{13} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^{12} = \sqrt{2}(64) = 64\sqrt{2}$$

بنابراین داریم:

$$S_{13} = 128 + 64\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 = 127 + 63\sqrt{2}$$

دیدید که همش بحث ریاضیات پایه بود!

مثال ۵۴: مجموع هشت جمله دنباله هندسی  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$  کدام است؟

$\frac{230}{128}$  (۴)       $\frac{255}{256}$  (۳)       $\frac{5}{64}$  (۲)       $\frac{1}{256}$  (۱)

حل: ابتدا جمله اول، قدر نسبت و تعداد جملات رو مشخص می‌کنیم:

$$a = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \quad n = 8$$

$$S_8 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 1 - \frac{1}{2^8} = 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$$

مثال ۵۵: در تصاعد هندسی  $2, \frac{1}{2}, \dots$  مجموع ۵ جمله اول چند برابر مجموع ۵ جمله دوم است؟

$2^5$  (۴)       $2$  (۳)       $2^2$  (۲)       $2^{10}$  (۱)

به تست چالاب و نکته دار فوب، دقت کنید!

$$a = 2, \quad q = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}, \quad n = 5$$

روش اول: مناسبه پنج جمله اول که کاری نداره:

$$S_5 = \frac{(2) \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{(2)(1 - (2)^{-10})}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \left(\frac{8}{3}\right) (1 - 2^{-10})$$

اما مجموع پنج جمله دو<sup>م</sup> همیشه پی؟ (توی تصاعد حسابی براتون گفتم یاد تونه؟!)

$$\begin{aligned} \text{پنج جمله دو}^{\text{م}} = S_{10} - S_5 &= \frac{(2) \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)} - \left(\frac{8}{3}\right) (1 - 2^{-10}) \\ &= \left(\frac{8}{3}\right) (1 - 2^{-20}) - \left(\frac{8}{3}\right) (1 - 2^{-10}) \\ &= \left(\frac{8}{3}\right) (1 - 2^{-10}) [1 + 2^{-10} - 1] = \left(\frac{8}{3}\right) (1 - 2^{-10}) (2^{-10}) \end{aligned}$$

حالا مسئله از ما پی مینواد؟

$$\frac{S_5}{S_{10} - S_5} = \frac{\left(\frac{8}{3}\right) (1 - 2^{-10})}{\left(\frac{8}{3}\right) (1 - 2^{-10}) (2^{-10})} = \frac{1}{2^{-10}} = 2^{10}$$

اما به نظرتون این راه حل منطقیه؟! .... مسلما فیر!

روش دو<sup>م</sup>: این روش حالت ابتکاری داره خوب نگاه کنیدا

$$\frac{S_5}{S_{10} - S_5} = \frac{1}{\frac{S_{10}}{S_5} - \frac{S_5}{S_5}} = \frac{1}{\frac{S_{10}}{S_5} - 1} = \frac{1}{(1 + q^5) - 1} = \frac{1}{q^5} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^5} = 2^{10}$$

فدایش راه حل رو حال کردید؟! !!

روش سوم:

فرض کنید اصلاً نخواستیم مخ بسوزانیم و ابتکار به خرج بدهیم!

اگر یادتون باشه توی دنباله حسابی گفتیم که وقتی مجموع جملات وسطی دنباله فوایسته شده باشه مثلاً بگن پنج جمله دوم (مثه اینجا) دو راه حل داریم یکی اینکه پنج جمله دوم رو به صورت  $S_{10} - S_5$  بنویسیم (مثل روش اول) و روش دوم اینکه پنج جمله دوم رو به صورت  $S_5$  به دنباله جدید در نظر بگیریم که جمله اولش همیشه همون جمله ششم دنباله اصلی

$$\underbrace{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5}_{S_5}, \underbrace{a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}}_{S'_5}$$

$$S_5 = \frac{a(q^5 - 1)}{(q - 1)}, \quad S'_5 = \frac{aq^5(q^5 - 1)}{(q - 1)} \Rightarrow \frac{S_5}{S'_5} = \frac{1}{q^5} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^5} = 2^{10}$$

دقت کنید توی این مسئله آخر کار عددگذاری کنیم بهتره.

**تشخیص نزولی یا صعودی بودن دنباله هندسی**

یکی از مواردی که توی برقی از سوالاتی دنباله به کار میاد تشخیص صعودی یا نزولی بودن دنباله هاست در تصاعد حسابی این کار خیلی راحت بود چون اگر  $d > 0$  دنباله عددی صعودی و اگر  $d < 0$  دنباله نزولی بود اما در دنباله هندسی به مقدار قضیه فرق فوکوله!

اول از همه فرض کنید قدر نسبت دنباله هندسی منفی باشه مثلاً  $a = 5, q = -2$  اونوقت جملات دنباله هندسی به صورت زیر درمیاد:

$$5, -10, 20, -40, \dots$$

می بینیم که در این حالت دنباله هندسی نوسانی هست یعنی نه نزولیه و نه صعودی بنابراین:



در دنباله هندسی اگر  $q < 0$  دنباله نوسانی هست

اما اگر  $q > 0$  باید چهار حالت رو در نظر بگیریم (البته دو حالت رو فقط باشید کافیه!)

الف) اگر  $a_1 > 0$  و  $q > 1$  دنباله صعودی هست (بهترین حالت!) مثلاً:

$$a_1 = 2, q = 3 \Rightarrow 2, 6, 18, \dots$$

ب) اگر  $a_1 > 0$  و  $0 < q < 1$  دنباله نزولی هست مثلاً:

$$a_1 = 2, q = \frac{1}{2} \Rightarrow 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$$

اما اگر  $a_1 < 0$  باشه قضیه برعکسه یعنی:

ج) اگر  $a_1 < 0$  و  $q > 1$  دنباله نزولی هست مثلاً:

$$a_1 = -2, q = 2 \Rightarrow -2, -4, -8, \dots$$

د) اگر  $a_1 < 0$  و  $0 < q < 1$  دنباله صعودی هست مثلاً:

$$a_1 = -2, q = \frac{1}{2} \Rightarrow -2, -1, -\frac{1}{2}, \dots$$

حالت  $q = 1$  هم که مشخصه یه دنباله ثابت همیشه!

آقا اجازه: ما قاطی کردیم!



استاد: بین من خودم اینطوری مفظ کردم:

اولا حالت  $q < 0$  که نوسانی هست بشی توش نیست

حالا حالت  $0 < q < 1$  رو میکیرم منفی و حالت  $q > 1$  رو میکیرم مثبت

همچنین دنباله صعودی رو مثبت و دنباله نزولی رو منفی میکیرم بنابراین:

حالت  $a_1 > 0$  و  $0 < q < 1$  همیشه مثبت در منفی که همیشه منفی بنابراین دنباله نزولی هست

بقیه حالت ها رو هم به همین صورت میشه!

آقا اجازه: اگر سر جلسه بازم یادمون رفت چی؟



استاد: اصلا نگران نباش کافیست به مثال عددی واسه خودت بزنی تا یادت بیاد.

حالا به سوال: اگر در صورت سوال گفته بود که دنباله غیر نزولیه کدوم حالت ها میشه؟

آقا اجازه: میشه:



$$a > 0, \quad q > 1$$

$$a < 0, \quad 0 < q < 1$$

چون هر دو شون صعودی هستن.

استاد: خوبه ولی به حالت رو با انداختی!

غیر نزولی یعنی صعودی یا نوسانی! پس حالت  $q < 0$  هم جزء غیر نزولی محسوب میشه! گرفتگی؟

مثال ۵۶: دنباله هندسی  $\dots, \frac{1}{2}, x, 2$  غیر نزولی است مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

$$\frac{23}{16} \text{ (۴)} \quad \frac{11}{8} \text{ (۳)} \quad \frac{21}{16} \text{ (۲)} \quad \frac{41}{32} \text{ (۱)}$$

یه تست فیلی هوشمندانه از کنگور سراسری! توی این تست طراح مدارکتر تلاش خودشو انجام داده تا بپه ها رو به اشتباه بندازه! دقت کنید که دنباله غیر نزولی یعنی صعودی یا نوسانی

حالا بریم سراغ حل مسئله:

$$\Rightarrow a_1 = 2 \Rightarrow \frac{a_3}{a_1} = q^2 = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{2}$$

اگر  $q = \frac{1}{2}$  رو در نظر بگیریم داریم:

$$a_1 = 2 > 0, \quad 0 < q < 1 \Rightarrow \text{دنباله نزولی هست}$$

پس فقط می مونه حالت  $q = -\frac{1}{2}$  در این صورت:

$$a_1 = 2, q = -\frac{1}{2} \Rightarrow S_6 = \frac{2 \left[ \left( -\frac{1}{2} \right)^6 - 1 \right]}{\left( -\frac{1}{2} - 1 \right)} = \frac{2 \left( 1 - \frac{1}{64} \right)}{\frac{3}{2}} = \frac{21}{16}$$

دنباله هندسی ناممرد

از ریاضیات پایه می دونیم که اگر یک عدد بین  $-1$  و  $1$  را به توان برسونیم اون عدد به سمت صفر میل می کنه مثلا:

$$d = \frac{1}{2} \Rightarrow d^2 = \frac{1}{4}, d^3 = \frac{1}{8} \dots n \rightarrow \infty \Rightarrow d^n = 0$$

بنابراین اگر یک دنباله هندسی ناممرد با قدر نسبت  $-1 < q < 1$  داشته باشیم در مجموع جملات دنباله از رابطه زیر بدست میاد:

$$S_{\infty} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \xrightarrow{q^n \rightarrow 0} S_{\infty} = \frac{a}{1 - q}$$

$$-1 < q < 1 \Rightarrow S_{\infty} = \frac{a}{1 - q}$$

مثال ۵۷: هر مجموع جملات یک دنباله هندسی نامتناهی که جمله اول آن ۱۸ و قدر نسبت آن  $\frac{1}{7}$  باشد کدام است؟

۱۸ (۴)

۲۱ (۳)

۳۶ (۲)

۴۲ (۱)

$$S_{\infty} = \frac{a}{1 - q} = \frac{18}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{18}{\frac{6}{7}} = 21$$

مثال ۵۸: هر مجموع یک تصاعد هندسی چهار برابر جمله اول آن است قدر نسبت این تصاعد چقدر است؟

$\frac{7}{8}$  (۴)

$\frac{5}{8}$  (۳)

$\frac{3}{4}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

$$S_{\infty} = 4a_1 \Rightarrow \frac{a_1}{1 - q} = 4a_1 \Rightarrow \frac{1}{1 - q} = 4 \Rightarrow 1 - q = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \frac{3}{4}$$